

TEMA II: Teoría de Control Moderno. Variables de Estado.

1. Introducción

Los sistemas modernos de control en la ingeniería tienen una tendencia a aumentar su complejidad debido a la necesidad de efectuar tareas cada vez más complejas y mayor exigencia en el desempeño de los mismos. Además, es frecuente que los sistemas actuales posean múltiples entradas y múltiples salidas (sistemas MIMO – *Multiple-Inputs-Multiple-Outputs*) y aún más que sean variantes en el tiempo. Por tanto, debido a las cuestiones antes mencionadas y al fácil acceso a los sistemas computadores a partir de los años 80, la Teoría de Control Moderno, desarrollada en los años 60, se comenzó a utilizar cada vez más permitiendo dar soluciones a los problemas de control que la Teoría Clásica no consigue dar satisfactoriamente. Esta teoría está basada en el concepto de “estado” o “variables de estado” de un sistema dinámico, concepto este que veremos más adelante.

2. Distinción entre Control Clásico y Control Moderno

La teoría de control clásico, como bien sabemos describe al sistema dinámico a través de la función de transferencia (FT) del mismo, definida con base en el conocimiento de la entrada y salida del sistema y suponiendo que el sistema está en reposo en $t = 0$, o sea, condiciones iniciales nulas; en consecuencia no da información del comportamiento interno del sistema. Por tanto esta teoría es aplicable únicamente a sistemas de una sola entrada y una sola salida (sistemas SISO – *Single-Inputs-Single-Outputs*), lineales e invariantes en el tiempo y la misma se aplica en el dominio de la frecuencia compleja. Por otro lado, la teoría de control moderno se describe a través de ecuaciones de estado las cuales contienen toda la información de la dinámica interna del sistema, y permiten incluir fácilmente las condiciones iniciales. Además, las ecuaciones de estado son ecuaciones diferenciales de 1° orden, simples de resolver. Esta teoría puede ser aplicable a sistemas MIMO, lineales o no lineales, variantes o invariantes en el tiempo y el enfoque de la misma es exclusivamente en el dominio del tiempo.

3. Concepto de Estado

Como se mencionó en la sección anterior, la teoría de control clásico describe al sistema dinámico a través de la relación matemática entre la entrada y la salida, o sea su FT, considerando en general a este sistema dinámico como una “caja negra”. Esto se muestra en la Figura 1, en la cual se observa que a través de la inyección de diferentes tipos de señales a la entrada de la caja negra se obtiene un conjunto de señales a la salida de la misma, lo que nos permite conocer el

comportamiento del sistema dinámico y así definir las propiedades de este sistema. A partir entonces de estos ensayos es posible establecer una relación matemática de la función de transferencia del sistema en cuestión, dado por:

$$g(t) = y(t)/u(t) \tag{1}$$



Figura 1 – Descripción entrada-salida de un sistema dinámico SISO LIT.

Es práctica común, con el objetivo de conocer aproximadamente la FT de un sistema dinámico cuyo modelo nominal no se puede modelar por visualización directa, el inyectar señales sinusoidales de diferentes frecuencias para efectuar el trazado de la respuesta en frecuencia de este sistema (gráfico de Bode), gráfico este que pone de manifiesto los polos y ceros del sistema, permitiendo así concluir sobre la expresión matemática aproximada de la FT. Este procedimiento se muestra en los valores de la Tabla I y el grafico de Bode de la Figura 3, a partir de los ensayos realizados a un circuito medidor de tensión formado por sensor mas circuito de acondicionamiento, cuyo diagrama en bloques se muestra abajo:

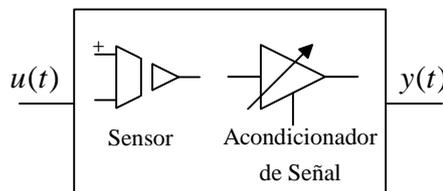


Figura 2 – Sistema dinámico. Sensor + Acondicionador de señal. (Caja negra).

Tabla I – Valores experimentales de entrada-salida para diferentes valores de frecuencia

Frecuencia (kHz)	Tensión de Entrada $u(t)$. (V_{pp})	Tensión de Salida $y(t)$. (V_{pp})	Ganancia (dB)	Fase (μs)	Fase ($^\circ$)
0,01	8	8	0	0	0
0,02	8	8	0	0	0
0,02	8	8	0	0	0
0,1	8	8	0	0	0
0,2	8	8	0	0	0
0,5	8	8	0	0	0
1	8	8	0	0	0
2	8	8	0	0	0
5	8	8	0	6	-10.8
10	8	7.8	-0.22	6	-21.6
20	8	7.4	-0.68	6	-43.2
50	8	5.8	-2.80	5.6	-100.8
100	8	2.8	-9.12	4.1	-148.8
200	8	0.56	-23.10	2.4	-170.8

La función de transferencia aproximada para estos valores experimentales es la siguiente:

$$G(s) = \frac{1}{\frac{1}{(4 \cdot 10^5)^2} s^2 + \frac{2}{4 \cdot 10^5} s + 1} \tag{2}$$

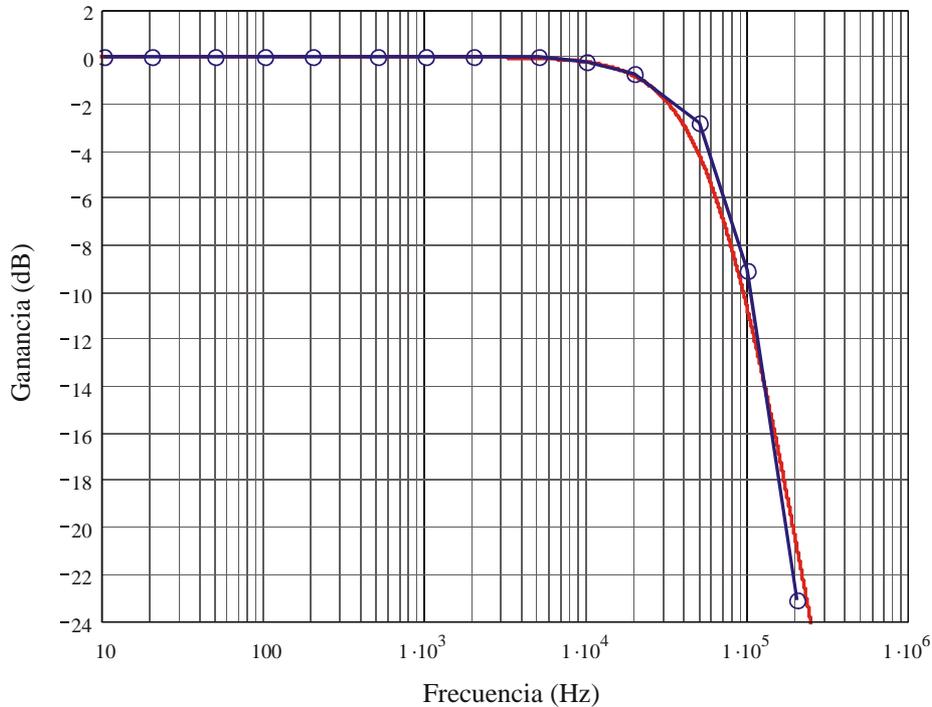


Figura 3 – Respuesta en frecuencia. Experimental (azul). Aproximación (rojo).

Por otro lado, es importante recordar que esta función de transferencia es obtenida bajo la suposición de que todos los estados iniciales son nulos, o sea el sistema está relajado en el instante inicial t_0 , lo que se describe de la siguiente forma:

$$y_{[t_0, \infty]} = g u_{[t_0, \infty]} \tag{3}$$

Esto también vale cuando la FT se obtiene a partir de la transformada de Laplace de la ecuación diferencial lineal e invariante en el tiempo del sistema dinámico modelado por visualización directa. Si el sistema dinámico no está relajado en t_0 entonces la ecuación (3) no se cumple. O sea, la salida del sistema dependerá de la entrada $u_{[t_0, \infty]}$ y de las condiciones iniciales en t_0 . Por tanto, para determinar la salida $y(t)$ de forma única necesitamos del conjunto de condiciones iniciales; a este conjunto se lo llama: “ESTADO”.

A partir de lo dicho anteriormente, podemos establecer la siguiente definición: El “estado” de un sistema en el tiempo inicial t_0 , es la cantidad de información en t_0 que juntamente con la entrada $u_{[t_0, \infty]}$, determina de forma única el comportamiento del sistema, o sea determina la salida $y(t)$ para todo $t \geq t_0$.

Así, cuando hablamos del comportamiento del sistema dinámico nos referimos a la respuesta de la “salida” y a la respuesta de los “estados”. Es importante conocer la “respuesta de los estados” debido a que para una determinada entrada limitada aplicada al sistema la salida puede ser también limitada pero al mismo tiempo pueden existir dinámicas internas (estados) que en vez de tender a cero o a un valor limitado, aumentan su energía en el sentido de tornar inestable al sistema.

Asociados al concepto de “estado” de un sistema dinámico, surgen las siguientes definiciones:

Variables de Estado: Las variables de estado de un sistema dinámico son el menor conjunto de variables que determinan el estado de un sistema dinámico. O también puede decirse que las variables de estado son el menor conjunto de variables necesario para describir completamente el comportamiento del sistema dinámico.

A pesar de que existen sistemas que pueden ser representados por un número “infinito” de variables de estado, (como por ejemplo los sistemas económicos) nosotros, en la ingeniería estudiaremos solamente la clase de sistemas cuyo estado está definido por un número finito de variables. A partir de esto podemos definir entonces lo que se llama:

Vector de Estado: El estado de un sistema dinámico puede ser representado por un vector columna, dimensionalmente finito, denotado por “ \mathbf{x} ”, llamado vector de estado. O sea, $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T$, donde los elementos del vector \mathbf{x} son las variables de estado y el subíndice n representa el orden del sistema.

Espacio de Estado: El espacio lineal dentro del cual está delimitado el vector de estado se denomina espacio de estado. Dado que las variables de estado adquieren siempre valores reales, el espacio de estado será el espacio vectorial real dimensionalmente finito, el cual se representa matemáticamente como: $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Ecuaciones Dinámicas o de Espacio de Estado: Un sistema dinámico debe incluir elementos que memoricen los valores aplicados a su entrada a partir de un instante $t \geq t_0$. En sistemas de control los **integradores** sirven como **elementos de memoria** y por tanto las salidas de estos integradores pueden ser consideradas como variables que definen el estado de un sistema dinámico. En el modelado por espacio de estado tenemos en cuenta tres tipos de variables: variables de entrada, variables de salida y variables de estado. Por tanto, el conjunto de ecuaciones que describe la relación única entre las entradas, las salidas y los estados, se denomina ecuación dinámica. Sea un sistema MIMO con n integradores, “ p ” entradas, “ q ” salidas y “ m ” disturbios. Definamos entonces a las “ n ” salidas de los integradores como variables de estado. El sistema dinámico puede ser descrito por el siguiente conjunto de ecuaciones:

Por otro lado, si el sistema es no lineal, **h** y **g** pueden ser linealizadas entorno de un punto de operación, y así tendremos las respectivas ecuaciones de estado y de salida dadas en (9) y (10).

Finalmente, si las funciones **h** y **g** no involucran el tiempo *t* explícitamente, el sistema es invariante en el tiempo. En este caso, las matrices **A**, **B**, **C**, **D**, **E** y **F** resultan matrices constantes y las ecuaciones (9) y (10) se escriben de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{E} \mathbf{w}(t) \tag{11}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) + \mathbf{F} \mathbf{w}(t) \tag{12}$$

Quedan definidos así los siguientes vectores:

$\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T \rightarrow$ Vector de Estado, $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_p]^T \rightarrow$ Vector de Entrada

$\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_q]^T \rightarrow$ Vector de Salida, $\mathbf{w} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_m]^T \rightarrow$ Vector de Disturbio

y las siguientes matrices:

A: “matriz de estado” o “matriz de dinámicas del sistema”, de dimensión $(n \times n)$;

B: “matriz de entrada”, de dimensión $(n \times p)$;

C: “matriz de salida”, de dimensión $(q \times n)$;

D: “matriz de transmisión directa entrada-salida”, de dimensión $(q \times p)$;

E: “Matriz de disturbio a la entrada de la planta”, de dimensión $(n \times m)$;

F: “Matriz de disturbio a la salida de la planta”, de dimensión $(q \times m)$;

El diagrama en bloques matricial de las ecuaciones dinámicas (11) y (12) se muestra en la Figura 4. Siendo este sistema de ecuaciones de dimensión *n* entonces el bloque de integración consistirá de *n* integradores.

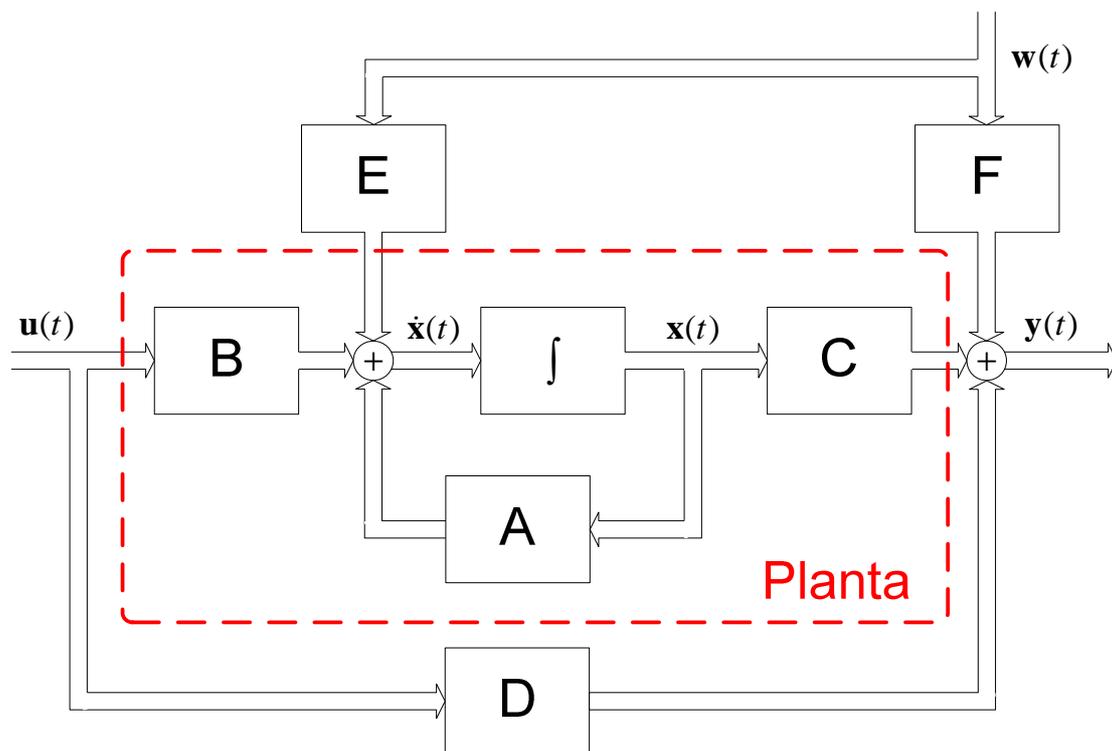


Figura 4 – Diagrama de bloques matricial de la ecuación dinámica (11) y (12).

A continuación presentaremos algunos ejemplos para familiarizarnos con los modelos por variables de estado y poder así obtener algunas conclusiones al respecto.

4. Ejemplo 1

Consideremos el circuito *RLC* mostrado en la Figura 5:

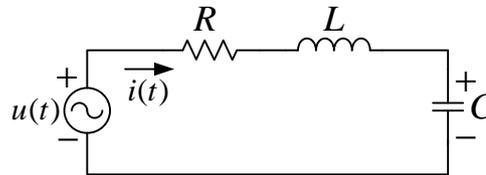


Figura 5 – Circuito *RLC*. Modelo por variables de estado. Ejemplo 1.

Planteando la ecuación de Kirchoff de las tensiones en la malla tenemos:

$$u(t) = i(t)R + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (13)$$

Por otro lado, la corriente en el capacitor está dada por la siguiente expresión:

$$i_c(t) = i_L(t) = i(t) = C \frac{dv_c}{dt} \quad (14)$$

donde, $v_c(t)$ es la tensión en bornes del capacitor. Elijamos como primer posible conjunto de variables de estado a la corriente que circula en el inductor y a la tensión en bornes del capacitor. Aún más, escojamos como variable de salida a la tensión del capacitor. Así tenemos el siguiente vector de estado: $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \quad x_2(t)]^T = [v_c(t) \quad i_L(t)]^T$. O sea que, $\dot{x}_1 = \frac{dv_c}{dt}$ y $\dot{x}_2 = \frac{di_L}{dt}$.

Con esa elección y a partir de las ecuaciones (13) y (14) podemos obtener las siguientes ecuaciones dinámicas:

$$\begin{aligned} \frac{di_L}{dt} &= \frac{1}{L} u(t) - \frac{R}{L} i_L(t) - \frac{1}{L} v_c(t) \\ \frac{dv_c}{dt} &= \frac{1}{C} i_L(t) \end{aligned} \quad (15)$$

Estas ecuaciones diferenciales de primer orden pueden escribirse en forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u(t) \quad (16)$$

Las ecuaciones de estado en (15) o la (16) describen el comportamiento del circuito de la Figura 5 y define la relación que existe entre la entrada y el estado del sistema, donde este último está formado por la dinámica de la tensión en bornes del capacitor y la dinámica de la corriente que

circula en el inductor. De la ecuación (16) se observa que la misma es de la forma:

$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t)$, donde,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}, \tag{17}$$

La matriz \mathbf{A} nos da los “autovalores” del sistema dinámico. Dando valores a los elementos del sistema podemos graficar la ubicación de estos autovalores en el plano frecuencial complejo. Sean, $R = 10\Omega$, $L = 100\mu\text{H}$ y $C = 20\mu\text{F}$, tenemos los siguientes autovalores: $\{-5279, -94721\}$. Estos son polos sobre el eje real negativo del plano s , los que están representados en la Figura 6.

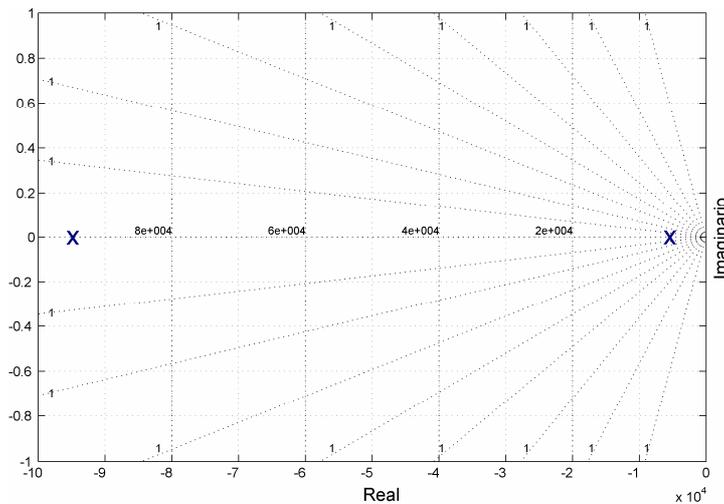


Figura 6 – Autovalores del sistema dinámico de la Figura 5.

Finalmente, la ecuación de salida de este sistema es dada por la siguiente ecuación:

$$y(t) = v_c(t), \tag{18}$$

o en forma matricial:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c(t) \\ i_L(t) \end{bmatrix}, \tag{19}$$

La ecuación (19) es del tipo $y(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t)$, donde $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, es llamada “matriz de salida”.

Es interesante mostrar que el orden de las variables de estado en la ecuación matricial no altera la dinámica del sistema. O sea, puedo escoger $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} i_L(t) & v_c(t) \end{bmatrix}^T$, y nuestra ecuación de estado resulta:

$$\begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dv_c}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u(t), \tag{20}$$

y los autovalores de la matriz A resultan: $\{-94721, -5279\}$, iguales al caso anterior. Una vez decidido el orden de las variables de estado, este debe ser respetado a la hora de realizar una simulación matemática, con algún programa determinado, con el fin de solucionar la ecuación

dinámica. Con relación a la ecuación de salida, la misma resulta: $y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix}$.

A seguir vamos a ver que la ecuación de estado resultante de un mismo sistema dinámico no es única y para esto elegimos las variables de estado como siendo: $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t)]^T = [v_c(t) \ \dot{v}_c(t)]^T$, o sea, la tensión en bornes del capacitor y la derivada de esta tensión. Esta elección está asociada a una necesidad matemática, generalmente utilizada en observadores de estados. De la ecuación de la tensión de carga del capacitor, tenemos que:

$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} = \frac{1}{C} \frac{di}{dt}, \quad (21)$$

Substituyendo la ecuación de la derivada de la corriente en (15) en la última ecuación, obtenemos:

$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} = \frac{1}{LC} u(t) - \frac{R}{LC} i_L(t) - \frac{1}{LC} v_c(t), \quad (22)$$

y substituyendo la corriente en el inductor, por la segunda expresión en (15), llegamos a:

$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} = \frac{1}{LC} u(t) - \frac{R}{L} \dot{v}_c(t) - \frac{1}{LC} v_c(t). \quad (23)$$

Así nos queda el siguiente conjunto de ecuaciones dinámicas:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{v}_c = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{v}_c = \frac{1}{LC} u(t) - \frac{R}{L} \dot{v}_c(t) - \frac{1}{LC} v_c(t), \end{aligned} \quad (24)$$

y en forma matricial queda expresada la ecuación de estado como a seguir:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_c(t) \\ \ddot{v}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/LC & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c(t) \\ \dot{v}_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/LC \end{bmatrix} u(t), \quad (25)$$

Los autovalores de la matriz A resultan: $\{-5279, -94721\}$. Si comparamos con los resultados anteriores, se observa que son exactamente los mismos, como esperado. Por tanto, la representación por espacio de estado de un determinado sistema dinámico no es única, así como tampoco es único el conjunto de variables de estado que representan el comportamiento de tal sistema.

5. Ejemplo 2.

Sea el circuito eléctrico mostrado en la Figura 7:

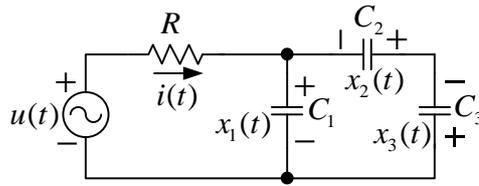


Figura 7 – Circuito RC. Modelo por variables de estado. Ejemplo 2.

Aplicando la ley de Kirchhoff de las tensiones a la malla de los tres capacitores, considerando que las variables de estado representadas en el circuito están asociadas a las tensiones en bornes de estos, tenemos la siguiente ecuación:

$$x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) = 0 \quad (26)$$

Observando la ecuación (26) deducimos que las 3 tensiones son linealmente dependientes, lo que significa que conocidas dos de ellas la tercera resulta definida. O sea, el comportamiento del sistema resulta definido por dos de las 3 tensiones de los capacitores, o lo que es lo mismo, 2 de las 3 tensiones elegidas califican como **estado** del sistema. Por tanto, si se eligen las 3 tensiones como estado del sistema, entonces existirá una redundancia.

De los ejemplos presentados aquí, realizaremos las siguientes

Observaciones:

- 1 – La elección del **estado** del sistema **no es única**, y dependerá del problema específico a ser resuelto;
- 2 – La elección de las variables de estado está generalmente asociada a una cantidad física y algunas veces a una necesidad matemática;
- 3 – Las variables de estado están asociadas a elementos que almacenan energía y que muchas veces poseen condiciones iniciales diferentes de cero;
- 4 – El número de variables que definen el estado de un sistema es el mismo para cualquiera de las representaciones de espacio de estado del mismo sistema dinámico, y debe consistir del menor número de variables posible;
- 5 - El número de variables de estado que definen completamente las dinámicas de un sistema es igual al número de integradores involucrados en el sistema.

6. Correlación entre función de transferencia y ecuación de estado

La función de transferencia de un sistema dinámico puede obtenerse a partir de la ecuación dinámica de estado. Consideremos para el propósito las ecuaciones dinámicas, LIT, de un sistema SISO a partir de las ecuaciones (11) y (12), con $p = 1$, $q = 1$ y $m = 1$.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t) + \mathbf{E} w(t) \\ y(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} u(t) + \mathbf{F} w(t)\end{aligned}\quad (27)$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de las dos ecuaciones en (27) y considerando que las condiciones iniciales de todos los estados son nulas, o sea, $\mathbf{x}(0) = 0$; se tiene:

$$\begin{aligned}s\mathbf{X}(s) - \mathbf{X}(0) &= \mathbf{A} \mathbf{X}(s) + \mathbf{B} U(s) + \mathbf{E} W(s) \\ Y(s) &= \mathbf{C} \mathbf{X}(s) + \mathbf{D} U(s) + \mathbf{F} W(s)\end{aligned}, \quad (28)$$

agrupando términos comunes en la primera ecuación en (28),

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{B} U(s) + \mathbf{E} W(s) + \mathbf{X}(0), \quad (29)$$

y premultiplicando a ambos lados por $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$, donde \mathbf{I} es la matriz identidad, esta última ecuación nos queda

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} U(s) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{E} W(s) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{X}(0). \quad (30)$$

Substituyendo esta última en la ecuación de salida tenemos:

$$Y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} U(s) + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{E} W(s) + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{X}(0) + \mathbf{D} U(s) + \mathbf{F} W(s), \quad (31)$$

agrupando en $U(s)$ y en $W(s)$ del lado derecho de la última ecuación, nos queda:

$$Y(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}] U(s) + [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{E} + \mathbf{F}] W(s) + \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{X}(0). \quad (32)$$

Observando la ecuación (32), si desestimamos el efecto del disturbio ($W(s) \equiv 0$) y consideramos que las condiciones iniciales son nulas, es fácil deducir que la función de transferencia del sistema entre la entrada $U(s)$ y la salida $Y(s)$, resulta:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}]. \quad (33)$$

Nótese que el determinante de la matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ debe ser diferente de cero, para exista la inversa de esta matriz $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$. De esta última ecuación observamos lo siguiente:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{Adj(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|}, \quad (34)$$

así podemos reescribir la ecuación (33) de la siguiente forma:

$$G(s) = \frac{\mathbf{C}[Adj(s\mathbf{I} - \mathbf{A})]\mathbf{B} + \mathbf{D}}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|}, \quad (35)$$

donde el numerador de esta última es un polinomio en s que denominaremos $P(s)$. De esta forma, nuestra función de transferencia resulta:

$$G(s) = \frac{P(s)}{|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|}, \quad (36)$$

El determinante $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ es también un polinomio en s , que no es otra cosa que el polinomio característico de $G(s)$, lo que significa que los valores característicos de la matriz de estado \mathbf{A} son iguales a los polos de la función de transferencia $G(s)$.

Esta comprobación la podemos hacer utilizando el ejemplo 1:

$$\text{Adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & s \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}, \quad (37)$$

por tanto, considerando la matriz de salida y de entrada: $[1 \ 0]$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$ respectivamente, tenemos:

$$G(s) = \frac{[1 \ 0] \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}, \quad (38)$$

y esta última ecuación resulta:

$$G(s) = \frac{1/LC}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}. \quad (39)$$

Las raíces de la ecuación característica, o sea, del denominador de $G(s)$, son:

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{2LC} \left[-RC + \sqrt{(RC)^2 - 4LC} \right] \\ r_2 &= \frac{1}{2LC} \left[-RC - \sqrt{(RC)^2 - 4LC} \right] \end{aligned} \quad (40)$$

Substituyendo los valores de los parámetros, dados en el ejemplo 1 y resolviendo tenemos que: $r_1 = -5279$ y $r_2 = -94721$, que son los valores de los valores característicos de la matriz \mathbf{A} calculados en el ejemplo 1.

Si desea conocerse únicamente el efecto del disturbio sobre la salida, o sea, con $U(s) \equiv 0$ y condiciones iniciales nulas, de la ecuación (32) se tiene

$$G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E} + \mathbf{F}]. \quad (41)$$

De la misma forma, si desea conocerse únicamente el efecto de los estados iniciales sobre la salida del sistema, con $U(s) \equiv W(s) \equiv 0$, de la ecuación (32) se tiene:

$$Y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}(0). \quad (42)$$

7. Obtención de la ecuación de estado a partir de la función de transferencia

Supongamos un sistema dinámico SISO LIT que tiene la siguiente función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + b_0s + b_1}{s^3 + a_0s^2 + a_1s + a_2}. \quad (43)$$

Multiplicamos y dividimos el lado derecho de la F.T., por $x_1(s)$ para que la expresión matemática no varíe, y luego igualamos los numeradores y denominadores de ambos lados, o sea:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{s^2 + b_0s + b_1}{s^3 + a_0s^2 + a_1s + a_2} \left(\frac{x_1(s)}{x_1(s)} \right) \\ Y(s) &= s^2x_1(s) + b_0sx_1(s) + b_1x_1(s) \\ U(s) &= s^3x_1(s) + a_0s^2x_1(s) + a_1sx_1(s) + a_2x_1(s) \end{aligned} \quad (44)$$

A continuación, teniendo en cuenta que el sistema es de orden 3, hagamos la siguiente designación de variables: $sx_1(s) = x_2(s)$, $s^2x_1(s) = sx_2(s) = x_3(s)$. De esta forma, las ecuaciones en (44) resultan:

$$\begin{aligned} Y(s) &= x_3(s) + b_0x_2(s) + b_1x_1(s) \\ U(s) &= sx_3(s) + a_0x_3(s) + a_1x_2(s) + a_2x_1(s) \end{aligned} \quad (45)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a las últimas, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones en el dominio del tiempo:

$$\begin{aligned} y(t) &= x_3(t) + b_0x_2(t) + b_1x_1(t) \\ \dot{x}_3(t) &= u(t) - a_0x_3(t) - a_1x_2(t) - a_2x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \end{aligned} \quad (46)$$

De la última ecuación podemos escribir la ecuación de estado de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 & -a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t). \quad (47)$$

y la ecuación de salida,

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_1 & b_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \quad (48)$$

8. Ejemplo 3

Apliquemos este caso al ejemplo 1 del circuito RLC . Expresando las ecuaciones en (15) en función de la entrada $u(t)$ y de la salida $v_c(t)$ del circuito y luego aplicando la transformada de Laplace, nos queda:

$$\begin{aligned} u(t) &= L \frac{di}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt \\ v_c(t) &= \frac{1}{C} \int i(t) dt \end{aligned} \quad , \quad (49)$$

$$\begin{aligned} U(s) &= sLI(s) + RI(s) + \frac{1}{sC} I(s) \\ Y(s) &= \frac{1}{sC} I(s) \end{aligned} \quad , \quad (50)$$

con base en estas ecuaciones, la función de transferencia de nuestro sistema nos queda:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2 LC + sRC + 1} \quad , \quad (51)$$

multiplicando y dividiendo, numerador y denominador del lado derecho de (51) por $x_1(s)$, e igualando numeradores con denominadores, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{1}{s^2 LC + sRC + 1} \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_1(s) \end{pmatrix} \\ Y(s) &= x_1(s) \\ U(s) &= s^2 LCx_1(s) + sRCx_1(s) + x_1(s) \end{aligned} \quad . \quad (52)$$

Denominando,

$$sx_1(s) = x_2(s) \quad \text{y} \quad s^2 x_1(s) = sx_2(s) \quad . \quad (53)$$

y substituyendo en la (52),

$$\begin{aligned} Y(s) &= x_1(s) \\ U(s) &= sLCx_2(s) + RCx_2(s) + x_1(s) \end{aligned} \quad . \quad (54)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a las ecuaciones (53) y (54), nos quedan:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \quad \text{y} \quad \ddot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) \\ y(t) &= x_1(t) \\ u(t) &= LC\dot{x}_2(t) + RCx_2(t) + x_1(t) \end{aligned} \quad . \quad (55)$$

de la última ecuación despejamos $\dot{x}_2(t)$:

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{LC} u(t) - \frac{R}{L} x_2(t) - \frac{1}{LC} x_1(t) \quad , \quad (56)$$

y así resulta la siguiente ecuación de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/LC & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/LC \end{bmatrix} u(t), \quad (57)$$

y la ecuación de salida:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad (58)$$

Si comparamos con la ecuación (25), observamos que $\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = \dot{v}_c(t)$ y $\dot{x}_2(t) = \ddot{x}_1(t) = \ddot{v}_c(t)$. También, $x_1(t) = y(t) = v_c(t)$ y $x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{v}_c(t)$. En resumen, la (57) es igual a la ecuación (25).

Existe otro método algebraico, similar al anterior, que será descrito a seguir. Reordenando la ecuación (51) de la siguiente forma,

$$s^2 LCY(s) + sRCY(s) + Y(s) = U(s), \quad (59)$$

y aplicando la transformada inversa de Laplace,

$$\ddot{y}(t) + \frac{R}{L} \dot{y}(t) + \frac{1}{LC} y(t) = \frac{1}{LC} u(t), \quad (60)$$

Definamos las siguientes variables de estado:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t) \\ x_2(t) &= \dot{y}(t) \\ &\vdots \\ x_n(t) &= \overset{(n-1)}{y} (t) \end{aligned}, \quad (61)$$

por tanto, para nuestro caso específico tenemos:

$$\begin{aligned} x_1(t) = y(t) &\rightarrow \dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) &\rightarrow \dot{x}_2(t) = \ddot{y}(t) \end{aligned},$$

substituyendo en (60), nos queda la siguiente ecuación:

$$\dot{x}_2(t) = \frac{1}{LC} u(t) - \frac{R}{L} x_2(t) - \frac{1}{LC} x_1(t), \quad (62)$$

y nuestra ecuación de estado resulta,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/LC & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/LC \end{bmatrix} u(t); \quad (63)$$

igual a la obtenida en (57). La ecuación de salida es,

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \quad (64)$$

Es importante aclarar que esta selección de variables de estados es conveniente matemáticamente, pero en la práctica, los términos con derivadas de orden elevado provocan

valores poco precisos por los ruidos inherentes que existen en toda aplicación práctica, debido principalmente al aumento de circuitos operacionales y componentes externos en el hardware de control. En lo que sigue, se desarrollaran algunos ejemplos de sistemas modelados en el espacio de estado para familiarizar al alumno con el procedimiento.

9. Ejemplo 4: Convertidor conmutado CC-CC elevador (*boost*).

La Figura 8 muestra el circuito de un convertidor CC-CC elevador. Este tipo de convertidor se usa mucho en fuentes de tensión continua reguladas y como deriva de su nombre, la tensión de salida es siempre mayor que la tensión de entrada y de igual polaridad, o sea, $V_o > V_i$. El convertidor está conformado por dos elementos almacenadores de energía, un inductor a la entrada y un capacitor a la salida. Estos dos elementos pasivos se presentan como filtros pasa bajos de primer orden para la corriente de entrada y para la tensión de salida, respectivamente. Posee también, un dispositivo conmutador controlado (transistor bipolar de potencia, MOSFET o IGBT) y un dispositivo conmutador, el cual puede ser controlado o no controlado. En este último caso se utiliza un diodo rápido, que es el que se usa para el presente análisis. Cuando la llave S se cierra (*on*), dado que la tensión de salida es mayor que la tensión de entrada, el diodo queda inversamente polarizado aislando la etapa de salida. Durante el tiempo t_{on} el inductor almacena energía y el capacitor de filtro mantiene la tensión sobre la carga. Cuando la llave S se abre (*off*), la etapa de salida recibe la energía almacenada en el inductor y también de la fuente de entrada.

Las hipótesis de análisis en régimen estacionario son las siguientes: 1 – el inductor a la entrada es lo suficientemente grande como para alisar la corriente que circula por este, lo que posibilita considerar al conjunto de la fuente de tensión de entrada e inductor, como una fuente de corriente constante. 2 – el capacitor de salida es lo suficientemente grande como para ser considerado una fuente de tensión constante, con lo que, $v_o(t) = V_o$.

Para que este sistema cumpla con determinadas especificaciones, tales como (i) error nulo en régimen estacionario, (ii) tiempos de subida y de establecimiento, (iii) máximo sobrepaso y (iv) buen rechazo de los disturbios provocados por la tensión de entrada y por la carga, es necesario que este convertidor opere en lazo cerrado. En ese sentido, para el proyecto del controlador o de la estructura controladora es importante hallar un modelo nominal que represente de la mejor forma posible la dinámica de tal convertidor.

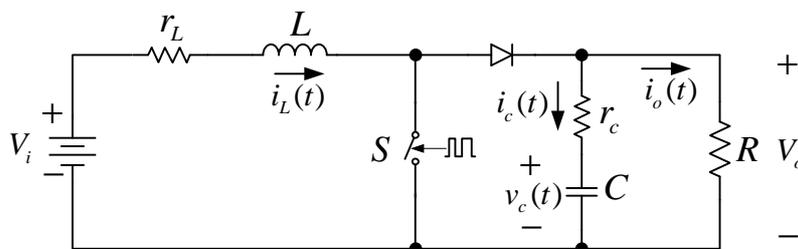


Figura 8 – Convertidor CC-CC elevador. Ejemplo 4.

Es importante resaltar, que para una descripción realista de la operación de este convertidor deben incluirse en la modelación, los elementos parásitos, tales como la resistencia del inductor y la resistencia equivalente serie del capacitor; como se muestra la Figura 8.

9.1 - Etapas de operación y modelo de gran señal en el espacio de estado

Modo de conducción continua $i_L(t) > 0$:

La Figura 9(a) muestra las formas de onda de la corriente en el inductor y de la tensión de disparo de la llave S , mientras que las figuras 9b y 9c muestran las dos etapas de operación de este convertidor.

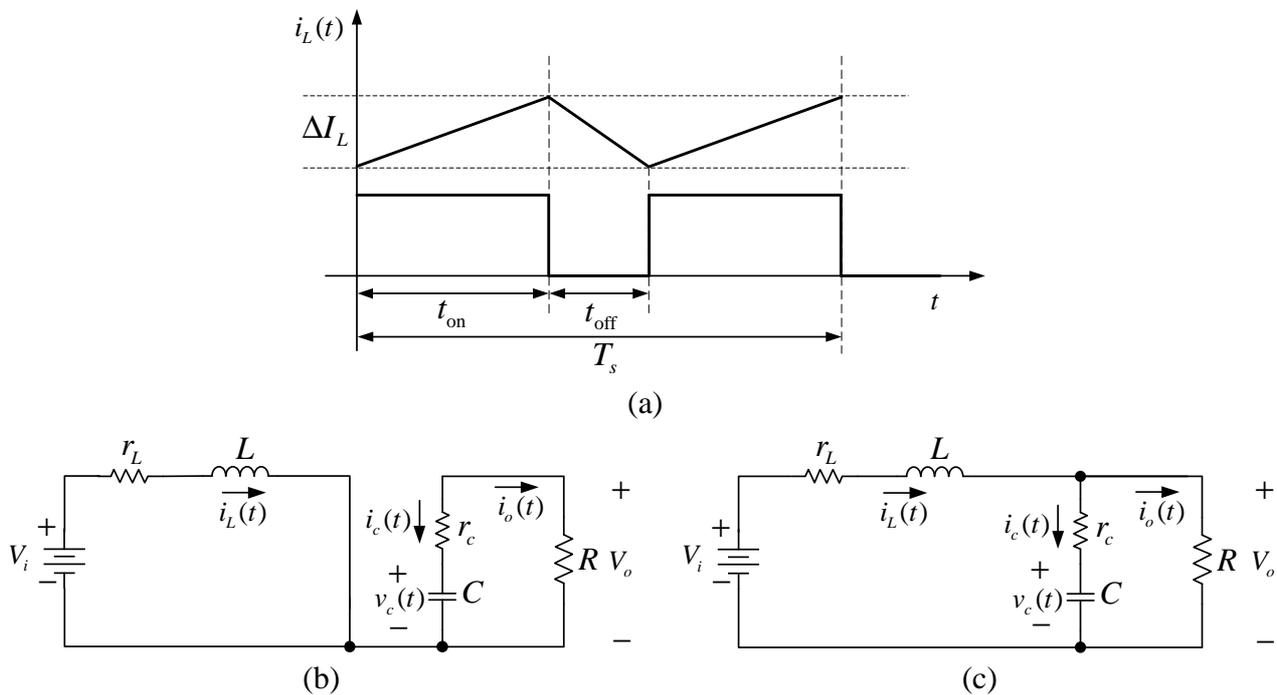


Figura 9 – Etapas de operación del convertidor CC-CC elevador en modo de conducción continua. (a) Formas de onda: corriente en el inductor y tensión de disparo. (b) t_{on} . (c) t_{off} .

A continuación se determinaran las ecuaciones de estado que describen la dinámica de las etapas de operación mostradas en las figuras 9b y 9c. Elegimos como variables de estado a la corriente en el inductor y la tensión sobre el capacitor, o sea, $\mathbf{x}(t) = [i_L(t) \quad v_c(t)]^T$ y la variable de salida es la tensión en bornes de la carga $y(t) = v_o(t)$. Con respecto a la notación utilizada, es importante aclarar que las letras minúsculas itálicas representan cantidades variables en el tiempo y las letras mayúsculas itálicas representan cantidades continuas de régimen estacionario. Por otro lado, para representar vectores se usan letras minúsculas, normal negrita y para matrices letras mayúsculas, normal negrita.

Periodo t_{on} :

$$V_i = r_L i_L + L \frac{di_L}{dt} \quad (65)$$

$$v_c + i_c r_c = -i_c R \quad (66)$$

$$i_c(t) = C \frac{dv_c}{dt} \quad (67)$$

de la ecuación (65) obtenemos \dot{x}_1 ,

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{V_i}{L} - \frac{r_L}{L} i_L \quad (68)$$

de la ecuación (66) y (67) obtenemos \dot{x}_2 ,

$$v_c + C \frac{dv_c}{dt} (R + r_c) = 0 \quad (69)$$

$$\frac{dv_c}{dt} = -\frac{1}{C(R + r_c)} v_c \quad (70)$$

La ecuación de estado para esta etapa resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ \dot{v}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{r_L}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C(R + r_c)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_i}{L} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (71)$$

Dado que

$$v_o = -R i_c \quad (72)$$

y de (70) $i_c = -\frac{1}{(R + r_c)} v_c$ tenemos que

$$v_o = \frac{R}{(R + r_c)} v_c \quad (73)$$

La ecuación de salida resulta:

$$y(t) = v_o(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{R}{(R + r_c)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix}. \quad (74)$$

Denominamos a:

$$\begin{bmatrix} -\frac{r_L}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C(R + r_c)} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1, \quad \begin{bmatrix} \frac{V_i}{L} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_1, \quad \begin{bmatrix} 0 & \frac{R}{(R + r_c)} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_1, \quad \mathbf{D}_1 = 0$$

De esta forma, la ecuación de estado y la ecuación de salida durante el periodo dT_s (donde, $d = \frac{t_{on}}{T_s}$ se denomina ciclo de trabajo o ciclo útil de la llave S) resultan, respectivamente:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 V_i, \quad (75)$$

$$y = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}. \quad (76)$$

Periodo t_{off} :

$$i_L = i_c + i_o \quad (77)$$

$$V_i = r_L i_L + L \frac{di_L}{dt} + i_c r_c + v_c \quad (78)$$

de (78) se tiene

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{V_i}{L} - \frac{r_L}{L} i_L - \frac{r_c}{L} i_c - \frac{1}{L} v_c \quad (79)$$

Sabemos que: $i_o = \frac{v_o}{R}$ y $v_o = v_c + i_c r_c$, por tanto $i_c = \frac{v_o - v_c}{r_c}$. Sustituyendo esta última expresión de la corriente en el capacitor en la (79) se tiene,

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{V_i}{L} - \frac{r_L}{L} i_L - \frac{1}{L} v_o \quad (80)$$

De la ecuación (77) tenemos que $i_c = i_L - i_o$. Sustituyendo las expresiones anteriores de i_c e i_o resulta:

$$\frac{v_o - v_c}{r_c} = i_L - \frac{v_o}{R} \quad (81)$$

$$\left(1 + \frac{r_c}{R}\right) v_o = r_c i_L + v_c \quad (82)$$

$$v_o = \frac{R}{R + r_c} (r_c i_L + v_c) \Rightarrow v_o = \frac{R r_c}{R + r_c} i_L + \frac{R}{R + r_c} v_c \quad (83)$$

Sustituyendo la ecuación (83) en la (80) se tiene:

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{V_i}{L} - \frac{r_L}{L} i_L - \frac{R r_c}{L(R + r_c)} i_L - \frac{R}{L(R + r_c)} v_c \quad (84)$$

y finalmente \dot{x}_1 resulta

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{V_i}{L} - \frac{r_L(R + r_c) + R r_c}{L(R + r_c)} i_L - \frac{R}{L(R + r_c)} v_c \quad (85)$$

Sabiendo que

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C} i_c \Rightarrow \frac{dv_c}{dt} = \frac{v_o - v_c}{r_c C} \quad (86)$$

sustituyendo v_o de la (83) \dot{x}_2 resulta:

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{R}{C(R + r_c)} i_L + \frac{R}{r_c C(R + r_c)} v_c - \frac{1}{r_c C} v_c \quad (87)$$

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{R}{C(R+r_c)} i_L - \frac{1}{C(R+r_c)} v_c. \quad (88)$$

De las ecuaciones (85) y (88) podemos escribir la ecuación de estado como sigue:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ \dot{v}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{r_L(R+r_c)+Rr_c}{L(R+r_c)} & -\frac{R}{L(R+r_c)} \\ \frac{R}{C(R+r_c)} & -\frac{1}{C(R+r_c)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_i}{L} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (89)$$

y la ecuación de salida, a partir de la (83) es

$$y(t) = v_o(t) = \begin{bmatrix} \frac{Rr_c}{R+r_c} & \frac{R}{R+r_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix}. \quad (90)$$

Denominamos a:

$$\begin{bmatrix} -\frac{r_L(R+r_c)+Rr_c}{L(R+r_c)} & -\frac{R}{L(R+r_c)} \\ \frac{R}{C(R+r_c)} & -\frac{1}{C(R+r_c)} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_2, \quad \begin{bmatrix} \frac{V_i}{L} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{B}_2, \quad \begin{bmatrix} \frac{Rr_c}{R+r_c} & \frac{R}{R+r_c} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_2, \quad \mathbf{D}_2 = 0$$

De esta forma, las ecuaciones de estado y de salida durante el periodo $(1-d)T_s$ resultan, respectivamente:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_2 \mathbf{x} + \mathbf{B}_2 V_i, \quad (91)$$

$$y = \mathbf{C}_2 \mathbf{x}. \quad (92)$$

9.2 - Modelo de espacio de estado promedio del convertidor en función del ciclo de trabajo “ $d(t)$ ”:

El modelo promedio en el espacio de estado es una técnica de modelado que se utiliza ampliamente en el campo de convertidores estáticos conmutados. El objetivo es el de sustituir la representación en el espacio de estado de los dos circuitos lineales de las figuras 9b y 9c, definidos por la posición del conmutador, por una descripción única, que represente el comportamiento del convertidor durante todo el periodo de conmutación T_s . Para obtener esta descripción de espacio de estado promedio, las ecuaciones de estado dadas en (75)-(76) y (91)-(92), correspondientes a las etapas de operación analizadas anteriormente, deben ser ponderadas en el tiempo y promediadas. El resultado es una descripción del comportamiento de los valores medios de las variables de estado en función del ciclo de trabajo d , dada por las siguientes ecuaciones:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_p \mathbf{x} + \mathbf{B}_p v_i, \quad (93)$$

$$y = \mathbf{C}_p \mathbf{x} \quad (94)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_p &= \mathbf{A}_1 d + \mathbf{A}_2 (1-d) \\ \mathbf{B}_p &= \mathbf{B}_1 d + \mathbf{B}_2 (1-d) \\ \mathbf{C}_p &= \mathbf{C}_1 d + \mathbf{C}_2 (1-d) \end{aligned} \quad (95)$$

Aplicando la ecuación (95) se obtiene la siguiente representación de estado promedio para el convertidor elevador operando en el modo de conducción continua:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{r_L(R+r_c) + Rr_c(1-d)}{L(R+r_c)} & -\frac{R(1-d)}{L(R+r_c)} \\ \frac{R(1-d)}{C(R+r_c)} & -\frac{1}{C(R+r_c)} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v_i. \quad (96)$$

$$y(t) = v_o(t) = \begin{bmatrix} \frac{Rr_c(1-d)}{R+r_c} & \frac{R}{R+r_c} \end{bmatrix} \mathbf{x}. \quad (97)$$

De estas dos últimas ecuaciones, podemos obtener el punto de operación en régimen estacionario. O sea, después de que los fenómenos transitorios se anulan, esto es, las derivadas de los estados son nulas, el sistema se comporta de acuerdo a la señal forzada aplicada al convertidor. De esta forma se cumple que:

$$0 = \mathbf{A}_p \mathbf{x}_{ss} + \mathbf{B}_p V_i \quad (98)$$

donde, \mathbf{x}_{ss} es el vector de estado en régimen estacionario. De esta última pueden obtenerse los valores de los estados en el punto de operación, o sea I_L y V_c , con $d = D$ y $v_i = V_i$, esto es:

$$\mathbf{x}_{ss} = \begin{bmatrix} I_L \\ V_c \end{bmatrix} = -\mathbf{A}_p^{-1} \mathbf{B}_p V_i = \begin{bmatrix} \frac{(R+r_c)V_i}{r_L(R+r_c) + Rr_c(1-d) + R^2(1-d)^2} \\ \frac{(R+r_c)V_i(1-d)R}{r_L(R+r_c) + Rr_c(1-d) + R^2(1-d)^2} \end{bmatrix}. \quad (99)$$

$$V_o = \mathbf{C}_p \mathbf{x}_{ss} = \frac{(R+r_c)V_i(1-d)R}{r_L(R+r_c) + Rr_c(1-d) + R^2(1-d)^2} \quad (100)$$

La interpretación del modelo promedio, dado por las ecuaciones (96) y (97) es la siguiente: En la práctica para efectuar la conmutación de la llave S se compara una señal continua $d(t)$ con una señal diente de sierra, como muestra la Figura 10(a), y de esta comparación resulta la función de conmutación que llamamos $S_w(t)$, de encendido y apagado de la llave; como ilustra la Figura 10(b). Esta simulación se realizó con los siguientes parámetros: $L = 5\text{mH}$, $C = 200\mu\text{F}$, $R = 12\Omega$, $V_i = 7,5\text{V}$, $D = 0,5$. Esta función de conmutación puede ser escrita de la siguiente forma:

$$S_w(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \leq t_{on} \\ 0 & t_{on} < t \leq T_s \end{cases} \quad (101)$$

La señal $d(t)$, desde el punto de vista de control, es la señal de entrada $u(t)$ del sistema dinámico en cuestión. Esta señal puede sufrir pequeñas variaciones entorno al punto de operación (o valor de régimen estacionario) pero estas variaciones son muy lentas comparadas con la alta frecuencia de la señal diente de sierra. Esto último justifica que se pueda sustituir $d(t)$ por la función de conmutación $S_w(t)$. O sea que, $d(t)$ resulta en un valor promedio de $S_w(t)$ a lo largo de un periodo de conmutación T_s . En la Figura 10(c) se puede apreciar como varían la corriente en el inductor y la tensión en bornes del capacitor cuando se produce una variación del ciclo de trabajo. En esta simulación se produjo una variación exagerada de $d(t)$ (40%) para poder apreciar la influencia de la misma sobre las variables de estado.

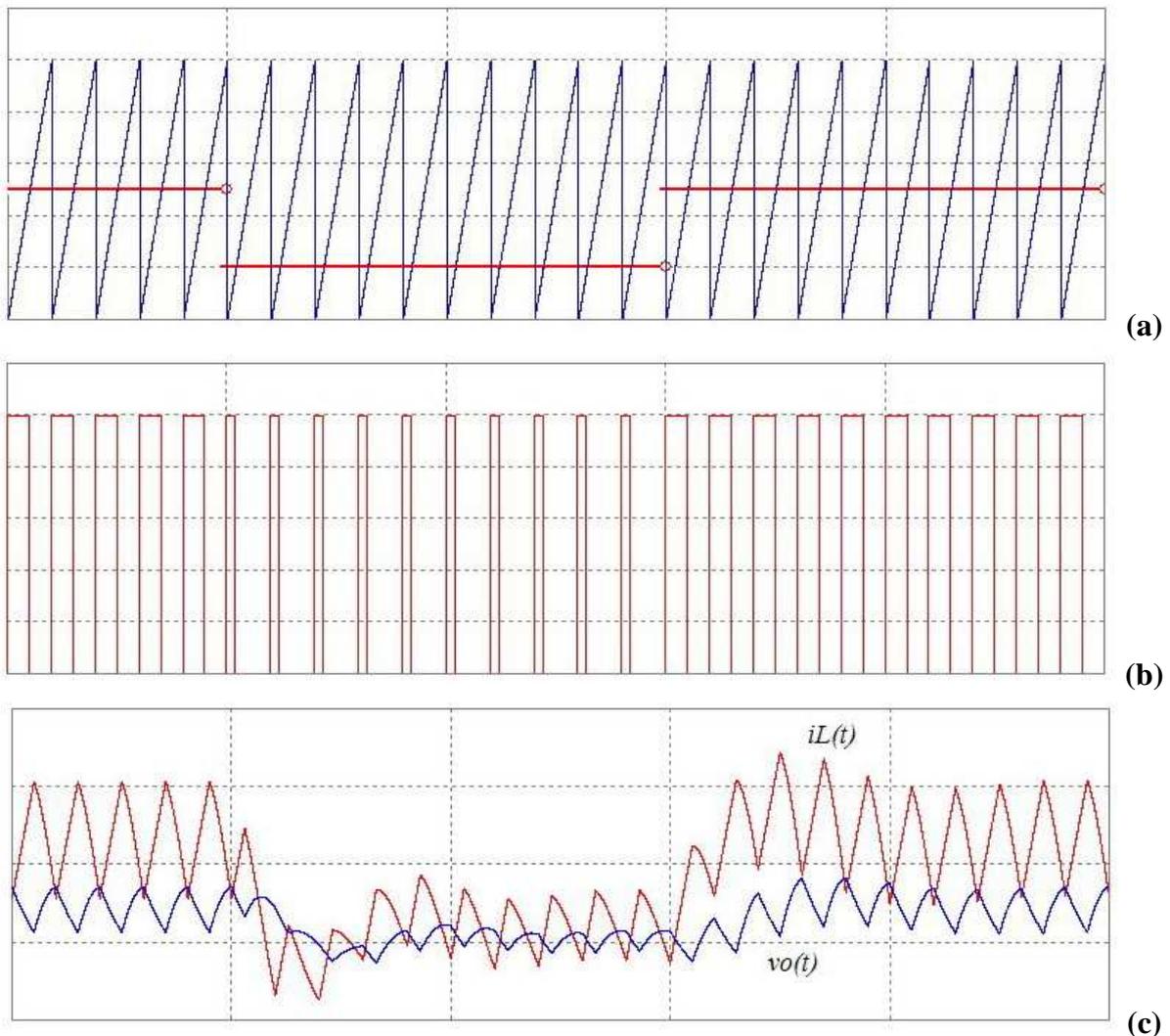


Figura 10 – Circuito elevador CC-CC. (a) Formas de onda de $d(t)$ (línea continua) y portadora de alta frecuencia (diente de sierra). (b) Función de conmutación $S_w(t)$. (c) Formas de onda de la corriente en el inductor y de la tensión sobre el capacitor.

En las ecuaciones de espacio de estado promediadas obtenidas en la (96) y la (97), es posible observar que el modelo de variables de estado resultante es no lineal debido a que aparecen multiplicaciones de variables de estado con la acción de control, dado que como dijimos más arriba, $d(t) = u(t)$. Con el objetivo de poder aplicar técnicas de control para sistemas lineales, se procederá a linealizar el modelo promedio obtenido. Pero antes de pasar a linealizar este modelo se presenta a continuación, una generalización del método de linealización para sistemas MIMO.

Sea un sistema MIMO no lineal representado por las siguientes ecuaciones de estado y de salida:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}), \quad \mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad (102)$$

o en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \\ \vdots \\ h_q(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \end{bmatrix}. \quad (103)$$

Una representación lineal de este sistema en torno a un punto de operación, dado por $\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{w}_0$ puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}} \Delta \mathbf{x} + \hat{\mathbf{B}} \Delta \mathbf{u} + \hat{\mathbf{E}} \Delta \mathbf{w}, \quad \Delta \mathbf{y} = \hat{\mathbf{C}} \Delta \mathbf{x} + \hat{\mathbf{D}} \Delta \mathbf{u} + \hat{\mathbf{F}} \Delta \mathbf{w}, \quad (104)$$

donde,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{x}}, & \hat{\mathbf{B}} &= \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{u}}, & \hat{\mathbf{E}} &= \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} \\ \hat{\mathbf{C}} &= \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{x}}, & \hat{\mathbf{D}} &= \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{u}}, & \hat{\mathbf{F}} &= \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} \end{aligned} \quad (105)$$

y las derivadas parciales que aparecen en la (105) son los coeficientes del desarrollo en serie de Taylor de las ecuaciones no lineales dadas en (102); siendo evaluadas estas derivadas en el punto de operación, o sea, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0, \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \mathbf{w} = \mathbf{w}_0$. Por otro lado $\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{u}, \Delta \mathbf{y}$ y $\Delta \mathbf{w}$ son los pequeños desvíos de $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}$ y \mathbf{w} en torno al punto de operación dado por $\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{w}_0$. Nótese que en estado estacionario se cumple que,

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0). \quad (106)$$

Entonces, para un valor dado de las entradas \mathbf{u}_0 y \mathbf{w}_0 , se encuentran fácilmente los valores de \mathbf{x}_0 que satisfacen la expresión anterior; y los valores de \mathbf{y}_0 se obtienen de:

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0). \quad (107)$$

Retomando nuestro modelo promediado de estado no lineal del convertidor elevador a partir de las ecuaciones (96) y (97), primero, para ser rigurosos en cuanto a la notación usada en control

substituimos la variable d por u y la fuente de tensión de entrada v_i por el correspondiente disturbio w . De esta forma las ecuaciones resultan:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{r_L(R+r_c)+Rr_c(1-u)}{L(R+r_c)}x_1 & -\frac{R}{L(R+r_c)}(1-u)x_2 & \frac{1}{L}w \\ \frac{R}{C(R+r_c)}(1-u)x_1 & -\frac{1}{C(R+r_c)}x_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \end{bmatrix} \quad (108)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{Rr_c}{R+r_c}(1-u)x_1 & \frac{R}{R+r_c}x_2 \end{bmatrix} = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad (109)$$

Aún más, para simplificar el problema a fin de presentar el procedimiento de linealización, despreciamos las resistencias equivalentes serie del inductor y del capacitor, o sea, $r_c = r_L = 0$ y de esta forma las últimas dos ecuaciones resultan:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{x_2}{L}(1-u) & \frac{1}{L}w \\ \frac{x_1}{C}(1-u) & -\frac{x_2}{RC} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \end{bmatrix} \quad (110)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & x_2 \end{bmatrix} = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad (111)$$

Ahora podemos obtener las matrices linealizadas dadas en (105), esto es:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0} \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0} \quad \hat{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial w} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0} \quad (112)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0}$$

El punto de operación o de estado estacionario está definido por las siguientes cantidades:

$$x_{1o} = I_L, \quad x_{2o} = V_o, \quad u_o = D, \quad w_o = V_i. \quad (113)$$

Aplicando la (112) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= 0, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= -\frac{(1-u)}{L}, & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= \frac{(1-u)}{C}, & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= -\frac{1}{RC} \\ \frac{\partial f_1}{\partial u} &= \frac{x_2}{L}, & \frac{\partial f_2}{\partial u} &= -\frac{x_1}{C}, & \frac{\partial f_1}{\partial w} &= \frac{1}{L}, & \frac{\partial f_2}{\partial w} &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x_1} &= 0, & \frac{\partial h}{\partial x_2} &= 1 \end{aligned}$$

Evaluando las derivadas anteriores en los valores dados por (113), nos quedan las siguientes matrices de estado linealizadas en torno al punto de operación:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{(1-D)}{L} \\ \frac{(1-D)}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \frac{V_o}{L} \\ -\frac{I_L}{C} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{C}} = [0 \quad 1] \quad (114)$$

Por otro lado $\Delta x_1 = x_1 - I_L = \hat{i}_L$, $\Delta x_2 = x_2 - V_o = \hat{v}_c$, $\Delta u = u - D = \hat{u}$, $\Delta y = y - V_o = \hat{v}_o$ y $\Delta w = w - V_i = \hat{v}_i$. Finalmente, la ecuación de estado linealizada resulta:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{(1-D)}{L} \\ \frac{(1-D)}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{i}_L \\ \hat{v}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_o}{L} \\ -\frac{I_L}{C} \end{bmatrix} \hat{u} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \hat{w} \quad (115)$$

y la ecuación de salida,

$$\hat{v}_o = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \hat{i}_L \\ \hat{v}_c \end{bmatrix}. \quad (116)$$

Note que el modelo lineal resultante dado en (115) tiene las matrices $\hat{\mathbf{A}}$ y $\hat{\mathbf{B}}$ que dependen del punto de operación. En este punto se cumple la ecuación (106), a partir de la cual se obtiene que:

$$V_i = V_o(1-D) \text{ e } I_L(1-D) = \frac{V_o}{R}. \quad (117)$$

Así, dadas la tensión de entrada V_i y el ciclo de trabajo D , se obtienen la tensión de salida V_o y la corriente de entrada I_L . Estas mismas expresiones pueden obtenerse haciendo $r_c = r_L = 0$ en las ecuaciones (99) y (100).

9.3 – Obtención de la función de transferencia de pequeña señal entrada-salida $\frac{\tilde{v}_o(s)}{\tilde{d}(s)}$ del convertidor elevador CC-CC conmutado

Para la obtención de las funciones de transferencia de pequeña señal, se introducen a las variables promediadas en función de d , dadas en las ecuaciones (93), (94) y (95), pequeñas perturbaciones alternadas en torno al punto de operación. Estas pequeñas perturbaciones estarán representadas por la tilde “~”. Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{X} + \tilde{\mathbf{x}}, \\ v_o &= V_o + \tilde{v}_o, \\ v_i &= V_i + \tilde{v}_i, \\ d &= D + \tilde{d} \end{aligned} \quad (118)$$

Las cantidades en mayúscula corresponden a los valores CC del punto de operación. Para simplificar nuestro análisis, asumimos que la perturbación en la tensión de entrada $\tilde{v}_i = 0$ y $v_i = V_i$.

Sabiendo que, de las ecuaciones (93), (94) y (95) se tiene,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= [\mathbf{A}_1 d + \mathbf{A}_2(1-d)]\mathbf{x} + [\mathbf{B}_1 d + \mathbf{B}_2(1-d)]v_i \\ v_o &= [\mathbf{C}_1 d + \mathbf{C}_2(1-d)]\mathbf{x}\end{aligned}\quad (119)$$

utilizando las (118) en estas últimas tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}} &= [(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)(D + \tilde{d}) + \mathbf{A}_2](\mathbf{X} + \tilde{\mathbf{x}}) + [(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)(D + \tilde{d}) + \mathbf{B}_2]V_i \\ \tilde{\mathbf{x}} &= [\mathbf{A}_1 D + \mathbf{A}_1 \tilde{d} - \mathbf{A}_2 D - \mathbf{A}_2 \tilde{d} + \mathbf{A}_2](\mathbf{X} + \tilde{\mathbf{x}}) + [\mathbf{B}_1 D + \mathbf{B}_1 \tilde{d} - \mathbf{B}_2 D - \mathbf{B}_2 \tilde{d} + \mathbf{B}_2]V_i \\ \tilde{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}_1 D \mathbf{X} + \mathbf{A}_1 \tilde{d} \mathbf{X} - \mathbf{A}_2 D \mathbf{X} - \mathbf{A}_2 \tilde{d} \mathbf{X} + \mathbf{A}_2 \mathbf{X}) + (\mathbf{A}_1 D \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_1 \tilde{d} \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{A}_2 D \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{A}_2 \tilde{d} \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_2 \tilde{\mathbf{x}}) + \\ &\quad + (\mathbf{B}_1 D V_i + \mathbf{B}_1 \tilde{d} V_i - \mathbf{B}_2 D V_i - \mathbf{B}_2 \tilde{d} V_i + \mathbf{B}_2 V_i)\end{aligned}\quad (120)$$

Agrupando términos y despreciando los productos de $\tilde{\mathbf{x}}$ y \tilde{d} , dado que son variaciones pequeñas, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}_1 D - \mathbf{A}_2 D + \mathbf{A}_2)\mathbf{X} + (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)\tilde{d} \mathbf{X} + (\mathbf{A}_1 D - \mathbf{A}_2 D + \mathbf{A}_2)\tilde{\mathbf{x}} + \\ &\quad + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)\tilde{d} V_i + (\mathbf{B}_1 D - \mathbf{B}_2 D + \mathbf{B}_2)V_i\end{aligned}\quad (121)$$

y finalmente,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}} &= [\mathbf{A}_1 D + \mathbf{A}_2(1-D)]\mathbf{X} + [\mathbf{B}_1 D + \mathbf{B}_2(1-D)]V_i + \\ &\quad + [\mathbf{A}_1 D + \mathbf{A}_2(1-D)]\tilde{\mathbf{x}} + [(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)\mathbf{X} + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)V_i]\tilde{d}\end{aligned}\quad (122)$$

donde,

$$\begin{aligned}\mathbb{A} &= \mathbf{A}_1 D + \mathbf{A}_2(1-D) \\ \mathbb{B} &= \mathbf{B}_1 D + \mathbf{B}_2(1-D)\end{aligned}\quad (123)$$

La (122) resulta

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbb{A} \mathbf{X} + \mathbb{B} V_i + \mathbb{A} \tilde{\mathbf{x}} + [(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)\mathbf{X} + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)V_i]\tilde{d}\quad (124)$$

Ahora, siendo

$$v_o = [\mathbf{C}_1 d + \mathbf{C}_2(1-d)]\mathbf{x}\quad (125)$$

se tiene que,

$$\begin{aligned}V_o + \tilde{v}_o &= [\mathbf{C}_1(D + \tilde{d}) + \mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_2(D + d)](\mathbf{X} + \tilde{\mathbf{x}}) \\ V_o + \tilde{v}_o &= (\mathbf{C}_1 D + \mathbf{C}_1 \tilde{d} + \mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_2 D - \mathbf{C}_2 \tilde{d})(\mathbf{X} + \tilde{\mathbf{x}}) \\ V_o + \tilde{v}_o &= \mathbf{C}_1 D \mathbf{X} + \mathbf{C}_1 \tilde{d} \mathbf{X} + \mathbf{C}_2 \mathbf{X} - \mathbf{C}_2 D \mathbf{X} - \mathbf{C}_2 \tilde{d} \mathbf{X} + \\ &\quad + \mathbf{C}_1 D \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_1 \tilde{d} \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_2 \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{C}_2 D \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{C}_2 \tilde{d} \tilde{\mathbf{x}}\end{aligned}\quad (126)$$

Agrupando términos y despreciando los productos de $\tilde{\mathbf{x}}$ y \tilde{d} , obtenemos:

$$V_o + \tilde{v}_o = [\mathbf{C}_1 D + \mathbf{C}_2(1-D)]\mathbf{X} + [\mathbf{C}_1 D + \mathbf{C}_2(1-D)]\tilde{\mathbf{x}} + [(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2)\mathbf{X}]\tilde{d}\quad (127)$$

donde, $\mathbb{C} = \mathbf{C}_1 D + \mathbf{C}_2(1-D)$

$$V_o + \tilde{v}_o = \mathbb{C} \mathbf{X} + \mathbb{C} \tilde{\mathbf{x}} + [(\mathbb{C}_1 - \mathbb{C}_2) \mathbf{X}] \tilde{d} \quad (128)$$

En régimen estacionario sabemos que las derivadas respecto al tiempo son nulas, por tanto, como visto en (98) se tiene que

$$\mathbb{A} \mathbf{X} + \mathbb{B} V_i = 0 \quad (129)$$

y en consecuencia la (124) resulta

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbb{A} \tilde{\mathbf{x}} + [(\mathbb{A}_1 - \mathbb{A}_2) \mathbf{X} + (\mathbb{B}_1 - \mathbb{B}_2) V_i] \tilde{d} \quad (130)$$

y también se tiene que

$$V_o = \mathbb{C} \mathbf{X} \quad (131)$$

y consecuentemente, la (128) queda:

$$\tilde{v}_o = \mathbb{C} \tilde{\mathbf{x}} + [(\mathbb{C}_1 - \mathbb{C}_2) \mathbf{X}] \tilde{d} . \quad (132)$$

Las ecuaciones (130) y (132) están formadas únicamente de las variables de pequeña señal, por lo que nos son útiles para hallar las funciones de transferencia de pequeña señal procuradas. A continuación, aplicando la transformada de Laplace con condiciones iniciales nulas a la ecuación (130) tenemos que:

$$s \tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbb{A} \tilde{\mathbf{x}}(s) + [(\mathbb{A}_1 - \mathbb{A}_2) \mathbf{X} + (\mathbb{B}_1 - \mathbb{B}_2) V_i] \tilde{d}(s) \quad (133)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(s) = [s \mathbf{I} - \mathbb{A}]^{-1} [(\mathbb{A}_1 - \mathbb{A}_2) \mathbf{X} + (\mathbb{B}_1 - \mathbb{B}_2) V_i] \tilde{d}(s) \quad (134)$$

Ahora, aplicando la transformada de Laplace con condiciones iniciales nulas a la ecuación (132) y sustituyendo $\tilde{\mathbf{x}}(s)$ de (134) tenemos,

$$\tilde{v}_o(s) = \mathbb{C} \tilde{\mathbf{x}}(s) + [(\mathbb{C}_1 - \mathbb{C}_2) \mathbf{X}] \tilde{d}(s) . \quad (135)$$

$$\tilde{v}_o(s) = \mathbb{C} [s \mathbf{I} - \mathbb{A}]^{-1} [(\mathbb{A}_1 - \mathbb{A}_2) \mathbf{X} + (\mathbb{B}_1 - \mathbb{B}_2) V_i] \tilde{d}(s) + [(\mathbb{C}_1 - \mathbb{C}_2) \mathbf{X}] \tilde{d}(s) . \quad (136)$$

$$\tilde{v}_o(s) = \{ \mathbb{C} [s \mathbf{I} - \mathbb{A}]^{-1} [(\mathbb{A}_1 - \mathbb{A}_2) \mathbf{X} + (\mathbb{B}_1 - \mathbb{B}_2) V_i] + [(\mathbb{C}_1 - \mathbb{C}_2) \mathbf{X}] \} \tilde{d}(s) . \quad (137)$$

$$\frac{\tilde{v}_o(s)}{\tilde{d}(s)} = \mathbb{C} [s \mathbf{I} - \mathbb{A}]^{-1} [(\mathbb{A}_1 - \mathbb{A}_2) \mathbf{X} + (\mathbb{B}_1 - \mathbb{B}_2) V_i] + (\mathbb{C}_1 - \mathbb{C}_2) \mathbf{X} . \quad (138)$$

De la ecuación (129) se obtiene:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} I_L \\ V_c \end{bmatrix} = -\mathbb{A}^{-1} \mathbb{B} V_i \quad (139)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} I_L \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(R + r_c) V_i}{r_L (R + r_c) + R r_c (1 - D) + R^2 (1 - D)^2} \\ \frac{(R + r_c) V_i (1 - D) R}{r_L (R + r_c) + R r_c (1 - D) + R^2 (1 - D)^2} \end{bmatrix} \quad (140)$$

y de la (131)

$$V_o = \mathbb{C} \mathbf{X} = \frac{(R + r_c)V_i(1 - D)R}{r_L(R + r_c) + Rr_c(1 - D) + R^2(1 - D)^2} \quad (141)$$

En la ecuación (138) llamamos $\mathbf{B}_{12} = [(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2)\mathbf{X} + (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)V_i]$ y $\mathbf{D}_{12} = (\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2)\mathbf{X}$.

Entonces, \mathbf{B}_{12} y \mathbf{D}_{12} , usando \mathbf{X} de la (140), resultan:

$$\mathbf{B}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{(RD^* + r_c)V_i R}{L[r_L(R + r_c) + Rr_cD^* + R^2D^{*2}]} \\ \frac{V_i R}{L[r_L(R + r_c) + Rr_cD^* + R^2D^{*2}]} \end{bmatrix} \quad (142)$$

$$\mathbf{D}_{12} = \frac{Rr_cV_i}{r_L(R + r_c) + Rr_cD^* + R^2D^{*2}} \quad (143)$$

donde, $D^* = 1 - D$. De esta forma la (138) puede expresarse en una forma reducida y ya conocida:

$$\frac{\tilde{v}_o(s)}{\tilde{d}(s)} = \mathbb{C}[s\mathbf{I} - \mathbb{A}]^{-1} \mathbf{B}_{12} + \mathbf{D}_{12}. \quad (144)$$

Aplicando esta última, se obtiene la función de transferencia de pequeña señal entre la señal de control y la tensión de salida, la cual tiene la siguiente forma:

$$\frac{\tilde{v}_o(s)}{\tilde{d}(s)} = k \frac{(s + a)(s + b)}{s^2 + cs + d} \quad (145)$$

De la misma forma en que se obtuvo la función de transferencia de pequeña señal entre la señal de control y la tensión de salida, puede obtenerse la función de transferencia de pequeña señal entre la tensión de entrada y la tensión de salida, considerando las pequeñas variaciones de v_i en torno al punto de operación, $v_i = V_i + \tilde{v}_i$ y teniendo en cuenta un ciclo de trabajo constante, $d = D$.

10. Ejemplo 5. Motor de corriente continua, controlado por la armadura.

Considere el motor de corriente continua de la Figura 11 que impulsa una carga a través de un eje rígido. Si la corriente de campo es mantenida constante en un valor I_f o el flujo de campo proviene de un imán permanente, esta máquina puede ser controlada únicamente por la tensión $v_a(t)$ aplicada a la armadura. En este caso, la ecuación del par de torsión eléctrico puede ser escrita como

$$T_e(t) = K_t i_a(t) \quad (146)$$

donde, $K_t = KI_f$ es una constante. Cuando el motor impulsa la carga, se desarrolla una fuerza contraelectromotriz en el circuito de armadura opuesta a la tensión aplicada $v_a(t)$. Esta tensión es linealmente proporcional a la velocidad angular desarrollada en el eje, o sea:

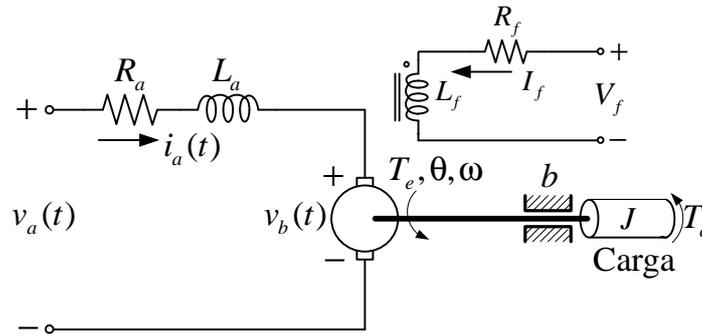


Figura 11 – Motor CC controlado por la corriente de armadura que impulsa una carga a través de un eje rígido.

$$v_b(t) = K_b \frac{d\theta(t)}{dt} \tag{147}$$

Aplicando la ley de Kirchoff de las tensiones a la malla del circuito de la armadura, se tiene:

$$v_a(t) = u(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + v_b(t) \tag{148}$$

y sustituyéndose (147) se obtiene la dinámica del circuito de armadura,

$$v_a(t) = u(t) = R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + K_b \frac{d\theta(t)}{dt} . \tag{149}$$

Sea J el momento de inercia total de la carga, el eje y el rotor del motor; θ el desplazamiento angular de la carga; b el coeficiente de rozamiento viscoso y T_c el par producido por la carga. El par que el motor debe desarrollar necesario para vencer la inercia, el rozamiento, y el par de reacción de la carga está dado por:

$$T_e(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + b \frac{d\theta(t)}{dt} + T_c \tag{150}$$

o también, usando la (146)

$$K_t i_a(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + b \frac{d\theta(t)}{dt} + T_c . \tag{151}$$

Elegimos como variables de estado de este sistema a $x_1 = i_a$ y $x_2 = \omega = \dot{\theta}$, implica que

$\dot{x}_1 = \frac{di_a}{dt}$ y $\dot{x}_2 = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$. De la ecuación (149) se tiene

$$\frac{di_a(t)}{dt} = -\frac{R_a}{L_a} i_a(t) - \frac{K_b}{L_a} \omega(t) + \frac{1}{L_a} u(t) . \tag{152}$$

De la ecuación (151) obtenemos:

$$\dot{\omega}(t) = \frac{K_t}{J} i_a(t) - \frac{b}{J} \omega(t) - \frac{1}{J} T_c . \tag{153}$$

La representación en variables de estado queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} \\ \frac{K_t}{J} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J} \end{bmatrix} T_c. \quad (154)$$

La ecuación de estado obtenida es del tipo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{E}w(t)$, donde $w(t)$ representa la perturbación provocada por la carga sobre el eje del motor.

A continuación vamos a considerar el mismo motor de corriente continua del caso anterior pero ahora impulsando una carga mediante un eje con una determinada elasticidad. En la Figura 12 se muestra este sistema donde la elasticidad del eje se modela mediante un resorte de torsión de elasticidad k . En este caso se debe considerar que existe una velocidad relativa del eje del motor respecto a la del eje de la carga y viceversa y considerar también por separado los pares producidos por el motor y la carga. Además, hay que tener en cuenta que existe un par de reacción producido por el eje elástico sobre el eje del motor y que se refleja sobre el eje de la carga, denominado T_{ee} en la Figura 12.

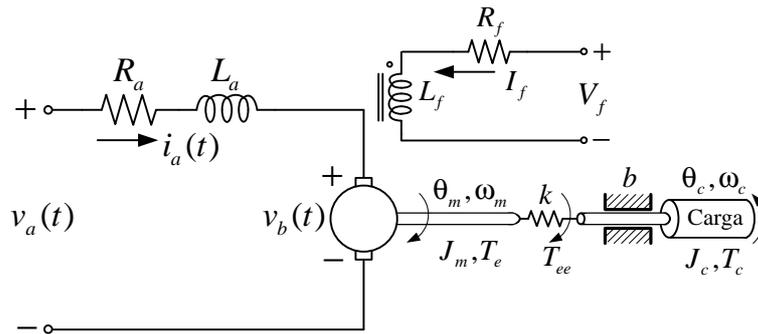


Figura 12 – Motor CC controlado por la corriente de armadura que impulsa una carga a través de un eje con una constante de elasticidad de torsión k .

Las ecuaciones dinámicas del motor están dadas entonces por:

$$v_a = u = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K_b \omega_m. \quad (155)$$

$$T_e = K_t i_a = J_m \dot{\omega}_m + T_{ee}. \quad (156)$$

Las ecuaciones dinámicas de la carga y del eje elástico están dadas por:

$$T_{ee} = J_c \dot{\omega}_c + b\omega_c + T_c. \quad (157)$$

$$T_{ee} = k(\theta_m - \theta_c). \quad (158)$$

Sea el estado del sistema formado por las siguientes variables de estado:

$$x_1 = \omega_m, x_2 = \omega_c, x_3 = T_{ee}, x_4 = i_a, \quad (159)$$

y, por tanto, $\dot{x}_1 = \dot{\omega}_m, \dot{x}_2 = \dot{\omega}_c, \dot{x}_3 = \dot{T}_{ee}, \dot{x}_4 = \dot{i}_a$.

De la ecuación (156) obtenemos \dot{x}_1 ,

$$\dot{\omega}_m = \frac{K_t}{J_m} i_a - \frac{1}{J_m} T_{ee}. \quad (160)$$

De la ecuación (157) obtenemos \dot{x}_2 ,

$$\dot{\omega}_c = -\frac{b}{J_c} \omega_c + \frac{1}{J_c} T_{ee} - \frac{1}{J_c} T_c. \quad (161)$$

De la ecuación (158) obtenemos \dot{x}_3 ,

$$\dot{T}_{ee} = k\omega_m - k\omega_c. \quad (162)$$

De la ecuación (155) obtenemos \dot{x}_4 ,

$$\dot{i}_a = -\frac{K_b}{L_a} \omega_m - \frac{R_a}{L_a} i_a + \frac{1}{L_a} u. \quad (163)$$

Con las últimas cuatro ecuaciones dinámicas podemos escribir la ecuación de espacio de estado de este sistema, como sigue:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_m \\ \dot{\omega}_c \\ \dot{T}_{ee} \\ \dot{i}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{J_m} & \frac{K_t}{J} \\ 0 & -\frac{b}{J_c} & \frac{1}{J_c} & 0 \\ k & -k & 0 & 0 \\ -\frac{K_b}{L_a} & 0 & 0 & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_m \\ \omega_c \\ T_{ee} \\ i_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_c} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} T_c. \quad (164)$$

11. Ejemplo 6. Sistema de amortiguación de un automóvil.

En el siguiente ejemplo se obtendrán las ecuaciones dinámicas lineales e invariantes en el tiempo del sistema de amortiguación de un automóvil. El modelo mecánico de este sistema es el que se muestra en la Figura 13. La masa del automóvil está representada por M y la masa del sistema de amortiguación está dada por m . Entre estas dos masas se encuentran un resorte con un coeficiente de elasticidad k_1 (conocidos por el nombre de “espiral” o “elásticos”) y un amortiguador con una constante de disipación b . Luego entre el sistema de amortiguación y el suelo existe un resorte de coeficiente de elasticidad k_2 que representa el efecto elástico producido por los neumáticos. La señal de entrada de este sistema está representada por u que corresponde a la fuerza ejercida por el automóvil sobre el sistema de amortiguación y del sistema de amortiguación sobre el automóvil. Las variables $x_1(t)$ y $x_2(t)$ representan las distancias entre el suelo y las masas M y m , respectivamente.

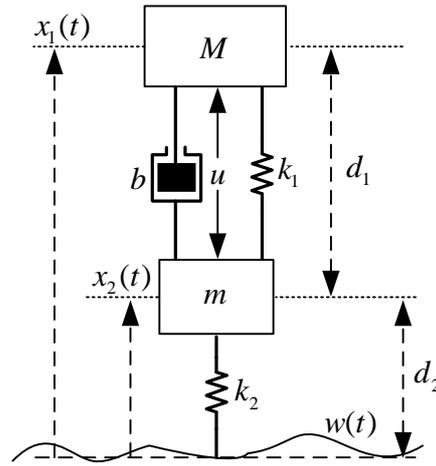


Figura 13 – Modelo mecánico del sistema de suspensión de un automóvil.

Las dimensiones d_1 y d_2 corresponden a las distancias entre ambas masas y entre la masa m y el suelo, respectivamente, con los resortes en reposo. Se observa además, que las imperfecciones del camino provocarán una compresión o descompresión del resorte k_2 , efecto que puede ser considerado como una perturbación externa, representado por un desplazamiento lineal en sentido vertical. Esta perturbación se denota por la variable $w(t)$. La aceleración de la gravedad está dada por g . Elegimos como variables de estado de este sistema a los desplazamientos verticales $x_1 = \delta_1$ y $x_2 = \delta_2$, y a las respectivas velocidades de las masas $\dot{x}_1 = \dot{\delta}_1 = v_M$ y $\dot{x}_2 = \dot{\delta}_2 = v_m$.

Planteando las ecuaciones de movimiento en base a la 2º ley de Newton, para cada masa respecto a sus posiciones de equilibrio, tenemos:

a: Para la masa M :

$$\ddot{x}_1 M + gM = u - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1(x_1 - x_2 - d_1). \tag{165}$$

b: Para la masa m :

$$\ddot{x}_2 m + gm = b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1(x_1 - x_2 - d_1) - k_2(x_2 - d_2 - w) - u. \tag{166}$$

En base a la selección de estados tenemos que:

$\dot{x}_1 = \dot{\delta}_1 = v_M$, $\dot{x}_2 = \dot{\delta}_2 = v_m$, $\ddot{x}_1 = \ddot{\delta}_1 = \dot{v}_M$, $\ddot{x}_2 = \ddot{\delta}_2 = \dot{v}_m$. Distribuyendo términos en las ecuaciones (165) y (166) tenemos

$$\ddot{x}_1 = \dot{v}_M = \frac{u}{M} - \frac{b}{M} v_M + \frac{b}{M} v_m - \frac{k_1}{M} \delta_1 + \frac{k_1}{M} \delta_2 + \frac{k_1}{M} d_1 - g. \tag{167}$$

$$\ddot{x}_2 = \dot{v}_m = \frac{b}{m} v_M - \frac{b}{m} v_m + \frac{k_1}{m} \delta_1 - \frac{k_1}{m} \delta_2 - \frac{k_1}{m} d_1 - \frac{k_2}{m} \delta_2 + \frac{k_2}{m} d_2 + \frac{k_2}{m} w - \frac{u}{m} - g. \tag{168}$$

La representación matricial de este sistema resulta en el modelo LIT buscado, descrito por la ecuación (169):

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \\ \dot{v}_M \\ \dot{v}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{M} & \frac{k_1}{M} & -\frac{b}{M} & \frac{b}{M} \\ \frac{k_1}{m} & -\frac{(k_1+k_2)}{m} & \frac{b}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ v_M \\ v_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ -\frac{1}{m} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_2}{m} \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k_1 d_1}{M} - g \\ \frac{k_2 d_2}{m} - \frac{k_1 d_1}{m} - g \end{bmatrix}. \quad (169)$$

12. Ejemplo 7. Conversor CC-CA PWM con filtro pasa bajas LC.

A continuación presentaremos un caso de modelo de un sistema dinámico en el espacio de estado, donde las variables de estado son escogidas por una necesidad matemática, como comentado en la sección 5. Sea el conversor CC-CA mostrado en la Figura 14, el cual convierte una tensión de corriente continua V_{cc} en una tensión alternada senoidal utilizando un convertidor en puente completa, en el cual el ciclo de trabajo de los semiconductores está modulado por una onda senoidal de amplitud y frecuencia constantes, como se muestra en la Figura 15.

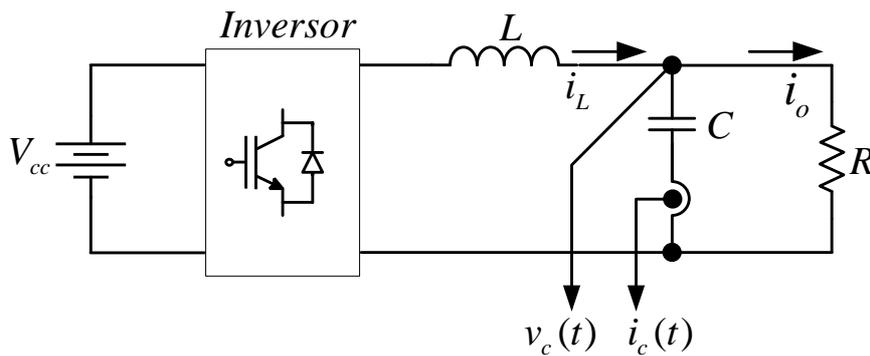


Figura 14 – Conversor CC-CA con filtro pasa bajas LC de salida y carga resistiva.

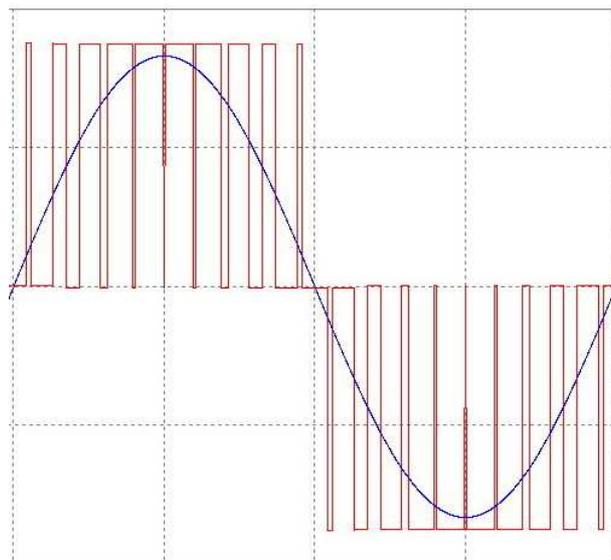


Figura 15 – Señal PWM generada por el actuador y señal de modulación senoidal.

Es común que este sistema opere en lazo cerrado con el objetivo de mantener una tensión eficaz y frecuencia constantes frente a variaciones de carga, así como también proveer al sistema de una sensibilidad menor a los disturbios de carga.

Debido a que la forma de onda de la tensión de salida deseada es senoidal, se necesita que el controlador a proyectar, siga o rastree una referencia que es variable en el tiempo, o sea $r(t) = V \sin(\omega t)$, donde $\omega = 2\pi f$, y f es la frecuencia deseada de la tensión sintetizada por el convertidor. Si se desea utilizar un controlador convencional, tal como un proporcional-integral, que resulta de fácil implementación práctica, este presentará un error finito en régimen permanente diferente de cero debido a la naturaleza variable de la señal de referencia. Entonces, dado que un PI presenta error nulo en régimen permanente con entradas constantes, es deseable que la referencia del sistema de control sea, para el caso en cuestión, una tensión continua.

En sistemas trifásicos y especialmente en el caso de máquinas de inducción trifásicas, es común transformar las tensiones y corrientes alternadas (referencial estacionario) a un sistema de coordenadas en sincronismo con la frecuencia fundamental de las tensiones o corrientes CA (referencial sincrónico). Esta transformación se realiza transformando el sistema estacionario trifásico abc a un sistema bifásico estacionario ortogonal $\alpha\beta$, de magnitudes alternadas, y luego se transforma este último al sistema de coordenadas sincrónico, cuyas magnitudes resultan continuas respecto al sistema trifásico original.

En el caso que estamos tratando, es posible encontrar una transformación lineal que permita obtener un referencial sincronizado con la frecuencia de la tensión generada, utilizando como referencial bifásico $\alpha\beta$ a la corriente y la tensión en el capacitor del filtro de salida, dado que estas dos magnitudes están naturalmente desfasadas 90° eléctricos, como se muestra en la Figura 16, mediante las formas de onda en el tiempo y vectorialmente en la Figura 17(a).

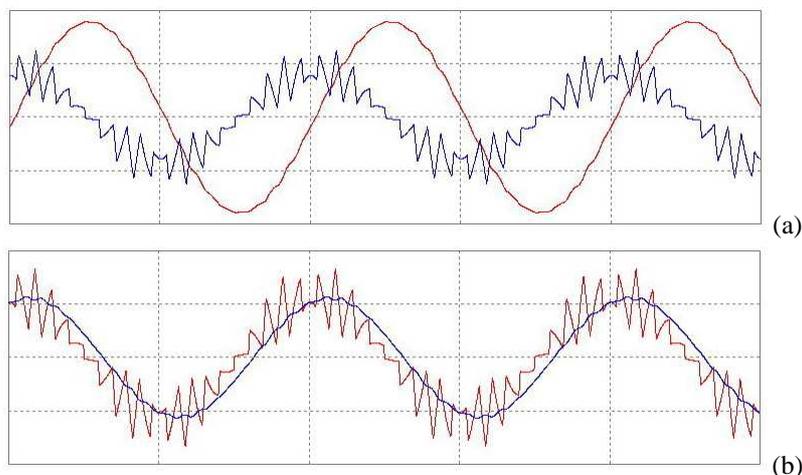


Figura 16 – (a) Tensión y corriente real en el capacitor. (b) Corriente en el capacitor, real y filtrada (filtro pasa bajas en 250Hz y $\xi = 0,7$).

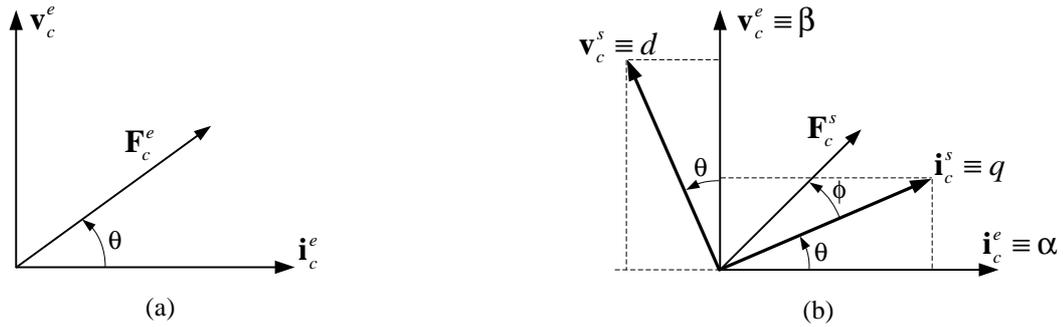


Figura 17 – (a) Vectores representativos de la corriente y tensión en el capacitor en el sistema de coordenadas estacionario. (b) Referenciales estacionario $\begin{bmatrix} i_c^e & v_c^e \end{bmatrix}^T$ y sincrónico $\begin{bmatrix} i_c^s & v_c^s \end{bmatrix}^T$.

El vector compuesto, en el referencial estacionario, dado por $\mathbf{F}_c^e = \begin{bmatrix} i_c^e & v_c^e \end{bmatrix}^T$ y mostrado en la Figura 17(a), describe un movimiento circular en sentido antihorario con $\theta = \omega t$ y con módulo definido por los módulos de i_c^e y v_c^e . En este caso, este vector compuesto describe en el tiempo una forma de onda senoidal (o cosenoidal), cuando la tensión en el capacitor es $v_c(t) = V_c \sin(\omega t)$ por lo cual, la corriente requerida por el capacitor es $i_c(t) = \omega C V_c \cos(\omega t)$.

Basado en el vector \mathbf{F}_c^e es posible efectuar un cambio de variables definiéndose un nuevo referencial ortogonal dq que gira a la velocidad de sincronismo ω , o sea, a la velocidad del vector \mathbf{F}_c^e . El vector \mathbf{F}_c^s en la Figura 17(b) representa el vector compuesto referido al sistema de coordenadas sincrónicas, y este vector está formado por las componentes en ejes sincrónicos de la tensión v_c^s y de la corriente i_c^s en el capacitor. O sea:

$$\mathbf{F}_c^s = \begin{bmatrix} i_c^s \\ v_c^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega C V_c^s \cos(\phi) \\ V_c^s \sin(\phi) \end{bmatrix} \tag{170}$$

Dado que ϕ es un ángulo arbitrario y constante, las componentes i_c^s y v_c^s , en coordenadas sincrónicas, son ahora constantes, dado que el vector \mathbf{F}_c^s se mueve juntamente con el nuevo referencial dq .

Sin olvidar el factor de escala entre la corriente y la tensión del capacitor, o sea $X_c = 1/\omega C$, la corriente y tensión en el referencial estacionario pueden ser rotadas al referencial sincrónico y observando la Figura 17(b), mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} i_c^s(t) &= i_c^e(t) \cos(\theta) + v_c^e(t) \omega C \sin(\theta) \\ v_c^s(t) &= -\frac{i_c^e(t)}{\omega C} \sin(\theta) + v_c^e(t) \cos(\theta) \end{aligned} \tag{171}$$

o en forma matricial

$$\begin{bmatrix} i_c^s \\ v_c^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \omega C \sin(\theta) \\ -\frac{\sin(\theta)}{\omega C} & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_c^e \\ v_c^e \end{bmatrix} = \mathbf{T}(\theta) \begin{bmatrix} i_c^e \\ v_c^e \end{bmatrix} \quad (172)$$

De forma similar, si se desea obtener la representación de las variables en el sistema de coordenadas estacionarias a partir de las variables en el referencial sincrónico, se tiene

$$\begin{bmatrix} i_c^e \\ v_c^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\omega C \sin(\theta) \\ \frac{\sin(\theta)}{\omega C} & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_c^s \\ v_c^s \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1}(\theta) \begin{bmatrix} i_c^s \\ v_c^s \end{bmatrix}. \quad (173)$$

En la Figura 19 se muestra el resultado de las variables en el referencial sincrónico al aplicar la (172) a las variables en el referencial estacionario de la Figura 18. Observe que, debido a la forma que se eligieron los ejes ortogonales $\alpha\beta$ la tensión en ejes sincrónicos resulta igual a cero.

Estos resultados nos demuestran que ahora las variables a controlar son constantes. Desde el punto de vista de control esto nos posibilita transformar un problema de rastreo o seguimiento de una referencia senoidal en un problema de regulación de una referencia constante, lo que permite utilizar controladores más simples como, por ejemplo un PI. Por otro lado, también es posible, si se desea, efectuar una realimentación de los estados, combinada con el PI. En este caso necesitamos tener la ecuación de estado de la planta para poder luego efectuar el proyecto de las ganancias de realimentación, técnica que será vista posteriormente.

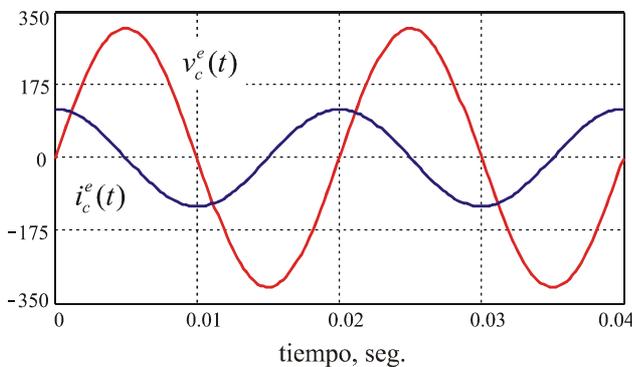


Figura 18 – Tensión y corriente en el capacitor en el referencial estacionario.
 $V_c = 311V$, $\omega = 314\text{rad/seg}$ y $C = 120\mu\text{F}$.

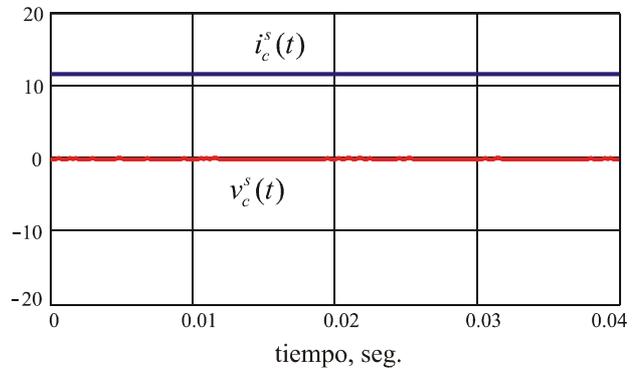


Figura 19 – Tensión y corriente en el capacitor en el referencial sincrónico.
 $V_c = 311V$, $\omega = 314\text{rad/seg}$ y $C = 120\mu\text{F}$.

La ecuación de espacio de estado, considerando como variables de estado a la tensión en el capacitor y su propia corriente es obtenido a seguir: $x_1 = i_c$, $x_2 = v_c$, $\dot{x}_1 = \frac{di_c}{dt}$, $\dot{x}_2 = \frac{dv_c}{dt}$.

$$u = L \frac{di_L}{dt} + v_c, \quad (174)$$

$$i_L = i_c + i_o, \quad (175)$$

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt}, \quad (176)$$

$$i_o = \frac{v_c}{R}, \quad (177)$$

de (174)

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}u - \frac{1}{L}v_c, \quad (178)$$

de (175)

$$\frac{di_c}{dt} = \frac{di_L}{dt} - \frac{di_o}{dt}, \quad (179)$$

sustituyendo (178) en (179) y sabiendo que $\frac{di_o}{dt} = \frac{1}{R} \frac{dv_c}{dt}$, tenemos

$$\frac{di_c}{dt} = \frac{1}{L}u - \frac{1}{L}v_c - \frac{1}{R} \frac{dv_c}{dt}, \quad (180)$$

por otro lado, de (176) se tiene que $\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}i_c$ y la (180) queda

$$\frac{di_c}{dt} = \frac{1}{L}u - \frac{1}{L}v_c - \frac{1}{RC}i_c, \quad (181)$$

que junto con

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}i_c \quad (182)$$

nos queda el siguiente conjunto de ecuaciones dinámicas:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = \dot{i}_c &= \frac{1}{L}u - \frac{1}{L}v_c - \frac{1}{RC}i_c, \\ \dot{x}_2 = \dot{v}_c &= \frac{1}{C}i_c, \end{aligned} \quad (183)$$

y en forma matricial queda expresada la ecuación de estado como sigue:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_c \\ \dot{v}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_c \\ v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad (184)$$

y la ecuación de salida

$$y = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} i_c \\ v_c \end{bmatrix}, \quad (185)$$

13. Ejemplo 8. Conversor CC-CA PWM con filtro pasa bajas LC.

A continuación presentaremos un modelo de espacio de estado del convertor CC-CA PWM como el de la Figura 14, pero en este caso consideraremos que la carga que se conecta a la salida puede ser de cualquier tipo, esto es, resistiva, inductiva, capacitiva, no lineal, entre otras; y esta carga será considerada como una fuente de corriente alterna que drena una corriente i_o . Las ecuaciones (174), (175) y (176) son las ecuaciones de partida. Los estados serán

$x_1 = v_c$, $x_2 = i_L$, $\dot{x}_1 = \frac{dv_c}{dt}$, $\dot{x}_2 = \frac{di_L}{dt}$. De la ecuación (174)

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}u - \frac{1}{L}v_c, \quad (186)$$

de la (175) y (176) se tiene

$$\frac{dv_c}{dt} = \frac{1}{C}i_L - \frac{1}{C}i_o, \quad (187)$$

y la ecuación de estado resulta

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_c \\ \dot{i}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} i_o, \quad (188)$$

La ecuación (188) resultó como la presentada en (27), o sea $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t) + \mathbf{E} w(t)$, y la ecuación de salida es

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_c \\ i_L \end{bmatrix}. \quad (189)$$

De acuerdo a la ecuación obtenida en (32) este sistema tendrá una salida que dependerá del efecto de la entrada y del disturbio, desconsiderando las condiciones iniciales, o sea:

$$Y(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}] U(s) + [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{E}] W(s). \quad (190)$$

y resulta:

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 LC + 1} U(s) - \frac{sL}{s^2 LC + 1} W(s). \quad (191)$$

14. Referencias Bibliográficas

- [1] – Ingeniería de Control Moderna, Katsuhiko Ogata, 3° Edición, Prentice Hall, 1997.
- [2] – Sistemas de Control Automático, Benjamín C. Kuo, 7° Edición, Prentice Hall, 1996.
- [3] – Feedback Control Systems, Charles L. Phillips and Royce D. Harbor, 4th Edition, Prentice Hall, 2000.
- [4] – Feedback Control of Dynamic Systems, Gene F. Franklin, J. David Powell and Abbas Emami-Naenini, 3rd Edition, Addison Wesley, 1995.