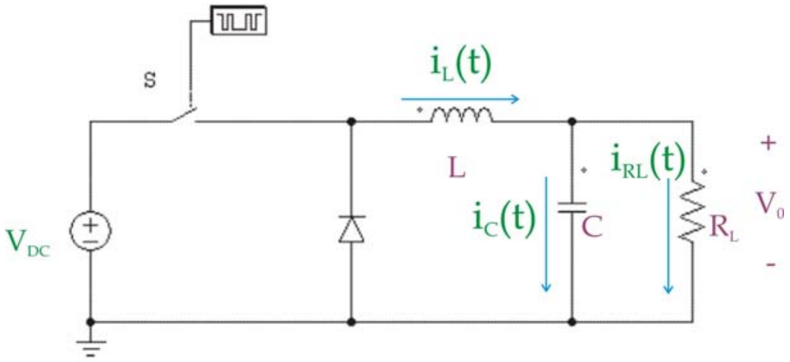
Ejercicio Nº 7:

Convertidor conmutado CC-CC reductor



Objetivo:

Determinación de la expresión de la dinámica del sistema por medio de variables de estados promedio en función del ciclo de trabajo $d(t)$ y su representación lineal alrededor de un punto de operación.

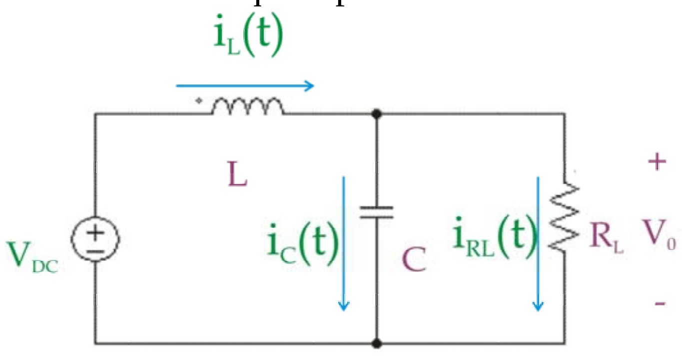
Desarrollo:

Para resolver este ejercicio analizaremos los dos estados de la llave por separado. Las variables de estados que tomaremos son: La corriente en el inductor "$i_L(t)$" y la tensión en el capacitor "$v_C(t)$". La salida del sistema es también la tensión en el capacitor $y(t) = v_0(t) = v_C(t)$

Análisis de cada estado que toma la llave "S"

Llave cerrada:

En este caso el circuito que representa este estado es:



Las ecuaciones dinámicas son:

$$(7.1) \qquad V_{cd}(t) = V_i(t) = L\frac{di_T(t)}{dt} + v_C(t)$$

$$(7.2) \qquad i_T(t) = i_L(t) = i_C(t) + i_{RL}(t)$$

$$(7.3) \qquad i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$(7.4) \qquad i_{RL}(t) = \frac{v_C(t)}{R_L}$$

De *(7.1) tenemos:* $\boxed{\dot{i}_L(t) = \frac{1}{L}V_i(t) - \frac{1}{L}v_C(t)}$

De las *(7.2), (7.3) y (7.4)*: $i_L(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R_L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{v}_C(t) = \frac{1}{C}i_L(t) - \frac{v_C(t)}{CR_L}}$

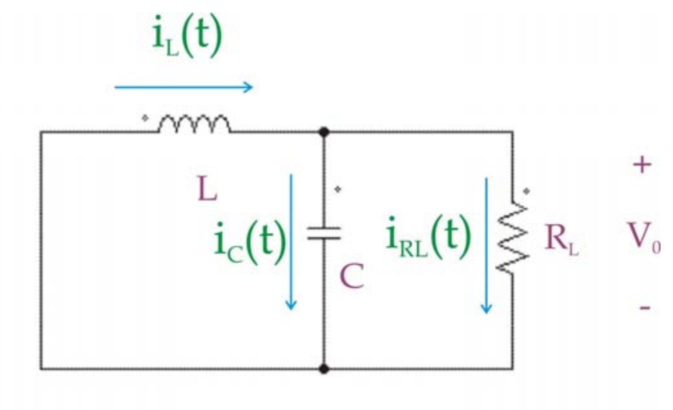
Por lo tanto la representación en variables de estado de esta situación 1 es:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ \dot{v}_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} V_i(t) \qquad (7.5)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} V_i(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} \qquad (7.6)$$

<u>Llave abierta:</u>

El circuito que representa este estado es:



Las ecuaciones dinámicas son:

$$(7.7) \qquad i_T(t) = i_L(t) = i_C(t) + i_{RL}(t)$$

$$(7.8) \qquad i_C(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$(7.9) \qquad i_{RL}(t) = \frac{1}{R_L}v_C(t)$$

$$(7.10) \qquad v_L(t) = v_C(t) = v_0(t)$$

De *(7.7), (7.8) y (7.9) tenemos:* $i_T(t) = i_L(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{R_L}v_C(t)$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{v}_C(t) = \frac{1}{C}i_L(t) - \frac{1}{CR_L}v_C(t)}$$

De *(7.10):* $v_L(t) = v_C(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{di_L(t)}{dt} = \frac{1}{L}v_C(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{i}_L(t) = \frac{1}{L}v_C(t)}$

Por lo tanto la representación en variables de estado de esta situación 2 es:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ \dot{v}_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} V_i(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ \dot{v}_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}$$

(7.11)

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} V_i(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} \qquad (7.12)$$

Ahora debemos ponderar en el tiempo las situaciones de llave cerrada y abierta para finalmente obtener una representación promedio en variables de estado, en función del ciclo de trabajo “d.”

De la primera situación “*llave cerrada*” obtuvimos:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_L} \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{D}_1 = 0$$

De la segunda situación "*llave abierta*"…

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & +\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{CR_L} \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{D}_2 = 0$$

La representación promedio resulta de realizar la siguiente operación:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A}_P &= \mathbf{A}_1 d + \mathbf{A}_2(1-d) \\ \mathbf{B}_P &= \mathbf{B}_1 d + \mathbf{B}_2(1-d) \\ \mathbf{C}_P &= \mathbf{C}_1 d + \mathbf{C}_2(1-d) \\ \mathbf{D}_P &= \mathbf{D}_1 d + \mathbf{D}_2(1-d) \end{aligned}\right\} \qquad \text{Desde este tenemos:} \quad \mathbf{A}_P = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{2}{L}d + \dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{CR_L} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_P = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L}d \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{C}_P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{D}_P = 0$$

El resultado es el siguiente:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{2}{L}d + \dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{CR_L} \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L}d \\ 0 \end{bmatrix} V_i; \qquad y(t) = v_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

Como este modelo no es lineal, ahora trabajaremos para encontrar uno que se comporte linealmente alrededor de un punto de operación, reemplazando d por u y V_i por w tenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ \dot{v}_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} f_1(x,u,w) \\ f_1(x,u,w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{2u}{L}x_2 + \dfrac{1}{L}x_2 + \dfrac{u}{L}w \\ \dfrac{1}{C}x_1 - \dfrac{1}{CR_L}x_2 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} h(x,u,w) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2$$

Linealizando alrededor de este punto de operación: $x_{10} = I_L$, $x_{20} = V_C$; $u_0 = D$, $w_0 = V_i$
a cada matriz por separado…

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x_0, u_0, w_0} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2u}{L} + \frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2D}{L} + \frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_L} \end{bmatrix};$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{x_0, u_0, w_0} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{L} x_2 + \frac{1}{L} w \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x_0, u_0, w_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \hat{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial w} \\ \frac{\partial f_2}{\partial w} \end{bmatrix}_{x_0, u_0, w_0} = \begin{bmatrix} \frac{u}{L} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{D}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los desvíos alrededor del punto de operación son:

$$\Delta x_1 = x_1 - I_L = \hat{i}_L\ ; \quad \Delta x_2 = x_2 - v_C = \hat{v}_C\ ; \quad \Delta u = u - D = \hat{u}\ ;$$
$$\Delta w = w - V_i = \hat{v}_i\ ; \quad \Delta y = y - V_c = \hat{v}_c$$

Finalmente la representación en variables de estado promedio linealizada es:

$$\overset{\wedge}{\dot{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{2D}{L} + \dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & -\dfrac{1}{CR_L} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \hat{i}_L \\ \hat{v}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{D}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \hat{v}_i$$

Ecuacion de Dinamica de Estado

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \hat{i}_L \\ \hat{v}_C \end{bmatrix} = \hat{v}_C$$

Ecuacion de la salida del sistema