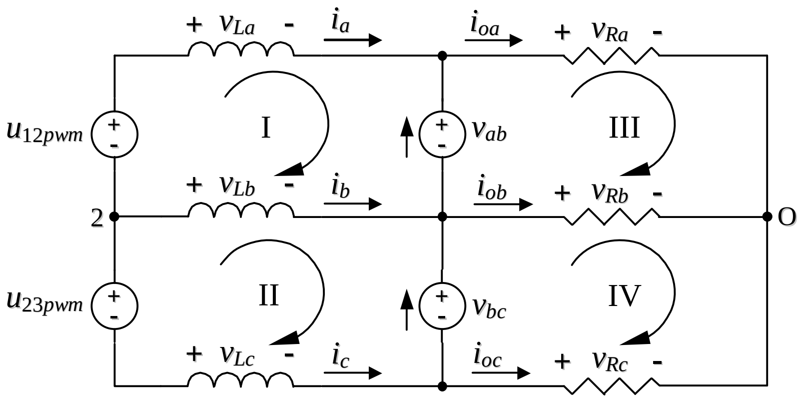
Obtención de la ecuación de estado de la planta en coordenadas estacionarias abc.

El circuito de la Figura 1 (TPN3) puede dibujarse, sustituyendo las fuentes de corriente por resistencias, de forma equivalente como se muestra abajo:



Circuito equivalente de la Figura 1

Deben plantearse las ecuaciones de las mallas I, II, III y IV, a partir de la ley de Kirchhoff de tensiones y a partir de la ley de Kirchhoff de las corrientes, las ecuaciones en los nodos *a*, *b*, *c*, 2 y O.

$$u_{12\,pwm} - v_{La} - v_{ab} + v_{Lb} = 0\,, \tag{A.1}$$

$$u_{23\,pwm} - v_{Lb} - v_{bc} + v_{Lc} = 0\,. \tag{A.2}$$

De la LKC en el nodo 2 se tiene:

$$i_a + i_b + i_c = 0\,. \tag{A.3}$$

Por tanto, se puede afirmar que:

$$\frac{di_a}{dt} + \frac{di_b}{dt} + \frac{di_c}{dt} = 0\,. \tag{A.4}$$

Siendo $v_L = -L\dfrac{di}{dt}$ (A.5), la caída de tensión en la inductancia del filtro, multiplicándose por *L* cada término de la ecuación (A.4) se obtiene:

$$v_{La} + v_{Lb} + v_{Lc} = 0\,. \tag{A.6}$$

De la ecuación (A.1) se tiene que:

$$v_{La} = u_{12pwm} - v_{ab} + v_{Lb}, \tag{A.7}$$

y de (A.2),

$$v_{Lb} = u_{23pwm} - v_{bc} + v_{Lc}. \tag{A.8}$$

Ahora, de la ecuación (A.6) se tiene:

$$v_{Lc} = -v_{La} - v_{Lb}. \tag{A.9}$$

Sustituyéndose esta última, en (A.8) se tiene,

$$v_{Lb} = \frac{u_{23pwm}}{2} - \frac{v_{bc}}{2} - \frac{v_{La}}{2}, \tag{A.10}$$

la cual sustituida en (A.7) nos da:

$$v_{La} = \frac{2}{3}u_{12pwm} + \frac{1}{3}u_{23pwm} - \frac{2}{3}v_{ab} - \frac{1}{3}v_{bc}. \tag{A.11}$$

Sustituyéndose esta última ecuación en (A.10), se obtiene:

$$v_{Lb} = \frac{1}{3}u_{23pwm} - \frac{1}{3}u_{12pwm} - \frac{1}{3}v_{bc} + \frac{1}{3}v_{ab}. \tag{A.12}$$

Utilizando (A.9), se obtiene finalmente:

$$v_{Lc} = -\frac{1}{3}u_{12pwm} - \frac{2}{3}u_{23pwm} + \frac{1}{3}v_{ab} + \frac{2}{3}v_{bc}. \tag{A.13}$$

Recordando la ecuación (A.5), las ecuaciones (A.11), (A.12) e (A.13) toman la siguiente forma:

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{2}{3L_o}u_{12pwm} + \frac{1}{3L_o}u_{23pwm} - \frac{2}{3L_o}v_{ab} - \frac{1}{3L_o}v_{bc} \tag{A.14}$$

$$\frac{di_b}{dt} = -\frac{1}{3L_o}u_{12pwm} + \frac{1}{3L_o}u_{23pwm} + \frac{1}{3L_o}v_{ab} - \frac{1}{3L_o}v_{bc} \tag{A.15}$$

$$\frac{di_c}{dt} = -\frac{1}{3L_o}u_{12pwm} - \frac{2}{3L_o}u_{23pwm} + \frac{1}{3L_o}v_{ab} + \frac{2}{3L_o}v_{bc}. \tag{A.16}$$

A la vez,

$$v_{ab} = v_{Ca} - v_{Cb} \quad \text{y} \quad v_{bc} = v_{Cb} - v_{Cc}. \tag{A.17}$$

Sustituyéndose estas últimas en las ecuaciones (A.14), (A.15) y (A.16), finalmente las ecuaciones buscadas resultan de la siguiente forma:

$$\frac{di_a}{dt} = \frac{2}{3L_o} u_{12pwm} + \frac{1}{3L_o} u_{23pwm} - \frac{2}{3L_o} v_{Ca} + \frac{1}{3L_o} v_{Cb} + \frac{1}{3L_o} v_{Cc} \qquad \text{(A.18)}$$

$$\frac{di_b}{dt} = -\frac{1}{3L_o} u_{12pwm} + \frac{1}{3L_o} u_{23pwm} + \frac{1}{3L_o} v_{Ca} - \frac{2}{3L_o} v_{Cb} + \frac{1}{3L_o} v_{Cc} \qquad \text{(A.19)}$$

$$\frac{di_c}{dt} = -\frac{1}{3L_o} u_{12pwm} - \frac{2}{3L_o} u_{23pwm} + \frac{1}{3L_o} v_{Ca} + \frac{1}{3L_o} v_{Cb} - \frac{2}{3L_o} v_{Cc} . \qquad \text{(A.20)}$$

Las ecuaciones en los nodos *a*, *b*, *c*, resultan:

$$i_{an} = i_a - i_{oa} \qquad \text{(A.21)}$$

$$i_{bn} = i_b - i_{ob} \qquad \text{(A.22)}$$

$$i_{cn} = i_c - i_{oc} . \qquad \text{(A.23)}$$

Siendo $i_{xn} = C \frac{dv_C}{dt}$ (A.24), la corriente en el capacitor de filtro, se tiene que:

$$i_{an} = C \frac{dv_{Ca}}{dt} \qquad i_{bn} = C \frac{dv_{Cb}}{dt} \qquad i_{cn} = C \frac{dv_{Cc}}{dt} , \qquad \text{(A.25)}$$

Sustituyéndose las últimas, en las ecuaciones (A.21), (A.22) y (A.23), se obtiene:

$$\frac{dv_{Ca}}{dt} = \frac{i_a}{C} - \frac{i_{oa}}{C} \qquad \text{(A.26)}$$

$$\frac{dv_{Cb}}{dt} = \frac{i_b}{C} - \frac{i_{ob}}{C} \qquad \text{(A.27)}$$

$$\frac{dv_{Cc}}{dt} = \frac{i_c}{C} - \frac{i_{oc}}{C} . \qquad \text{(A.28)}$$

Aplicándose la ley de Kirchhoff de las tensiones en las mallas III y IV se tiene:

$$v_{ab} - v_{Ra} + v_{Rb} = 0 , \qquad \text{(A.29)}$$

$$v_{bc} - v_{Rb} + v_{Rc} = 0 . \qquad \text{(A.30)}$$

Aplicando la LKC, en el nodo “O”, tenemos la siguiente ecuación:

$$i_{oa} + i_{ob} + i_{oc} = 0 . \qquad \text{(A.31)}$$

Siendo el valor de la resistencia igual a "*R*", y dividiendo cada término de la ecuación (A.31) por *R*, tenemos

$$v_{Ra} + v_{Rb} + v_{Rc} = 0\,. \tag{A.32}$$

De las ecuaciones (A.29) y (A.30) se tiene:

$$v_{Ra} = v_{ab} + v_{Rb}\,, \tag{A.33}$$

$$v_{Rb} = v_{bc} + v_{Rc}\,. \tag{A.34}$$

De la (A.32):

$$v_{Rc} = -v_{Ra} - v_{Rb}\,. \tag{A.35}$$

Sustituyéndose la última ecuación en la (A.34):

$$v_{Rb} = \frac{v_{bc}}{2} - \frac{v_{Ra}}{2}\,. \tag{A.36}$$

Sustituyéndose la última ecuación en la (A.33), tenemos:

$$v_{Ra} = \frac{2}{3}v_{ab} + \frac{1}{3}v_{bc}\,. \tag{A.37}$$

Sustituyéndose (A.37) en (A.36),

$$v_{Rb} = -\frac{1}{3}v_{ab} + \frac{1}{3}v_{bc}\,. \tag{A.38}$$

Y de la ecuación (A.35), tenemos que:

$$v_{Rc} = -\frac{1}{3}v_{ab} - \frac{2}{3}v_{bc}\,, \tag{A.39}$$

siendo $v_{Rx} = i_{ox}\, R$, las ecuaciones (A.37), (A.38) y (A.39) resultan:

$$i_{oa} = \frac{2}{3R}v_{ab} + \frac{1}{3R}v_{bc}\,, \tag{A.40}$$

$$i_{ob} = -\frac{1}{3R}v_{ab} + \frac{1}{3R}v_{bc}\,, \tag{A.41}$$

$$i_{oc} = -\frac{1}{3R}v_{ab} - \frac{2}{3R}v_{bc}\,. \tag{A.42}$$

Utilizándose las relaciones dadas en (A.17), obtenemos las corrientes en función de las tensiones en los capacitores, elegidas como variables de estado.

O sea,

$$i_{oa} = \frac{2}{3R} v_{Ca} - \frac{1}{3R} v_{Cb} - \frac{1}{3R} v_{Cc}, \qquad \text{(A.43)}$$

$$i_{ob} = -\frac{1}{3R} v_{Ca} + \frac{2}{3R} v_{Cb} - \frac{1}{3R} v_{Cc}, \qquad \text{(A.44)}$$

$$i_{oc} = -\frac{1}{3R} v_{Ca} - \frac{1}{3R} v_{Cb} + \frac{2}{3R} v_{Cc}. \qquad \text{(A.45)}$$

Ahora, teniendo en cuenta las expresiones (A.21), (A.22) y (A.23) y recordando que las corrientes en los capacitores están dadas por las ecuaciones en (A.25), tenemos que las ecuaciones diferenciales de primer orden de las tensiones en los capacitores resultan de la siguiente forma:

$$\dot{v}_{Ca} = \frac{i_a}{C} - \frac{2}{3RC} v_{Ca} + \frac{1}{3RC} v_{Cb} + \frac{1}{3RC} v_{Cc}, \qquad \text{(A.46)}$$

$$\dot{v}_{Cb} = \frac{i_b}{C} + \frac{1}{3RC} v_{Ca} - \frac{2}{3RC} v_{Cb} + \frac{1}{3RC} v_{Cc}, \qquad \text{(A.47)}$$

$$\dot{v}_{Cc} = \frac{i_c}{C} + \frac{1}{3RC} v_{Ca} + \frac{1}{3RC} v_{Cb} - \frac{2}{3RC} v_{Cc}. \qquad \text{(A.48)}$$

Con las ecuaciones (A.18), (A.19) y (A.20) junto a las ecuaciones (A.46), (A.47) y (A.48) generan la ecuación de estado de la planta:

Eligiendo el vector de estados como $\begin{bmatrix} \dot{i}_a & \dot{i}_b & \dot{i}_c & \dot{v}_{Ca} & \dot{v}_{Cb} & \dot{v}_{Cc} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, la ecuación de estado resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{i}_b \\ \dot{i}_c \\ \dot{v}_{Ca} \\ \dot{v}_{Cb} \\ \dot{v}_{Cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3L_o} & \frac{1}{3L_o} & \frac{1}{3L_o} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3L_o} & -\frac{2}{3L_o} & \frac{1}{3L_o} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3L_o} & \frac{1}{3L_o} & -\frac{2}{3L_o} \\ \frac{1}{C} & 0 & 0 & -\frac{2}{3RC} & \frac{1}{3RC} & \frac{1}{3RC} \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 & \frac{1}{3RC} & -\frac{2}{3RC} & \frac{1}{3RC} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} & \frac{1}{3RC} & \frac{1}{3RC} & -\frac{2}{3RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ v_{Ca} \\ v_{Cb} \\ v_{Cc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3L_o} & \frac{1}{3L_o} \\ -\frac{1}{3L_o} & \frac{1}{3L_o} \\ -\frac{1}{3L_o} & -\frac{2}{3L_o} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{12pwm} \\ u_{23pwm} \end{bmatrix}$$