Discretización de la Planta de Tiempo Continuo para un sistema representado por la ecuación de estado

Obtención de la ecuación de estado discreta

Para la obtención del modelo en tiempo discreto de la planta, es importante que se tenga en cuenta el tiempo que el procesador necesita para calcular la ley de control mas el tiempo que el conversor A/D invierte en la adquisición y muestreo de las variables usadas para el calculo del controlador, tiempo que denominamos "T_d" (*time delay*). Este tiempo debe ser tenido en cuenta, ya que dependiendo de la complejidad del controlador a ser implementado en un dado procesador digital, T_d puede llegar a ser del orden de grandeza del período de muestreo "T". O sea, este dependerá de la velocidad de cálculo del procesador utilizado (MIPS – *Million Instructions per Second*) y del tiempo de conversión del conversor AD. La Figura 1 muestra un diagrama de tiempos del procesador digital donde se muestran las interrupciones al μP, los instantes de muestreo, el contador (*timer*) que efectúa las interrupciones, la acción media de control discreta y la acción de control aplicada por el actuador. Esta figura muestra que para el caso que aquí tratamos ese tiempo es igual a la mitad del período de muestreo T. Es importante notar que el período de muestreo, para este caso en particular es igual al período de la acción del actuador $u(t)$. Si analizamos la Figura 1, se observa que la acción de control discreta que esta siendo aplicada a la entrada de la planta, durante el intervalo de muestreo, por ejemplo entre $(k\text{-}1)T$ y kT, no depende solamente de la acción de control actual $u(kT)$, sino también de la acción de control anterior, o sea $u[(k\text{-}1)T]$, la cual debe ser considerada en el modelo discreto de espacio de estado.

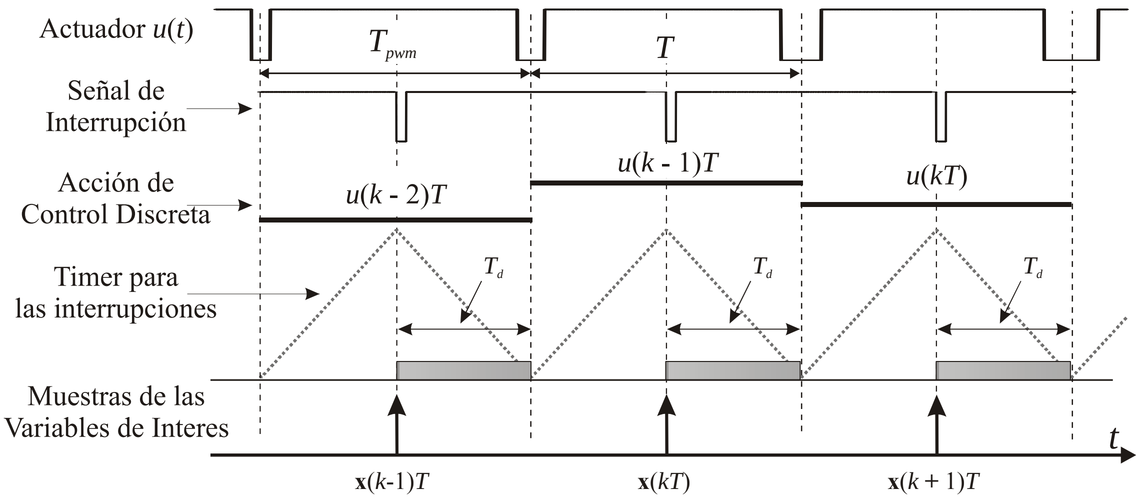

Figura 1 – Acción media de control discreta, instantes de muestreo, señal de interrupción y acción del actuador.

Con el objetivo de obtener la ecuación de estado discreta, vamos a solucionar la ecuación diferencial entrada-estado, desde el inicio hasta el fin de un intervalo de discretización, entre los instante kT y $(k+1)T$. Con el objetivo de hacer una revisión de la solución de la ecuación de espacio de estado, consideremos un sistema SISO lineal e invariante en el tiempo sin atraso T_d, cuya ecuación de estado es dada por (1).

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \tag{1}$$

En (1), $\mathbf{x}(t)$ es el vector de estado de dimensión $n \times 1$, $u(t)$, la señal de entrada, un escalar de dimensión $r \times 1$, $\mathbf{A}$, una matriz constante de dimensión $n \times n$ y $\mathbf{B}$ una matriz constante de dimensión $n \times r$.

La solución de la ecuación de estado (1) es dada por:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\,\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\,\mathbf{B}\,u(\tau)\,d\tau \tag{2}$$

Se asume que la señal de entrada $u(\tau)$ se mantiene constante durante un período de muestreo "T". La representación en tiempo discreto de la (1), para $t = k$T, y k = 0,1,2,....., se transforma en la siguiente ecuación a diferencia:

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = \mathbf{G}(T)\,\mathbf{x}(kT) + \mathbf{H}(T)\,u(kT) \tag{3}$$

Nótese que el valor de las matrices **G** y **H** dependen del periodo de muestreo T. Siendo que el periodo de muestreo es fijo, **G** y **H** son matrices constantes. Para determinar **G**(T) y **H**(T), utilizaremos la ecuación (2). Sabiendo entonces que $u(t)$ es constante durante un intervalo de muestreo, o sea,

$$u(t)=u(kT)\approx ctte. \quad \text{para} \quad kT\le t<(k+1)T\,. \tag{4}$$

Solucionando la ecuación (2) para $t = (k + 1)T$, se tiene

$$\mathbf{x}[(k+1)T]=e^{\mathbf{A}(k+1)T}\,\mathbf{x}(0)+e^{\mathbf{A}(k+1)T}\int_0^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\tau}\,\mathbf{B}\,u(\tau)\,d\tau\,. \tag{5}$$

y para $t = kT$,

$$\mathbf{x}(kT)=e^{\mathbf{A}kT}\,\mathbf{x}(0)+e^{\mathbf{A}kT}\int_0^{kT} e^{-\mathbf{A}\tau}\,\mathbf{B}u(\tau)\,d\tau \tag{6}$$

Multiplicando la última ecuación a ambos lados del signo igual por $e^{\mathbf{A}T}$

$$e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT)=e^{\mathbf{A}(k+1)T}\,\mathbf{x}(0)+e^{\mathbf{A}(k+1)T}\int_0^{kT} e^{-\mathbf{A}\tau}\,\mathbf{B}u(\tau)\,d\tau \tag{7}$$

y sustrayendo esta última de la ecuación (5) tenemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}[(k+1)T]-e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT)=&\left[e^{\mathbf{A}(k+1)T}\,\mathbf{x}(0)+e^{\mathbf{A}(k+1)T}\int_0^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\tau}\,\mathbf{B}\,u(\tau)\,d\tau\right]-\\ &-\left[e^{\mathbf{A}(k+1)T}\,\mathbf{x}(0)+e^{\mathbf{A}(k+1)T}\int_0^{kT} e^{-\mathbf{A}\tau}\,\mathbf{B}u(\tau)\,d\tau\right]\end{aligned}\,. \tag{8}$$

y nos queda:

$$\mathbf{x}[(k+1)T]=e^{\mathbf{A}T}\,\mathbf{x}(kT)+e^{\mathbf{A}(k+1)T}\int_{kT}^{(k+1)T} e^{-\mathbf{A}\tau}\,\mathbf{B}u(\tau)\,d\tau \tag{9}$$

Mediante la suposición hecha en (4) es posible sustituir $u(\tau) = u(kT) = ctte.$, en la última ecuación,

$$\mathbf{x}[(k+1)T]=e^{\mathbf{A}T}\,\mathbf{x}(kT)+\int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}[(k+1)T-\tau]}\,\mathbf{B}\,u(kT)\,d\tau \tag{10}$$

Haciendo un cambio de variables es posible representar la última ecuación de una forma más simple. Elegimos a v como variable de integración

siendo $v=(k+1)T-\tau \quad \Rightarrow \quad dv=-\,d\tau$, por lo tanto los nuevos límites de integración son

$$\begin{aligned}&\text{para } \tau=k\mathrm{T} &&\Rightarrow\ v=T\\ &\text{para } \tau=(k+1)\mathrm{T} &&\Rightarrow\ v=0\end{aligned},$$

$$\mathbf{x}[(k+1)T]=e^{\mathbf{A}T}\,\mathbf{x}(kT)-\int_T^0 e^{\mathbf{A}v}\,\mathbf{B}\,u(kT)\,dv \tag{11}$$

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = e^{\mathbf{A}T}\,\mathbf{x}(kT) + \int_0^T e^{\mathbf{A}v}\,\mathbf{B}\,u(kT)\,dv \tag{12}$$

De la ecuación (12) se tiene:

$$\mathbf{G}(T) = e^{\mathbf{A}T} \tag{13}$$

$$\mathbf{H}(T) = \left(\int_0^T e^{\mathbf{A}v}\,dv\right)\mathbf{B} \tag{14}$$

Resta entonces solucionar la integral en (14), la cual resulta:

$$\int_0^T e^{\mathbf{A}v}\,dv = \mathbf{A}^{-1}\left[e^{\mathbf{A}v}\right]_0^T = \mathbf{A}^{-1}\,(e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I}) \tag{15}$$

Asi, la matriz **H**(T) puede ser calculada por la siguiente ecuación

$$\mathbf{H}(T) = \mathbf{A}^{-1}\,(e^{\mathbf{A}T} - \mathbf{I})\,\mathbf{B}\,, \tag{16}$$

siempre que exista la inversa de la matriz **A**.

Podemos extender este análisis realizado, para el caso donde exista un atraso de transporte T_d en la aplicación de la acción de control. Consideremos el diagrama de tiempos de la Figura 1 y apliquemos la ecuación (2) entre dos instantes de muestreo, como por ejemplo, entre kT y $(k + 1)T$.

1°) entre los instantes, donde se aplica $u[(k-1)T]$, $t_0 = kT$ y $t = (kT + T_d)$ tenemos

$$\mathbf{x}(kT+T_d) = e^{\mathbf{A}[(kT+T_d)-kT]}\,\mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{kT+T_d} e^{\mathbf{A}[(kT+T_d)-\tau]}d\tau\,\mathbf{B}u[(k-1)T]\,, \tag{17}$$

2°) entre los instantes, donde se aplica $u(kT)$, $t_0 = (kT + T_d)$ y $t = (k+1)T$ tenemos

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = e^{\mathbf{A}[(k+1)T-(kT+T_d)]}\,\mathbf{x}(kT+T_d) + \int_{kT+T_d}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}[(k+1)T-\tau]}d\tau\,\mathbf{B}u(kT)\,, \tag{18}$$

Sustituyendo (17) en (18) se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{x}[(k+1)T] = e^{\mathbf{A}[(k+1)T-(kT+T_d)]}&\left[e^{\mathbf{A}[(kT+T_d)-kT]}\mathbf{x}(kT) + \int_{kT}^{kT+T_d} e^{\mathbf{A}[(kT+T_d)-\tau]}d\tau\,\mathbf{B}u[(k-1)T]\right] \\ &+ \int_{kT+T_d}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}[(k+1)T-\tau]}\,d\tau\,\mathbf{B}u(kT)\end{aligned}\,, \tag{19}$$

Simplificando términos y límites de integración se obtiene finalmente la ecuación discreta del modelo con atraso de transporte

$$\mathbf{x}[(k+1)T] = e^{\mathbf{A}T}\mathbf{x}(kT) + \int_0^{T_d} e^{\mathbf{A}(T-\tau)}d\tau\,\mathbf{B}u[(k-1)T] + \int_0^{T-T_d} e^{\mathbf{A}(T-T_d-\tau)}d\tau\,\mathbf{B}u(kT)\,, \tag{20}$$

Haciendo la comparación con los resultados obtenidos en (12), (13) y (14) tenemos

$$\mathbf{G} = e^{\mathbf{A}T}, \tag{21}$$

$$\mathbf{H_0} = \left(\int_0^{T_d} e^{\mathbf{A}(T-\tau)} d\tau\right)\mathbf{B}, \quad \mathbf{H_1} = \left(\int_0^{T-T_d} e^{\mathbf{A}(T-T_d-\tau)} d\tau\right)\mathbf{B} \tag{22}$$

Nos resta solucionar las integrales en $\mathbf{H_0}$ y $\mathbf{H_1}$ para de esta forma obtener expresiones simples para el cálculo de las mismas, de forma similar a la ecuación (16).

Solución para $\mathbf{H_0}$:

Sea $\mathbf{H_0} = \left(\int_0^{T_d} e^{\mathbf{A}(T-\tau)} d\tau\right)\mathbf{B}$. Haciendo cambio de variables se tiene que:

siendo $v = T - \tau \quad \Rightarrow \quad dv = -d\tau$, por lo tanto los límites de integración son,

para $\tau = 0 \quad \Rightarrow \quad v = T$

para $\tau = T_d \quad \Rightarrow \quad v = T - T_d$

y $\mathbf{H_0}$ en función de las nuevas variables de integración queda:

$$\mathbf{H_0} = -\int_T^{T-T_d} e^{\mathbf{A}v} dv\,\mathbf{B} = \int_{T-T_d}^{T} e^{\mathbf{A}v} dv\,\mathbf{B} \tag{23}$$

Efectuándose la última integral $\mathbf{H_0}$ resulta

$$\mathbf{H_0} = \mathbf{A}^{-1}\left[e^{\mathbf{A}v}\right]_{T-T_d}^{T} \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\left[e^{\mathbf{A}T} - e^{\mathbf{A}(T-T_d)}\right]\mathbf{B} \tag{24}$$

Premultiplicando el corchete de la (24) por $e^{\mathbf{A}(T-T_d)}$ podemos reescribir la última de la siguiente forma:

$$\mathbf{H_0} = \mathbf{A}^{-1} e^{\mathbf{A}(T-T_d)}\left[e^{\mathbf{A}T_d} - \mathbf{I}\right]\mathbf{B} \tag{25}$$

Solución para $\mathbf{H_1}$:

Sea $\mathbf{H_1} = \left(\int_0^{T-T_d} e^{\mathbf{A}(T-T_d-\tau)} d\tau\right)\mathbf{B}$. Haciendo cambio de variables se tiene que:

siendo $v = T - T_d - \tau \Rightarrow dv = -d\tau$, por lo tanto los límites de integración son,

para $\tau = 0 \Rightarrow v = T - T_d$

para $\tau = T - T_d \Rightarrow v = 0$

y $\mathbf{H_1}$ en función de las nuevas variables de integración resulta:

$$\mathbf{H_1} = -\int_{T-T_d}^{0} e^{\mathbf{A}v} dv\,\mathbf{B} = \int_{0}^{T-T_d} e^{\mathbf{A}v} dv\,\mathbf{B} \tag{26}$$

Solucionando la última integral se tiene:

$$\mathbf{H_1} = \mathbf{A}^{-1}\left[e^{\mathbf{A}v}\right]_0^{T-T_d}\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\left[e^{\mathbf{A}(T-T_d)} - \mathbf{I}\right]\mathbf{B} \tag{27}$$

Finalmente la matriz $\mathbf{H_1}$ nos queda:

$$\mathbf{H_1} = \mathbf{A}^{-1}\left[e^{\mathbf{A}(T-T_d)} - \mathbf{I}\right]\mathbf{B} \tag{28}$$

La ecuación (20) puede ser escrita en forma matricial resultando en la ecuación de estados discreta (29), donde la variable adicional, que denominamos $u_d(k)$, modela el atraso de transporte T_d debido a la implementación digital.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ u_d(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{H_0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ u_d(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{H_1} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} u(k) \tag{29}$$

Las matrices $\mathbf{G}$, $\mathbf{H_0}$ y $\mathbf{H_1}$ se obtienen a partir de las ecuaciones (21), (25) y (28).

Con el objetivo de simplificar la notación, vamos a definir un nuevo vector de estados, o sea:

$$\boldsymbol{\psi}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ u_d(k) \end{bmatrix} \tag{30}$$

y

$$\mathbf{G}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{H_0} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{H}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{H_1} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{31}$$

donde $\mathbf{G_p}$ y $\mathbf{H_p}$ son las matrices de la planta en tiempo discreto que incluyen el tiempo de atraso de la implementación digital. Por lo tanto, se puede reescribir la (29) de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\psi}(k+1) = \mathbf{G}_P\boldsymbol{\psi}(k) + \mathbf{H}_P\, u(k) \tag{32}$$

Esta última se adecua para efectuar el proyecto discreto del controlador en el espacio de estados, utilizando alguna técnica conocida, como por ejemplo de reubicación de polos o del regulador lineal cuadrático discreto.