Solución de la Ecuación de Espacio de Estado LIT. Controlabilidad y Observabilidad

1. Introducción

En este apunte se presentará la solución de la ecuación de espacio de estado lineal e invariante en el tiempo, considerándose primero la solución de la ecuación homogénea y luego la solución de la ecuación no homogénea. Estas soluciones se presentaran tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia.

2. Solución de la ecuación de estado homogénea. Dominio del tiempo.

Antes de obtener la solución de la ecuación diferencial matricial revisaremos la solución de la ecuación diferencial escalar:

Sea

$$\dot{x} = ax \tag{1}$$

Una solución para (1) puede ser dada por la siguiente combinación lineal:

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \ldots + b_k t^k + \ldots \tag{2}$$

Utilizando esta solución en (1) tenemos que:

$$\dot{x}(t) = b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \ldots + kb_k t^{k-1} + \ldots \tag{3}$$

Usando (1) y (2) e igualando a la (3):

$$\begin{aligned} b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \ldots + kb_k t^{k-1} + \ldots = \\ = ab_0 + ab_1 t + ab_2 t^2 + \ldots + ab_k t^k + \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

Asumiendo que la solución elegida es la solución verdadera para (1) para todo instante de tiempo *t*, igualamos los coeficientes en (4) de las mismas potencias en *t*, o sea:

$$\begin{aligned} b_1 &= ab_0 \\ b_2 &= \frac{1}{2} ab_1 = \frac{1}{2} a^2 b_0 \\ b_3 &= \frac{1}{3} ab_2 = \frac{1}{3 \cdot 2} a^3 b_0 \\ b_4 &= \frac{1}{4} ab_3 = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} a^4 b_0 \\ &\vdots \\ b_k &= \frac{1}{k!} a^k b_0 \end{aligned} \tag{5}$$

El valor de b_0 se determina a partir de las condiciones iniciales haciendo t = 0 en la ecuación (2), o sea, $x(0) = b_0$. Así, obtenidos los coeficientes, podemos escribir la solución de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + ax(0)t + \frac{1}{2!}a^2x(0)t^2 + \frac{1}{3!}a^3x(0)t^3 + \ldots + \frac{1}{k!}a^kx(0)t^k + \ldots \\ x(t) &= \left(1 + at + \frac{1}{2!}a^2t^2 + \frac{1}{3!}a^3t^3 + \ldots + \frac{1}{k!}a^kt^k + \ldots\right)x(0) \end{aligned} \tag{6}$$

Es bien conocido que el desarrollo en serie de Taylor de la función exponencial $e^t = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k$, por tanto, el factor entre paréntesis del lado derecho de la ecuación (6) es el desarrollo en serie de Taylor de la función exponencial $e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}a^kt^k$, y la (6) resulta:

$$x(t) = e^{at}x(0) \tag{7}$$

Utilizando el mismo procedimiento hasta aquí presentado puede obtenerse la solución para la ecuación diferencial homogénea matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{8}$$

donde, **x** es un vector columna de dimensión n y **A** una matriz cuadrada con elementos constantes de dimensión n x n. Por analogía, podemos asumir que la solución propuesta para (8) puede ser escrita en la forma de una serie de potencia vectorial:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1t + \mathbf{b}_2t^2 + \mathbf{b}_3t^3 + \ldots + \mathbf{b}_kt^k + \ldots, \tag{9}$$

donde **b** es un vector de dimensión n. Utilizando (8) y (9) tenemos:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2t + 3\mathbf{b}_3t^2 + \ldots + k\mathbf{b}_kt^{k-1} + \ldots = \mathbf{A}\mathbf{b}_0 + \mathbf{A}\mathbf{b}_1t + \mathbf{A}\mathbf{b}_2t^2 + \ldots + \mathbf{A}\mathbf{b}_kt^k + \ldots, \tag{10}$$

Igualando los coeficientes de igual potencia en t a ambos lados de (10) tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_2 &= \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_3 &= \frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{b}_2 = \frac{1}{3\cdot 2}\mathbf{A}^3\mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_4 &= \frac{1}{4}\mathbf{A}\mathbf{b}_3 = \frac{1}{4\cdot 3\cdot 2}\mathbf{A}^4\mathbf{b}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{b}_k &= \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\mathbf{b}_0 \end{aligned} \tag{11}$$

Por otro lado sabemos que en t = 0 se cumple que $\mathbf{x}(0) = \mathbf{b}_0$. Obtenidos los coeficientes $\mathbf{b}_k$, la solución de la (8) resulta:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{x}(0)t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2\mathbf{x}(0)t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3\mathbf{x}(0)t^3 + \ldots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\mathbf{x}(0)t^k + \ldots ,$$
$$\mathbf{x}(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 + \ldots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \ldots\right)\mathbf{x}(0) \tag{12}$$
$$\mathbf{x}(t) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 + \ldots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \ldots\right)\mathbf{x}(0)$$

y finalmente

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) . \tag{13}$$

Esta última es la solución de la ecuación diferencial matricial lineal de primer orden homogénea (8), también llamada “respuesta natural” o “respuesta con entrada cero”. En (13), se tiene que,

$$e^{\mathbf{A}t} = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 + \ldots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^kt^k + \ldots\right). \tag{14}$$

Se observa en esta última una posible solución a la matriz de función $e^{\mathbf{A}t}$, la cual se puede obtener evaluando algunos términos de la serie (para cualquier instante t finito), calculados a través de un programa de computadora. Esta solución es útil en el dominio de tiempo discreto cuando se usa un periodo de discretización constante $t = T$. En este caso, si el periodo seleccionado es suficientemente pequeño comparado con el periodo de la señal a muestrear, los términos de la serie a partir del termino de 2° orden pueden ser despreciados, y $e^{\mathbf{A}T} = \mathbf{I} + \mathbf{A}T$ es una muy buena aproximación para la solución de $e^{\mathbf{A}t}$.

3. Solución de la ecuación de estado no homogénea. Dominio del tiempo.

Comenzaremos nuevamente analizando el caso escalar, donde la ecuación diferencial de primer orden, lineal e invariante en el tiempo, es dada por:

$$\dot{x} = ax + bu \tag{15}$$

reescribiendo esta última de la siguiente forma:

$$\dot{x} - ax = bu \tag{16}$$

a continuación, multiplicamos ambos lados de la (16) por e^{-at},

$$e^{-at}(\dot{x} - ax) = e^{-at}bu \tag{17}$$

Si derivamos por la regla de la cadena a

$$\frac{d}{dt}[e^{-at}x(t)] = -ae^{-at}x(t) + e^{-at}\dot{x}(t) \tag{18}$$

significa que el lado izquierdo de la (17) es igual a $\frac{d}{dt}[e^{-at}x(t)]$, así, se tiene que:

$$\frac{d}{dt}[e^{-at}x(t)] = e^{-at}bu \tag{19}$$

integrando esta última ecuación entre 0 y *t*, obtenemos:

$$\int_0^t \frac{d}{dt}[e^{-at}x(t)] = \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau \tag{20}$$

$$e^{-at}x(t)\Big|_0^t = e^{-at}x(t) - e^0 x(0) = \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau \tag{21}$$

$$e^{-at}x(t) = x(0) + \int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau \tag{22}$$

Finalmente, la solución de la ecuación (15) resulta:

$$x(t) = \underbrace{e^{at}x(0)}_{\substack{\text{respuesta a los estados} \\ u(t)=0}} + \underbrace{e^{at}\int_0^t e^{-a\tau}bu(\tau)d\tau}_{\substack{\text{respuesta a la entrada} \\ x(t)=0}} \tag{23}$$

Por analogía con el caso escalar obtendremos la solución a la ecuación de estado lineal e invariante en el tiempo, no homogénea dada por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{24}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \tag{25}$$

Analizaremos el caso general donde, **x**, **u** e **y** son vectores columna de dimensión *n*, *r*, y *q*, respectivamente y **A**, **B**, **C** y **D** son matrices de dimensión *n* x *n*, *n* x *r*, *q* x *n* y *q* x *r*, respectivamente.

Reescribiendo la (24) como sigue

$$\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{26}$$

y premultiplicando ambos miembros de esta última ecuación por la matriz de funciones $e^{-\mathbf{A}t}$,

$$e^{-\mathbf{A}t}(\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}\mathbf{x}) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u} \tag{27}$$

y sabiendo ya que,

$$e^{-\mathbf{A}t}[\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)] = \frac{d}{dt}[e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)] \tag{28}$$

se tiene,

$$\frac{d}{dt}[e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)] = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{29}$$

Integrando la última ecuación entre 0 y *t* tenemos que:

$$\int_0^t \frac{d}{dt}[e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)] = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{30}$$

$$\begin{aligned} e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{0}}\mathbf{x}(0) &= \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) - \mathbf{I}\mathbf{x}(0) &= \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \end{aligned} \tag{31}$$

Premultiplicando a ambos lados de la última ecuación por $e^{\mathbf{A}t}$

$$e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{32}$$

y siendo: $e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}(t-t)} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)}_{\substack{\text{respuesta a los estados} \\ \mathbf{u}(t)=0}} + \underbrace{\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau}_{\substack{\text{respuesta a la entrada} \\ \mathbf{x}(t)=0}} \tag{33}$$

La matriz $e^{\mathbf{A}t}$ se denomina "Matriz Transición de Estados" y se la denota comúnmente por $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$. Por lo tanto, se puede escribir la solución de la ecuación de estado homogénea, como sigue:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}(0) \tag{34}$$

donde $\mathbf{\Phi}(t)$ es la única solución de la ecuación diferencial lineal homogénea,

$$\dot{\mathbf{\Phi}}(t) = \mathbf{A\Phi}(t) \tag{35}$$

Observando la ecuación (34) el significado físico de la matriz $\mathbf{\Phi}(t)$ es muy claro. La misma gobierna las trayectorias de los estados en un intervalo de tiempo en el cual la entrada es igual a cero. También se puede expresar que $\mathbf{\Phi}(t)$ es una transformación lineal que mapea el vector de estado $\mathbf{x}(0)$ en t_0 en el vector de estado $\mathbf{x}(t)$ en t.

Propiedades de la matriz transición de estado:

1. $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$
2. $\mathbf{\Phi}^{-1}(t) = \mathbf{\Phi}(-t)$
3. $\mathbf{\Phi}(t,\tau) = e^{\mathbf{A}(t-\tau)}$
4. $\mathbf{\Phi}(t)^n = \mathbf{\Phi}(nt)$
5. $\mathbf{\Phi}(t+t_0) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(t_0) = \mathbf{\Phi}(t_0)\mathbf{\Phi}(t)$
6. $\mathbf{\Phi}(t-t_1)\mathbf{\Phi}(t_1-t_0) = \mathbf{\Phi}(t-t_0)$

A continuación vamos a probar que la (33) es una solución de la (24). Esto es: haciendo la derivada primera respecto de t, de la (33) se tiene:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{d}{dt}\left[e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau\right] \\
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \underbrace{\frac{d}{dt}\left[e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau\right]}_{\text{regla de la cadena}} \\
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau + e^{\mathbf{A}t}\left[e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{Bu}(\tau)\right]_{t=\tau} \\
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\left[e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau\right] + \underbrace{e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t}}_{\mathbf{I}}\mathbf{Bu}(t) \\
\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t)
\end{aligned} \tag{36}$$

Al final de la (36) se demuestra que se obtuvo la ecuación diferencial matricial de la cual se partió para obtener la solución (33). Finalmente, sustituyéndose la (33) en la (25) se puede calcular la respuesta del sistema para el vector de estado solución, esto es:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau + \mathbf{Du}(t) \tag{37}$$

Si $\mathbf{u}(t) = 0$, se obtiene la respuesta para el conjunto de condiciones iniciales, o sea:

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \tag{38}$$

4. Solución de la ecuación de estado no homogénea. Dominio de la frecuencia.

Consideremos nuevamente el sistema dinámico LIT dado por las ecuaciones (24) y (25). Nos interesa conocer la respuesta o salida del sistema **y**(t) para una determinada entrada **u**(t) y un conjunto de condiciones iniciales dadas **x**(0).

Aplicamos entonces la transformada de Laplace a ambos lados de las ecuaciones (24) y (25):

$$s\mathbf{X}(s)-\mathbf{X}(0)=\mathbf{A}\mathbf{X}(s)+\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{39}$$

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{C}\mathbf{X}(s)+\mathbf{D}\mathbf{U}(s) \tag{40}$$

Factorizando **X**(s) en la (39)

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{X}(s)=\mathbf{X}(0)+\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{41}$$

multiplicando por la izquierda ambos miembros de esta última ecuación por $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$

$$\underbrace{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}_{\mathbf{I}}\mathbf{X}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}(0)+(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{42}$$

$$\mathbf{X}(s)=\underbrace{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}(0)}_{\substack{\text{respuesta a los estados}\\ \mathbf{U}(s)=0}}+\underbrace{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)}_{\substack{\text{respuesta a la entrada}\\ \mathbf{X}(0)=0}} \tag{43}$$

sustituyéndose **X**(s) en la (40), tendremos

$$\mathbf{Y}(s)=\underbrace{\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{X}(0)}_{\substack{\text{salida con }\mathbf{X}(0)\neq 0\\ y\ \mathbf{U}(s)=0}}+\underbrace{\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)+\mathbf{D}\mathbf{U}(s)}_{\substack{\text{salida con }\mathbf{U}(s)\neq 0\\ y\ \mathbf{X}(0)=0}} \tag{44}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a las ecuaciones (43) y (44) se obtiene la solución de la ecuación de estado **x**(t) y la respuesta en el tiempo **y**(t).

Se observa en la (43) que para **U**(s) = 0, y comparando con la ecuación (13), resulta que:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\right]=e^{\mathbf{A}t} \tag{45}$$

De esta forma, se pueden expresar las ecuaciones (43) y (44) de la siguiente forma:

$$\mathbf{X}(s)=\mathcal{L}(e^{\mathbf{A}t})\mathbf{X}(0)+\mathcal{L}(e^{\mathbf{A}t})\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{46}$$

$$\mathbf{Y}(s)=\mathbf{C}\mathcal{L}(e^{\mathbf{A}t})\mathbf{X}(0)+\mathbf{C}\mathcal{L}(e^{\mathbf{A}t})\mathbf{B}\mathbf{U}(s)+\mathbf{D}\mathbf{U}(s) \tag{47}$$

Vamos a demostrar a continuación que $\mathcal{L}(e^{\mathbf{A}t})=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$:

Vimos anteriormente que la expansión en serie de potencias de $e^{\mathbf{A}t}$ está dada por:

$$e^{\mathbf{A}t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k \tag{48}$$

La transformada de Laplace de $t^k/k!$ es dada por

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^k}{k!}\right]=\frac{1}{s^{(k+1)}}=s^{-(k+1)} \tag{49}$$

Tomando la transformada de Laplace de (48) se tiene:

$$\mathcal{L}\,(e^{\mathbf{A}t})=\sum_{k=0}^{\infty}s^{-(k+1)}\mathbf{A}^k=s^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(s^{-1}\mathbf{A})^k \tag{50}$$

Por otro lado, es bien conocido que la expansión en serie de Taylor de

$$f(\lambda)=(1-\lambda)^{-1}=1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k \tag{51}$$

la cual converge para todo $|\lambda|<1$. Si s es elegido lo suficientemente grande, los valores absolutos de los autovalores de $s^{-1}\mathbf{A}$ son menores que 1. De esta forma se tiene, de (50) y (51) que $\lambda=s^{-1}\mathbf{A}$.

Por lo tanto, se tiene de (51) que:

$$f(s^{-1}\mathbf{A})=(\mathbf{I}-s^{-1}\mathbf{A})^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(s^{-1}\mathbf{A})^k \tag{52}$$

así, de la ecuación (50)

$$\mathcal{L}\,(e^{\mathbf{A}t})=s^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}(s^{-1}\mathbf{A})^k=s^{-1}(\mathbf{I}-s^{-1}\mathbf{A})^{-1}=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} \tag{53}$$

o sea que:

$$\mathcal{L}\,(e^{\mathbf{A}t})=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} \tag{54}$$

quedando así demostrado.

La igualdad en (54) puede demostrarse de la siguiente forma: Dada la convergencia para todo valor finito de *t*, de

$$e^{\mathbf{A}t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k \tag{55}$$

esta puede diferenciarse término a término, o sea:

$$\frac{d}{dt}(e^{\mathbf{A}t})=\mathbf{A}+\mathbf{A}^2t+\frac{1}{2}\mathbf{A}^3t^2+\cdots+\frac{1}{(k-1)!}\mathbf{A}^k t^{k-1} \tag{56}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\mathbf{A}t})=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}\mathbf{A}^k t^{k-1}=\mathbf{A}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k \tag{57}$$

$$\frac{d}{dt}(e^{\mathbf{A}t})=\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} \tag{58}$$

Aplicando la transformada de Laplace a ésta última y sabiendo que $\mathcal{L}\,(df/dt)=s\mathcal{L}\,[f(t)]-f(0)$, se tiene

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}(e^{\mathbf{A}t})\right]=s\mathcal{L}\,(e^{\mathbf{A}t})-e^0=\mathbf{A}\mathcal{L}\,(e^{\mathbf{A}t}) \tag{59}$$

factorizando términos comunes obtenemos

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathcal{L}\,(e^{\mathbf{A}t}) = e^{0} = \mathbf{I} \tag{60}$$

y multiplicando por la izquierda ambos lados de esta ultima ecuación por $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ se llega a que:

$$\mathcal{L}\,(e^{\mathbf{A}t}) = (s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} \tag{61}$$

Que era lo que se quería demostrar.

Relación entre las ecuaciones dinámicas y la matriz respuesta al impulso

Tomemos ahora la transformada de Laplace de la representación por variables de estado dada en las ecuaciones (24) y (25), asumiendo que los estados iniciales son iguales a cero:

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\,\mathbf{U}(s) \tag{62}$$

De ésta última obtenemos

$$\mathbf{G}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}] \tag{63}$$

la “Matriz Función de Transferencia” del sistema definido por (24) y (25), la cual es una matriz racional propia y gobierna la respuesta de estado cero. Esta última es la transformada de Laplace de la Matriz respuesta al impulso dada por

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}+\mathbf{D}\delta(t)\ . \tag{64}$$

5. Autovalores y Autovectores.

Sea **A** una matriz *n* x *n* con coeficientes en el campo de los números complejos $\mathbb{C}$. Un escalar λ en $\mathbb{C}$ es llamado de “autovalor” de **A** si existe un vector $\mathbf{x}\neq 0$ en $\mathbb{C}$ tal que

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x} \tag{65}$$

Todo vector $\mathbf{x}\neq 0$ que satisface $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ se denomina “autovector” de **A** asociado al autovalor λ. Para hallar los autovalores de A, escribimos $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ como sigue

$$(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{x} = 0 \tag{66}$$

Esta última ecuación tendrá una solución NO TRIVIAL, o sea $\mathbf{x}\neq 0$, si y solamente si el

$$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) = 0 \tag{67}$$

Esto significa que un escalar λ es un autovalor de **A** si y solamente si es una solución de

$$\Delta(\lambda) \triangleq |\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}| = 0 \tag{68}$$

donde, $\Delta(\lambda)$ es un polinomio de grado “*n*” en λ llamado “polinomio característico” de **A**. Dado que $\Delta(\lambda)$ posee grado “*n*”, la matriz **A** *n* x *n* tendrá “*n*” autovalores (no necesariamente todos distintos).

Ejemplo: Sea la matriz

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix} \tag{69}$$

$$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})=\det\begin{bmatrix}\lambda-1 & 1\\ -2 & \lambda+1\end{bmatrix}=\lambda^2+1 \tag{70}$$

$$\lambda^2+1=0 \;\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\pm j \tag{71}$$

Obtenidos los autovalores de A, los autovectores asociados con λ_1 y λ_2 pueden ser obtenidos solucionando la ecuación homogénea:

$$(\lambda_i\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{v}_i=0, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n \tag{72}$$

Entonces, el autovector asociado con $\lambda_1 = j$, se obtiene de:

$$(\lambda_1\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}j-1 & 1\\ -2 & j+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\end{bmatrix}=0 \tag{73}$$

Claramente, el vector $\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}1 & 1-j\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ es una solución de esta ecuación. De forma similar, el autovector $\mathbf{v}_2$ se obtiene de

$$(\lambda_2\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}-j-1 & 1\\ -2 & -j+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ v_{12}\end{bmatrix}=0 \tag{74}$$

el cual resulta $\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}1 & 1+j\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Caso 1: Todos los autovalores de A son todos distintos. Transformación de Similaridad.

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ autovalores distintos de la matriz **A**, y sea $\mathbf{v}_i$ un autovector de **A** asociado con λ_i, para $i = 1, 2, \ldots, n$; esto es, $\mathbf{A}\mathbf{v}_i=\lambda\mathbf{v}_i$. Entonces el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente. Sea $\hat{\mathbf{A}}$ la representación de **A** respecto a la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$. Entonces la representación de **A** con respecto a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ es

$$\hat{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix} \tag{75}$$

Sea la matriz de transformación $\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}$, formada por los autovectores de **A**, dado que,

$$\begin{aligned}\mathbf{AQ}&=\mathbf{A}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}\mathbf{v}_1 & \mathbf{A}\mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{A}\mathbf{v}_n\end{bmatrix}\\ \mathbf{AQ}&=\begin{bmatrix}\lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_1\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n\end{bmatrix}=\mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}\end{aligned} \tag{76}$$

se tiene,

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} \tag{77}$$

Se concluye que si los autovalores de una matriz lineal **A** son todos distintos, entonces eligiendo el conjunto de autovectores como una base, la matriz **A** tiene una representación matricial diagonal con los autovalores sobre la diagonal principal.

Caso 2: Todos los autovalores de A no son todos distintos. Forma Canónica de Jordan.

Diferente al caso anterior, si la matriz **A** tiene autovalores repetidos, no siempre es posible encontrar una representación matricial diagonal. Vamos a verificar esto con dos ejemplos.

Considérese la siguiente matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{78}$$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) \tag{79}$$

$$(1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0 \;\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{ y } \lambda_3 = 2 \tag{80}$$

El autovector asociado con $\lambda_1 = 1$ puede obtenerse solucionando la siguiente ecuación homogénea

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = 0 \tag{81}$$

de la misma ecuación puede obtenerse el autovector asociado a $\lambda_2 = 1$. Los vectores soluciones son: $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ los cuales son linealmente independientes. El autovector asociado con $\lambda_3 = 2$ puede obtenerse solucionando la siguiente ecuación homogénea

$$(\mathbf{A} - \lambda_3\mathbf{I})\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = 0 \tag{82}$$

El vector solución es $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Dado que el conjunto de vectores es linealmente independiente, esto es,

$$rango(\mathbf{Q}) = rango\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3 \tag{83}$$

la representación de **A** respecto a la base $\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3\}$ es

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{84}$$

En este ejemplo, aunque la matriz **A** tiene autovalores repetidos, esta puede ser diagonalizada. Sin embargo, eso no siempre es posible. Veamos el siguiente ejemplo:

Considérese la siguiente matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{85}$$

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) \tag{86}$$

$$(1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0 \;\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \text{ y } \lambda_3 = 2 \tag{87}$$

El autovector asociado con $\lambda_1 = 1$ puede obtenerse solucionando la siguiente ecuación homogénea

$$(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = 0 \tag{88}$$

La solución de esta ecuación resulta en la existencia de un solo un autovector linealmente independiente, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ asociado con $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1$. El autovector asociado a $\lambda_3 = 2$, resulta de la solución de

$$(\mathbf{A}-\lambda_3\mathbf{I})\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{bmatrix} = 0 \tag{89}$$

o sea $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Dado que el conjunto de vectores no es linealmente independiente, esto es,

$$rango(\mathbf{Q}) = rango\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 2 \tag{90}$$

no es posible obtener una diagonalización de **A** respecto a la base $\{\mathbf{v}_1,\, \mathbf{v}_2,\, \mathbf{v}_3\}$.

En este ejemplo se observa que si una matriz **A** *n* x *n* tiene autovalores repetidos no siempre es posible encontrar *n* vectores linealmente independientes; en consecuencia esta matriz no puede ser diagonalizada. Sin embargo, es posible encontrar un conjunto especial de vectores bases de forma tal que la nueva representación es casi una forma diagonal, denominada *forma canónica de Jordan*. Esta forma tiene los autovalores de **A** sobre la diagonal y o ceros o unos arriba de la diagonal principal. Por ejemplo, si la matriz **A** tiene un autovalor λ_1 con multiplicidad 4 y un autovalor λ_2 con multiplicidad 1, entonces la nueva representación puede tomar algunas de las siguientes formas:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \tag{91}$$

Cual de las formas asumirá dependerá de las características de la matriz **A**. Los bloques delimitados por las líneas punteadas que están sobre la diagonal principal son de la forma:

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \tag{92}$$

con los mismos autovalores sobre la diagonal principal y 1s (unos) sobre la diagonal arriba de la diagonal principal. Una matriz de este tipo es llamada bloque de Jordan asociado al autovalor λ. La matriz diagonal (primera matriz en (91)) es claramente un caso especial de la forma canónica de Jordan.

Antes de presentar el procedimiento para la obtención de la forma canónica de Jordan definimos el concepto de "*nulidad*" de una matriz **A** n x n. Un vector **x** es llamado de vector nulo si $\mathbf{Ax} = 0$. La *nulidad* se define como el máximo número de vectores nulos linealmente independientes de **A** y está relacionada al rango de la matriz por

$$nulidad(\mathbf{A}) = número\ de\ columnas\ de\ \mathbf{A} - rango(\mathbf{A}) \tag{93}$$

Por ejemplo, la nulidad de la matriz de la ecuación (88) dada por $(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})$ es 1, o sea:

$$nulidad[(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})] = nulidad\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3-2=1 \tag{94}$$

esto significa que la ecuación $(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = 0$ tiene solamente una solución independiente, tal como fue demostrado en el ejemplo en cuestión.

Definición: Un vector **v** se dice que es un *autovector generalizado* de grado k de A asociado con λ, si y solamente si

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^k\,\mathbf{v} &= 0 \\ (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{k-1}\mathbf{v} &\neq 0 \end{aligned} \tag{95}$$

Nótese que si *k* = 1, $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}=0$ y $\mathbf{v}\neq 0$, que es la definición de autovector vista al inicio de la sección 5. Sea **v** un autovector generalizado de grado *k* asociado al autovalor λ, se define al conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3,\ \cdots,\ \mathbf{v}_k\}$ dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_k &\triangleq \mathbf{v} \\ \mathbf{v}_{k-1} &\triangleq (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}_{k-2} &\triangleq (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^2\,\mathbf{v} = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_{k-1} \\ &-------------------- \\ \mathbf{v}_1 &\triangleq (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{k-1}\mathbf{v} = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_2 \end{aligned} \tag{96}$$

como la *cadena de autovectores generalizados* de tamaño *k*.

Sea una matriz **A** *n* x *n* que posee un autovalor λ con multiplicidad *m*. Deben hallarse entonces *m* autovectores generalizados linealmente independientes asociado a λ. Esto se realiza obteniendo cadenas de autovectores generalizados de varios tamaños. Primero se calculan los rangos de $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^i$, para $i=0,1,2,\ldots,$hasta el rango de $(\mathbf{A}\text{ - }\lambda\mathbf{I})^k = n-m$. Luego se calculan las nulidades para cada $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^i$, las cuales según la (93) está dada por *n* – rango[$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^i$] y a partir de estos valores encontrar los autovalores generalizados de grado *k* a partir de la condición (95).

Para facilitar el entendimiento de este procedimiento presentaremos un ejemplo.

Transformar la siguiente matriz en la forma canónica de Jordan:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \tag{97}$$

1. Calcular los autovalores de **A**.

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = (\lambda^5 - 10\lambda^4 + 40\lambda^3 - 80\lambda^2 + 80\lambda - 32)\lambda = (\lambda-2)^5\lambda = 0 \tag{98}$$

Como se observa, A tiene un autovalor $\lambda_1 = 2$ con multiplicidad 5 y un autovalor $\lambda_2 = 0$ con multiplicidad 1. Debemos entonces encontrar primero, los m autovectores generalizados linealmente independientes asociados a $\lambda_1 = 2$.

2. Calcular $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^i$, para $i = 0,1,2,\ldots,$ hasta el rango de $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^k = n-m$, como sigue:

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{matrix} rango(\mathbf{A}-2\mathbf{I}) = 4 \\ \eta_1 = 6-4 = 2 \end{matrix} \tag{99}$$

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{matrix} rango(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^2 = 2 \\ \eta_2 = 6-2 = 4 \end{matrix} \tag{100}$$

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}, \begin{matrix} rango(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^3 = 1 \\ \eta_3 = 6-1 = 5 \end{matrix} \tag{101}$$

donde, η_i es la nulidad de $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^i$. Además, por definición decimos que $\mathbf{B} \triangleq (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})$. Siguiendo entonces, dado que el $rango(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^3 = n-m = 1$, paramos aquí. Dado que $\eta_3 - \eta_2 = 1$, podemos encontrar un autovector generalizado $\mathbf{u}$ de grado 3, tal que $\mathbf{B}^3\mathbf{u} = 0$ y $\mathbf{B}^2\mathbf{u} \neq 0$. Es fácil verificar, solucionando este sistema de ecuaciones, que este vector es $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Definimos entonces:

$$\mathbf{u}_1 \triangleq \mathbf{B}^2\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 \triangleq \mathbf{B}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_3 \triangleq \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{102}$$

Esta es una cadena de autovectores generalizados de tamaño 3. A seguir, dado que $\eta_2 - \eta_1 = 2$, hay dos vectores mas linealmente independientes. Debemos buscar entonces un vector **v** de grado 2, tal que $\mathbf{B}^2\mathbf{v} = 0$ y $\mathbf{Bv} \neq 0$. Es fácil verificar, solucionando este sistema de ecuaciones, que este vector es $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Definimos entonces:

$$\mathbf{v}_1 \triangleq \mathbf{Bv} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 \triangleq \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{103}$$

Hasta aquí encontramos 5 autovectores generalizados de **A** asociados con $\lambda_1 = 2$.

3. Calcular un autovector asociado con $\lambda_2 = 0$. Sea w un autovector de A asociado con $\lambda_2 = 0$; entonces

$$(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I})\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{w} = 0. \tag{104}$$

Solucionando esta ecuación, se obtiene que $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$.

A partir de los autovectores obtenidos ahora es fácil, aplicando la transformación de similaridad, obtener la representación de Jordan de **A** respecto de la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}\}$, o sea, $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ}$ donde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{u}_3 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{w} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{105}$$

Así, la representación de Jordan buscada resulta:

$$\hat{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{106}$$

Si se reordena la base de autovectores generalizados a la inversa, o sea $\{\mathbf{w},\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_1,\ \mathbf{u}_3,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_1\}$, la transformación lineal resulta

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{w} \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{u}_3 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_1]$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{107}$$

y la representación de Jordan

$$\hat{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{c:cc:ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \tag{108}$$

Esta última también es una representación de Jordan de la matriz **A**. Comparada con la representación en (106) se observa que esta última representación tiene bloques de Jordan com unos sobre la diagonal abajo de la diagonal principal, resultado del orden diferente de los vectores bases.

6. Métodos de Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$.

Existen diversos métodos de cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$, que serán descritos a continuación:

1. Usando la definición de matriz cuadrada. Primero se calculan los autovalores de **A**, luego se debe encontrar un polinomio $g(\lambda)$ de grado $n - 1$ que es igual a $e^{\lambda t}$ en el espectro de **A**, entonces $e^{\mathbf{A}t} = g(\mathbf{A})$.
2. Usando la forma canónica de Jordan de **A**: Sea $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q}^{-1}$; entonces $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{Q}e^{\hat{\mathbf{A}}t}\mathbf{Q}^{-1}$, donde $\hat{\mathbf{A}}$ está en la forma de Jordan. $e^{\hat{\mathbf{A}}t}$ puede ser obtenida de forma inmediata por:

$$e^{\hat{\mathbf{A}}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & t^2 e^{\lambda_1 t}/2! & \cdots & t^{n-1}e^{\lambda_1 t}/(n-1)! \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \cdots & t^{n-2}e^{\lambda_1 t}/(n-2)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} \quad (109)$$

3. Usando el desarrollo en serie $e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \mathbf{A}^k / k!$: Esta serie, en general no dará una solución cerrada o bien definida y debido a esto es un método adecuado para programas de computadora.
4. En el dominio de la frecuencia, recordando que $L\ (e^{\mathbf{A}t}) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. Primero se calcula la matriz inversa de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ y luego se obtiene la transformada inversa de Laplace de cada elemento de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$. El cálculo de la inversa de una matriz no es una tarea fácil. Sin embargo, si la matriz es triangular (si todos los elementos abajo o arriba de la diagonal principal son nulos) o es de orden menor a 4 la tarea es más sencilla. Recuerde que la inversa de una matriz triangular es también una matriz triangular.

De los métodos presentados anteriormente, describiremos en detalles los métodos 1 y 2.

1. **Función de matriz cuadrada. Definición:** Sea $f(\lambda)$ una función definida en el espectro de **A**. Si $g(\lambda)$ es un polinomio que posee los mismos valores que $f(\lambda)$, en el espectro de **A**, entonces la función de matriz $f(\mathbf{A})$ se define como $f(\mathbf{A}) \triangleq g(\mathbf{A})$.

Si **A** es una matriz n x n, determinados los n valores de $f(\lambda)$, podemos encontrar un polinomio de grado n – 1,

$$g(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} \quad (110)$$

el cual es igual a $f(\lambda)$. Entonces de esta definición, se sabe que cada función de A puede ser expresada como

$$f(\mathbf{A}) = \alpha_0\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{A} + \cdots + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}. \quad (111)$$

A continuación resumimos el procedimiento: Dada una matriz **A** n x n y una función $f(\lambda)$, primero calculamos el polinomio característico de **A**, o sea,

$$\Delta(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{n_i} \quad (112)$$

donde, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ son los autovalores distintos de **A** con multiplicidades $n_1, n_2, \ldots, n_m$, respectivamente. Sea el polinomio $g(\lambda)$ dado por (110) donde los coeficientes $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ son obtenidos usando las n ecuaciones dadas por:

$$f^{(l)}(\lambda_i) = g^{(l)}(\lambda_i)\,, \ \text{para } l = 0,1,2,\ldots,n_i - 1 \ \text{ e } \ i = 1,2,\ldots,m \quad (113)$$

donde,

$$f^{(l)}(\lambda_i) \triangleq \left.\frac{d^l f(\lambda)}{d\lambda^l}\right|_{\lambda=\lambda_i} \quad \text{y} \quad g^{(l)}(\lambda_i), \text{ se define de forma similar.} \tag{114}$$

Finalmente, calculados los coeficientes de $g(\lambda)$ podemos hacer $f(\mathbf{A}) = g(\mathbf{A})$.

Ejemplo: Sea la matriz cuadrada **A** dada por

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{115}$$

Calcular $e^{\mathbf{A}t}$. O equivalentemente, si $f(\lambda) = e^{\lambda t}$, ¿cuál es $f(\mathbf{A})$?

El polinomio característico de A es $(\lambda-1)^2(\lambda-2)$. Sea $g(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2$. Entonces, para el autovalor $\lambda = 1$ de multiplicidad 2 tenemos

$$\begin{aligned} f(1) &= g(1) \qquad e^t = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \\ f'(1) &= g'(1) \qquad te^t = \alpha_1 + 2\alpha_2 \end{aligned} \tag{116}$$

Es importante notar que la derivada es con respecto a λ y no con respecto a *t*. A seguir, para el autovalor $\lambda = 2$ de multiplicidad 1 tenemos

$$f(2) = g(2) \qquad e^{2t} = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2 \tag{117}$$

Tenemos 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas. Por lo tanto, solucionando este sistema de ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -2te^t + e^{2t} \\ \alpha_1 &= 3te^t - 2e^{2t} + 2e^t \\ \alpha_2 &= e^{2t} - e^t - te^t \end{aligned} \tag{118}$$

Entonces, tenemos que

$$e^{\mathbf{A}t} = g(\mathbf{A}) = (-2te^t + e^{2t})\mathbf{I} + (3te^t - 2e^{2t} + 2e^t)\mathbf{A} + (e^{2t} - e^t - te^t)\mathbf{A}^2 \tag{119}$$

Haciendo los cálculos, se llega a

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & 0 & 2e^t - 2e^{2t} \\ 0 & e^t & 0 \\ e^{2t} - e^t & 0 & 2e^{2t} - e^t \end{bmatrix} \tag{120}$$

2. **Usando la forma canónica de Jordan de A:** Dada

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 \end{bmatrix}_{(n\times n)}, \tag{121}$$

El polinomio característico de $\hat{\mathbf{A}}$ es $(\lambda-\lambda_1)^n$. Sea el polinomio $g(\lambda)$ escrito como

$$g(\lambda)=\alpha_0+\alpha_1(\lambda-\lambda_1)+\alpha_2(\lambda-\lambda_1)^2+\cdots+\alpha_{n-1}(\lambda-\lambda_1)^{n-1} \tag{122}$$

Entones, de la condición en (113) se desprende que

$$\alpha_0=f(\lambda_1),\ \ \alpha_1=f'(\lambda_1),\ \ \alpha_{n-1}=\frac{f^{(n-1)}(\lambda_1)}{(n-1)!} \tag{123}$$

Por tanto,

$$f(\hat{\mathbf{A}})=g(\hat{\mathbf{A}})=f(\lambda_1)\mathbf{I}+\frac{f'(\lambda_1)}{1!}(\hat{\mathbf{A}}-\lambda_1\mathbf{I})+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(\lambda_1)}{(n-1)!}(\hat{\mathbf{A}}-\lambda_1\mathbf{I})^{n-1}, \tag{124}$$

y, finalmente

$$f(\hat{\mathbf{A}})=\begin{bmatrix} f(\lambda_1) & f'(\lambda_1)/1! & f''(\lambda_1)/2! & \cdots & f^{(n-1)}(\lambda_1)/(n-1)! \\ 0 & f(\lambda_1) & f'(\lambda_1)/1! & \cdots & f^{(n-2)}(\lambda_1)/(n-2)! \\ 0 & 0 & f(\lambda_1) & \cdots & f^{(n-3)}(\lambda_1)/(n-3)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_1) \end{bmatrix}. \tag{125}$$

Si $f(\lambda)=e^{\lambda t}$, entonces

$$e^{\hat{\mathbf{A}}t}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & t^2e^{\lambda_1 t}/2! & \cdots & t^{n-1}e^{\lambda_1 t}/(n-1)! \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & \cdots & t^{n-2}e^{\lambda_1 t}/(n-2)! \\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & \cdots & t^{n-3}e^{\lambda_1 t}/(n-3)! \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} \tag{126}$$

Una función de matriz está definida por a través de un polinomio de la matriz; consecuentemente, las relaciones que se cumplen para polinomios pueden también ser aplicadas a funciones de matrices. Por ejemplo, si $\mathbf{A}=\mathbf{Q}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{Q}^{-1}$, entonces

$$f(\mathbf{A})=\mathbf{Q}f(\hat{\mathbf{A}})\mathbf{Q}^{-1}, \tag{127}$$

y si

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \tag{128}$$

entonces

$$f(\mathbf{A})=\begin{bmatrix} f(\mathbf{A}_1) & 0 \\ 0 & f(\mathbf{A}_2) \end{bmatrix}, \tag{129}$$

para toda función f definida en el espectro de **A**. En consecuencia, usando (125) y (129), toda función de una matriz dada en la forma de Jordan, puede ser obtenida de forma inmediata.

Ejemplo: Considérese la matriz cuadrada **A** dada en la forma de Jordan

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{ccc|cc}\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2\end{array}\right] \tag{130}$$

Si $f(\lambda)=e^{\lambda t}$, entonces

$$f(\mathbf{A})=e^{\mathbf{A}t}=\left[\begin{array}{ccc|cc}e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & t^2e^{\lambda_1 t}/2! & 0 & 0\\ 0 & e^{\lambda_1 t} & te^{\lambda_1 t} & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & te^{\lambda_2 t}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_2 t}\end{array}\right] \tag{131}$$

Si $f(\lambda)=(s-\lambda)^{-1}$, entonces

$$f(\mathbf{A})=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\left[\begin{array}{ccc|cc}\frac{1}{s-\lambda_1} & \frac{1}{(s-\lambda_1)^2} & \frac{1}{(s-\lambda_1)^3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{s-\lambda_1} & \frac{1}{(s-\lambda_1)^2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{s-\lambda_1} & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s-\lambda_2} & \frac{1}{(s-\lambda_2)^2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s-\lambda_2}\end{array}\right] \tag{132}$$

Es fácil deducir que los elementos de la matriz (132) son el resultado de aplicar la transformada inversa de Laplace a los elementos de la matriz en la (131).

3. **Usando la** $\mathcal{L}\,(e^{\mathbf{A}t})=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ **:** Ejemplo.

Considere la ecuación de estado a continuación y hallemos la solución de la misma:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u\,, \tag{133}$$

La solución es dada por la ecuación

$$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0)+\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{134}$$

La matriz de función $e^{\mathbf{A}t}$ se obtiene tomando la transformada inversa de Laplace de $\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]$:

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{bmatrix} s & 1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{s^2+2s+1}\begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}$$

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{(s+1)^2} & -\dfrac{1}{(s+1)^2} \\ \dfrac{1}{(s+1)^2} & \dfrac{s}{(s+1)^2} \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{A}t}=\mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix} \dfrac{s+2}{(s+1)^2} & -\dfrac{1}{(s+1)^2} \\ \dfrac{1}{(s+1)^2} & \dfrac{s}{(s+1)^2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix}\mathbf{x}(0)+\int_0^t\begin{bmatrix} (1+t-\tau)e^{-(t-\tau)} & -(t-\tau)e^{-(t-\tau)} \\ (t-\tau)e^{-(t-\tau)} & [1-(t-\tau)]e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix}\mathbf{x}(0)+\int_0^t\begin{bmatrix} -(t-\tau)e^{-(t-\tau)} \\ [1-(t-\tau)]e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

La solución para $u(t) = 1$ es:

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix}\mathbf{x}(0)+\begin{bmatrix} -1+e^{-t}(t+1) \\ te^{-t} \end{bmatrix}$$

7. Controlabilidad y Observabilidad de Sistemas Dinámicos Lineales.

El análisis de sistemas consiste generalmente de 2 partes:

- **Análisis cuantitativo**, en el cual nos interesa la respuesta exacta del sistema para un dado conjunto de entradas y condiciones iniciales;
- Análisis cualitativo, en el cual nos interesan las propiedades del sistema.

La **controlabilidad** y la **observabilidad** son dos propiedades cualitativas de los sistemas dinámicos.

A grandes rasgos, la controlabilidad estudia la posibilidad de guiar o llevar los estados de un sistema hacia una posición deseada mediante la señal de entrada. Por otro lado, la observabilidad estudia la posibilidad de estimar o reconstruir estos estados a partir de la señal de salida del sistema. Estos dos conceptos son definidos bajo la suposición de que las matrices **A**, **B**, **C** y **D** son conocidas.

Para entender estos conceptos, veremos primero estas propiedades de un sistema lineal a través de un ejemplo, utilizando el circuito eléctrico de la Figura 1:

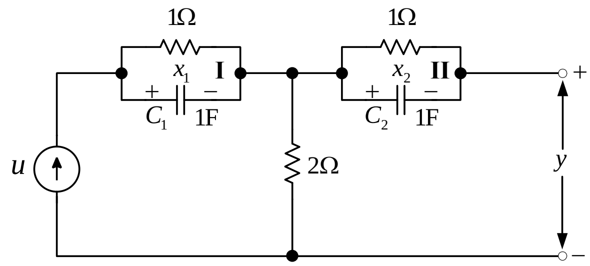

Figura 1 – Conceptos de Controlabilidad y Observabilidad.

Sean x_1 y x_2 las tensiones en bornes de los capacitores C_1 y C_2 respectivamente, las cuales pueden ser estados del sistema lineal en cuestión. La entrada u es una fuente de corriente constante y la salida y es la tensión en los terminales de salida de este circuito.

✍ Dado que el circuito esta abierto en los terminales de salida, e independientemente del valor inicial y polaridad de la tensión sobre el capacitor C_2, sea cual fuera el valor de corriente u aplicado a la entrada, el estado x_2 (o el modo de la malla **II**) no podrá ser excitado. O sea, la entrada u no tiene efecto sobre el estado x_2, por tanto este estado *no es controlable*.

✍ Por otro lado, la corriente que pasa a través de la resistencia de 2Ω es siempre igual u, la que produce una tensión en bornes de esta resistencia y que aparece en los bornes de salida, o sea $y = 2u$. Consecuentemente, las transiciones del estado x_1, independientemente del valor inicial y polaridad de la tensión sobre el capacitor C_1, no aparecerán en los terminales de salida. Esto es, las variaciones de x_1 no pueden ser observadas a través de la señal de salida y, por tanto este estado *no es observable*. Sin embargo, el estado x_1 (o el modo de la malla **I**) sí es afectado por la entrada u, por lo tanto, este estado *es controlable*. Y, las transiciones del estado x_2 sí aparecen en la señal de salida y, por lo que este estado *es observable*.

✍ En resumen: La ecuación dinámica lineal que describe este sistema es:

NO CONTROLABLE, y

NO OBSERVABLE.

1. Controlabilidad.

Consideremos el sistema dinámico de dimensión n y r entradas, descrito por la ecuación de estado

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{135}$$

donde, **A** y **B** son respectivamente matrices constantes de dimensión n x n y n x r. Dado que la señal de salida no juega ningún rol en la controlabilidad, no usaremos por el momento la ecuación de salida.

Definición: La ecuación de estado (135) o el par $\{\mathbf{A},\mathbf{B}\}$ se dice que ***es controlable*** si para cualquier estado inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ y cualquier estado final $\mathbf{x}_1$, existe una entrada **u** que transfiere $\mathbf{x}_0$ a $\mathbf{x}_1$ en un intervalo de tiempo finito. En caso contrario, la (135), o $\{\mathbf{A},\mathbf{B}\}$ es ***no controlable***.

Esta definición requiere solamente que la entrada sea capaz de transferir cualquier estado en el espacio de estado a otro estado en un tiempo finito; pero no especifica que trayectoria debe tomar el estado. Aún más, no impone una restricción en cuanto a la magnitud de la señal de entrada; o sea, la magnitud de **u** puede ser tan grande como se desee.

Para que el sistema sea controlable, se requiere que la matriz de dimensión n x nr

$$\mathscr{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}_{n\times nr} \tag{136}$$

posea $rango = n$, o lo que es lo mismo, que contenga n vectores linealmente independientes. La matriz dada en (136) se denomina matriz de controlabilidad. En Matlab esta matriz puede obtenerse usando el comando “**ctrb**(**A**,**B**)” y para saber si es controlable, **rank**[**ctrb**(**A**,**B**)] da el rango de $\mathscr{C}$.

Condiciones de controlabilidad para ecuaciones de estado dadas en la forma canónica de Jordan.

La ventaja de transformar la ecuación de estado en la forma canónica de Jordan, es que la controlabilidad puede determinarse por visualización directa.

1. **Autovalores de A todos distintos:**

Sea la ecuación de estado dada por (135). Siendo los autovalores de **A** todos distintos, es posible encontrar una matriz de transformación **P** tal que:

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{bmatrix}_{(n\times n)}, \tag{137}$$

donde **P** está formada por los autovectores de **A** asociados a cada autovalor λ_i.

Podemos hallar una matriz **P** tal que se cumpla $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \hat{\mathbf{A}}$. Definiendo:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Pz} \tag{138}$$

tenemos que

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\dot{\mathbf{z}} \tag{139}$$

o sea,

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\dot{\mathbf{x}} \tag{140}$$

de la (135) se tiene

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Ax} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Bu} \tag{141}$$

y de la (138)

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{APz} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Bu} \tag{142}$$

Esta ultima ecuación representa una transformación lineal donde $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \hat{\mathbf{A}}$ y $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}}$, resultando la ecuación de estado

$$\dot{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u} \tag{143}$$

donde la matriz **P** puede ser obtenida mediante

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}_{(n\times n)} . \tag{144}$$

Para la verificar la controlabilidad del sistema definido por (143) deben observarse las líneas de la matriz $\hat{\mathbf{B}}$. Si todos los elementos de cualquier línea de $\hat{\mathbf{B}}$ son nulos, entonces ese estado no puede ser controlado por la entrada correspondiente. Entonces, tal sistema es completamente controlable si y solo si ninguna línea de $\hat{\mathbf{B}}$ tiene todos sus elementos iguales a cero.

2. Autovalores de A no son todos distintos:

En este caso, la matriz **A** posee autovalores distintos con multiplicidad mayor a 1 y debe encontrarse un conjunto de autovectores generalizados para poder encontrar una matriz $\hat{\mathbf{A}}$ casi diagonal, o sea, en alguna forma de Jordan. Considere la ecuación de estado escrita de la siguiente forma:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Jx} + \mathbf{Bu} \tag{145}$$

donde **J** está en la forma de Jordan. Para simplificar asumimos que **J** tiene solo 2 autovalores distintos, λ_1 y λ_2. esto es:

$$\mathbf{J} = diag(\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2) \tag{146}$$

donde $\mathbf{J}_1$ consiste de todo los bloques de Jordan asociados con λ_1 y $\mathbf{J}_2$ consiste de todo los bloques de Jordan asociados con λ_2. Asumimos también que $\mathbf{J}_1$ tiene 3 bloques de Jordan y $\mathbf{J}_2$ tiene 2 bloques de Jordan, o sea,

$$\mathbf{J}_1 = diag(\mathbf{J}_{11}, \mathbf{J}_{12}, \mathbf{J}_{11}) \qquad \mathbf{J}_2 = diag(\mathbf{J}_{21}, \mathbf{J}_{22}) . \tag{147}$$

Por otro lado, designamos por b_{lij} a la línea de la matriz B que se corresponde con la última línea de los $\mathbf{J}_{ij}$. Así, la ecuación de estado (145) es controlable si y solo si los 3 vectores línea $\{b_{l11}, b_{l12}, b_{l13}\}$ son linealmente independientes y los 2 vectores línea $\{b_{l21}, b_{l22}\}$ son linealmente independientes, o lo que es lo mismo ninguno de estos vectores posee todos sus elementos iguales a cero. Vamos a usar un ejemplo para ilustrar esta afirmación.

La matriz **J** de la ecuación (148) posee dos autovalores distintos λ_1 y λ_2. Existen 3 bloques de Jordan de orden 2, 1 y 1, asociados a λ_1.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} \tag{148}$$

Las filas de la matriz **B** correspondientes con las últimas filas de los 3 bloques de Jordan son $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, y estos son linealmente independientes. Esto es, el rango de la matriz formada por estos 3 vectores es igual a 3. Por otro lado, ninguno de estos vectores línea tiene todos sus elementos nulos. Hay solamente un bloque de Jordan de orden 3 asociado a λ_2. La línea de **B** que se corresponde con la última línea de este bloque de Jordan es $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$, que no es nulo y por tanto linealmente independiente. Por lo tanto, la ecuación (147) **es controlable**.

2. Observabilidad.

Consideremos el sistema dinámico de dimensión *n*, con *r* entradas y *q* salidas, descrito por la ecuación de estado y su correspondiente ecuación de salida

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \tag{149}$$

donde, **A**, **B**, **C** y **D** son respectivamente matrices constantes de dimensión $n \times n$, $n \times r$, $q \times n$ y $q \times r$.

Definición: La ecuación de estado (149) o el par $\{\mathbf{A},\mathbf{C}\}$ ***es observable***, si a través del conocimiento de la entrada **u** y la salida **y** sobre un intervalo de tiempo finito $[0,t_1]$, con $t_1 > 0$, es posible determinar de forma única un estado inicial **x**(0). En caso contrario, la ecuación (149) es ***no observable***.

A seguir presentamos un ejemplo para mostrar como un sistema puede ser observable o no dependiendo de la elección de la salida del sistema.

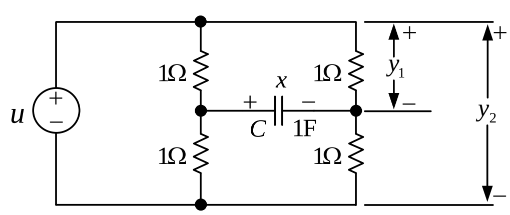

Figura 2 – Conceptos de Observabilidad.

La variable de estado x de este sistema es la tensión en bornes del capacitor C. Si $x(0) = 0$, entonces $x(t) = 0$ para todo $t \geq 0$ independientemente de que valor de tensión de entrada es aplicado al circuito debido a la simetría del circuito. Significa que la entrada u no tiene efecto sobre la tensión en bornes del capacitor, tornado este sistema no controlable.

Si la señal de salida es y_1, como muestra la Figura 2, y $x(0) \neq 0$ en $t_1 \geq 0$, el transitorio de tensión en bornes del capacitor aparece en y_1. Significa que la ecuación de estado que define a esta configuración, con y_1 como salida, *es observable*.

Ahora, si la señal de salida es y_2, como se muestra en la Figura 2, independientemente del valor que adquiera $x(0)$ en $t_1 \geq 0$ y sea cual fuere el valor de u, la transición de la tensión en bornes del capacitor no aparecerá en y_2. Por tanto, de acuerdo a la definición de observabilidad, se conocen perfectamente la señal de entrada u y la señal de salida y_2, pero no es posible determinar a partir de esta información el estado inicial $x(0)$ en un intervalo de tiempo finito. Significa que la ecuación de estado que describe a este sistema, con y_2 como salida, *no es observable*.

Para que el sistema sea observable, se requiere que la matriz de dimensión nm x n

$$\mathscr{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}_{nm \times n} \tag{150}$$

posea $rango = n$, o lo que es lo mismo, que contenga n vectores linealmente independientes. La matriz dada en (150) se denomina matriz de observabilidad. En Matlab esta matriz puede obtenerse usando el comando "**obsv**(**A**,**C**)" y para saber si es observable, **rank**[**obsv**(**A**,**C**)] da el rango de $\mathscr{O}$.

Condiciones de observabilidad para ecuaciones de estado dadas en la forma canónica de Jordan.

Al igual que para la controlabilidad, la transformación de la ecuación de estado en la forma canónica de Jordan, permite determinar rápidamente y por visualización directa si un sistema es o no es observable.

Tomamos el caso genérico donde la matriz A posee autovalores no todos distintos. Retomemos la ecuación de estado en la forma canónica de Jordan (145) y su correspondiente ecuación de salida, dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Jx} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} \end{aligned} \tag{151}$$

Designamos por c_{fij} a la columna de la matriz C que se corresponde con la primer columna de los $\mathbf{J}_{ij}$. Así, la ecuación de estado (151) es observable si y solo si los 3 vectores columna

$\{c_{f11}, c_{f12}, c_{f13}\}$ son linealmente independientes y los 2 vectores columna $\{c_{f21}, c_{f22}\}$ son linealmente independientes, o lo que es lo mismo ninguno de estos vectores son nulos.

Para ilustrar esta metodología retomamos el ejemplo presentado anteriormente, donde la ecuación de estado esta dada por la (148), la cual repetimos abajo junto a la ecuación de salida:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{152}$$

Las condiciones para que la (152) sea observable son que los 3 vectores columna de la matriz **C**,

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \tag{153}$$

sean linealmente independientes, y fehacientemente lo son. Esto es, el rango de la matriz formada por estos 3 vectores es igual a 3. Por otro lado, ninguno de estos vectores columna es nulo. Por otro lado, el vector columna $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ tiene todos sus elementos nulos y por tanto no es linealmente independiente. En consecuencia, la ecuación de estado (152) **no es observable**.

En el caso que los n autovalores de **A** sean todos distintos, con n autovectores distintos, la forma diagonal de la matriz **A** se reduce a la (137), la cual es un caso especial de la forma de Jordan con n bloques de Jordan distintos de orden 1. La condición para que este sistema sea observable es que ninguno de los n-vectores columna de la matriz C esté formado por elementos nulos.

A continuación presentaremos otros dos ejemplos interesantes relacionados a los conceptos vistos de controlabilidad y de observabilidad.

Ejemplo 1. Considere el circuito da la Figura 3. La ecuación de estado está dada a seguir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + u \tag{154}$$

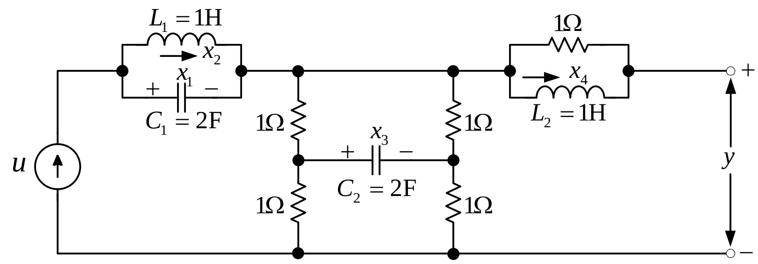

Figura 3 – Ejemplos de Controlabilidad y Observabilidad.

Debido a que el circuito está abierto en los terminales de salida, a que u es una fuente de corriente constante y a la simetría de los 4 resistores en la rama central, las transiciones de los estados x_1(tensión sobre C_1) y x_2(corriente en L_1), no aparecen en la salida y. Por consiguiente, los estados x_1 y x_2 ***no son observables***. Por otro lado, los estados x_1 y x_2 sí ***son controlables***. De forma similar, el estado x_4(corriente en L_2) ***no es controlable***, pero sí ***es observable*** dado que un valor inicial $x_4(0)$ puede ser detectado en la salida y.

Finalmente, dada la simetría de los 4 resistores en la rama central, el estado x_3(tensión sobre C_2) ***no es controlable ni observable***.

Es fácil ver que si descartamos los estados que son o no controlables o no observables, el circuito de la Figura 3 se reduce al de la Figura 4.

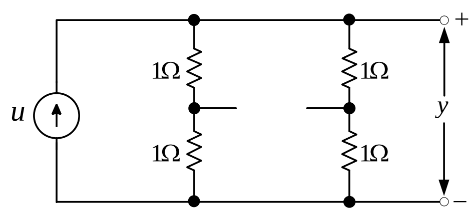

Figura 4 – Circuito equivalente de la Figura 3.

La corriente en cada rama central es $u/2$, consecuentemente, la tensión $y = (u/2)\cdot 2$, o sea, $y = u$ y la función de transferencia del circuito de la Figura 3 es $g(s) = 1$.

Referencias Bibliográficas

[1] – Feedback Control Systems, Charles L. Phillips and Royce D. Harbor, Fourth Edition, Prentice Hall, 2000.

[2] – Feedback Control of Dynamic Systems, Gene F. Franklin, J. David Powell and Abbas Emami-Naenini, Third Edition, Addison Wesley, 1995.

[3] – Analog and Digital Control System Design, Transfer-Function, State-Space & Algebraic Methods, C. T. Chen, 1993.

[4] – Modern Control Engineering, Katsuhiko Ogata, Third Edition, Prentice Hall, 1997.