Representación de espacio de estados de sistemas en tiempo discreto

Conceptos sobre el método de espacio de estado

El método de espacio de estado está basado en la descripción de un sistema de ecuaciones en términos de "n" ecuaciones diferencia o diferenciales las cuales pueden ser combinadas en una ecuación a diferencia o diferencial vector-matriz de 1er orden.

El uso de la notación vector-matriz simplifica notablemente la representación matemática de sistemas representados por ecuaciones.

Las técnicas de diseño en el espacio de estado posibilitan al ingeniero el diseño de sistemas de control con respecto al conjunto de ~~[illegible]~~ determinados índices de desempeño. Además, el diseño en el espacio de estado, puede ser llevado a cabo para una clase de entradas, en lugar de una entrada específica tal como impulso, escalón o senoidal.
También, los métodos de espacio de estado, posibilitan al ingeniero incluir las condiciones iniciales del sistema, lo q' no es posible en los métodos convencionales o clásicos.

A modo de repaso, se darán aquí algunas definiciones útiles:

Estado:

El "estado" de un sistema dinámico es el mínimo conjunto de variables de estado, tal q' el conocimiento o información de estas variables en $t=t_0$ sumado al conocimiento o información de la entrada en $t \geq t_0$, determina completamente el comportamiento del sistema $\forall\, t \geq t_0$.

Variables de estado:

Las variables de estado de un sist. dinámico son las variables del menor conjunto de variables q' determinan el estado del sistema dinámico, o dicho de otra forma, son las "n" variables $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ q' describen completamente el comportamiento del sistema dinámico.

Nótese q' las variables de estado no necesitan ser físicamente medibles u observables. Variables q' no representan una cantidad física y aquellas q' no son medibles ni observables, pueden ser elegidas como variables de estado. Esta libertad en la elección del conjunto de variables es una ventaja en los métodos de análisis ~~en~~ espacio de estado.

Sin embargo, desde el punto de vista práctico es conveniente elegir como variables de estado, a cantidades facilmente medibles, dado q' las leyes de control óptimas requieren de la realimentación de todos los estados con una adecuada ponderación.

Vector de estados:

Las "n" variables de estado q' describen completamente el comportamiento del sistema (de un determinado sistema) pueden ser considerados las "n" componentes de un vector "**x**", el cual es denominado: vector de estado.

Un vector de estado es por lo tanto, un vector q' determina de forma única el estado del sistema **x**(t) ∀ $t \geq t_0$, una vez q' el estado en $t = t_0$ es dado y la entrada **u**(t) ∀ $t \geq t_0$ es especificada.

Espacio de estado:

El "n" espacio dimensional, cuyos ejes de coordenadas consisten de los ejes $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ es llamado: espacio de estado. Cada estado puede ser representado por un punto en el espacio de estado.

Ecuaciones de espacio de estado:

En el análisis de espacio de estado estamos interesados en 3 tipos de variables involucradas en la modelación de sistemas dinámicos: variables de entrada, variables de salida y variables de estado. Como ya se sabe, la representación de espacio de estado de un sistema no es única excepto q' el número de variables de estado es el mismo p' cualquiera de las representaciones de estado del mismo sistema.

Para sistemas discretos variantes en el tiempo (lineales o no lineales) la ecuación de estado puede escribirse como:

$$X(k+1) = f[X(k), U(k), k]$$

y la ecuación de salida

$$Y(k) = g[X(k), U(k), k]$$

Para sistemas lineales discretos y variantes en el tiempo las ecuaciones de estado y de salida pueden simplificarse de la sig. forma:

$$X(k+1) = G(k)X(k) + H(k)U(k)$$
$$Y(k) = C(k)X(k) + D(k)U(k)$$

$X(k)$ = vector de estado de orden "n"
$Y(k)$ = vector de salida de orden "m"
$U(k)$ = vector de entrada de orden "r"
$G(k)$ = matriz de estado de orden "n×n"
$H(k)$ = matriz de entrada de orden "n×r"
$C(k)$ = matriz de salida de orden "m×n"
$D(k)$ = matriz de transmisión directa de orden "m×r"

La variable "k" como argumento de las matrices q' definen el sistema, indica q' el mismo es variante en el tiempo. Si "k" no aparece de forma explícita, entonces se asume q' el sistema es invariante.

en el tiempo o constante y las ecuaciones anteriores pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{G}\,\mathbf{X}(k) + \mathbf{H}\,\mathbf{U}(k) \qquad (1)$$

$$\mathbf{Y}(k) = \mathbf{C}\,\mathbf{X}(k) + \mathbf{D}\,\mathbf{U}(k) \qquad (2)$$

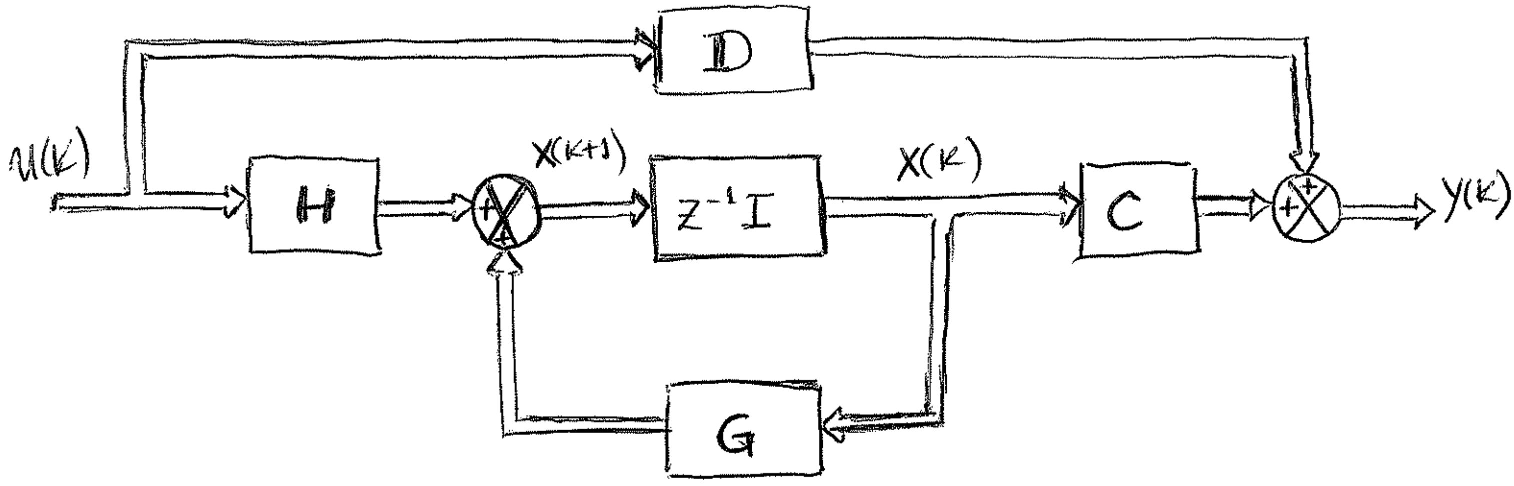


Figura 1

La figura 1 representa el diagrama de bloques de un sistema dinámico en tiempo discreto definido por las ecuaciones (1) y (2).

Nótese que U(K) denota tanto el vector de entrada al sistema y el vector de control, por lo tanto, es importante diferenciar o interpretar si es el vector de entrada o el vector de control, según las circunstancias.

Solución de la ecuación de espacio de estado en tiempo discreto.

Aquí se presenta la solución de la ec. de espacio de estado en tiempo discreto, lineal e invariante en el tiempo;

$$X(K+1) = G\,X(K) + H\,u(K)$$
$$Y(K) = G\,X(K) + D\,u(K)$$

por recursividad y luego por el método de la transformada Z.

Las ecuaciones en tiempo discreto son muchos más fáciles de resolver q' las ecuaciones diferenciales dado q' las primeras pueden resolverse facilmente por procedimientos recursivos; los cuales son simples y convenientes para cálculos por computadora.

Considérense las ecuaciones de estado y de salida (1) y (2). La solución de (1) para todo entero positivo K puede ser obtenida en forma recursiva, como sigue:

$$X(1) = G\,X(0) + H\,u(0)$$
$$X(2) = G\,X(1) + H\,u(1) = G^2 X(0) + GH\,u(0) + H\,u(1)$$
$$X(3) = G\,X(2) + H\,u(2) = G^3 X(0) + G^2 H\,u(0) + GH\,u(1) + H\,u(2)$$
$$\vdots$$

Esta solución puede expresarse de forma genérica como:

$$(3) \qquad X(K) = G^K X(0) + \sum_{j=0}^{K-1} G^{K-j-1} H\,u(j), \quad K = 1, 2, 3, \ldots$$

Se observa q' la solución (3) consta de 2 partes:

1- $G^K X(0)$, q' representa la contribución de las condiciones iniciales de los estados y

2- $\sum_{j=0}^{K-1} G^{K-j-1} H\,u(j)$, q' representa la contribución del efecto del vector de entrada sobre los estados, donde $j = 0, 1, 2, \dots K-1$.

La salida puede obtenerse, sustituyéndose (3) en la (2):

$$Y(K) = C G^K X(0) + C \sum_{j=0}^{K-1} G^{K-j-1} H u(j) + D u(K) \qquad (4)$$

<u>Método de la transformada Z para la solución de ecuaciones de estado en tiempo discreto.</u>

Considérese la ec. de estado (1) y tómese la transformada Z a ambos lados de la ecuación:

$$Z X(Z) = G X(Z) + H U(Z) + Z X(0) \qquad (5)$$

$$(ZI - G) X(Z) = Z X(0) + H U(Z)$$

premultiplicando ambos lados por $(ZI-G)^{-1}$

$$X(Z) = (ZI-G)^{-1} Z X(0) + (ZI-G)^{-1} H U(Z) \quad (6)$$

Tomando la transformada inversa, esto da:

$$X(K) = \mathcal{Z}^{-1}[(ZI-G)^{-1} Z]\, X(0) + \mathcal{Z}^{-1}[(ZI-G)^{-1} H U(Z)] \quad (7)$$

Comparando la (7) con la (3) se tiene que:

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[(zI-G)^{-1}z\right] = G^{k} \qquad (8)$$

y

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[(zI-G)^{-1}H\,U(z)\right] = \sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1} H\,u(j) \qquad (9)$$

Nótese q. la solución por la transformada Z involucra el cálculo de la inversa de $(zI-G)$ y después la transformada inversa de cada término.

<u>Matriz función de transferencia discreta.</u>

Un sistema SISO puede ser modelado por una función de transferencia discreta, en cambio un sistema MIMO estará representado por su matriz función de transferencia.

La representación de espacio de estado de un sistema de orden "n" LIT en tiempo discreto con "r" entradas y "m" salidas, está dada por:

$$X(k+1) = G\,X(k) + H\,u(k) \qquad (10)$$

$$Y(k) = C\,X(k) + D\,u(k) \qquad (11)$$

Tomando la transformada Z de ambas ecuaciones se obtiene:

$$z\,X(z) = G\,X(z) + H\,U(z) + z\,X(0)$$

$$Y(z) = C\,X(z) + D\,U(z)$$

Dado q. la definición de función de transferencia asume condiciones iniciales nulas, $X(0) = 0$.

$$X(z) = (zI - G)^{-1} H U(z) \quad (12)$$

y $$Y(z) = [C(zI - G)^{-1} H + D] U(z) = F(z) U(z) \quad (13)$$

donde: $$F(z) = C(zI - G)^{-1} H + D \quad (14)$$

es la matriz función de transferencia discreta. de orden "$m \times r$".-

$F(z)$ caracteriza las dinámicas entre la entrada y la salida de un dado sistema en tiempo discreto.

Dado q' la inversa de $(zI - G)$ puede ser escrita como:

$$(zI - G)^{-1} = \frac{adj\,(zI - G)}{|zI - G|} \quad (15)$$

$$F(z) = \frac{C\, adj\,(zI - G)}{|zI - G|} + D \quad (16)$$

Notese q' los polos de $F(z)$, son los ceros del determinante $|zI - G| = 0$, o sea, las raíces del polinomio o ecuación característica $|zI - G| = 0$

o

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0 \quad (17)$$

donde los coeficientes a_i dependen de los elementos de G.-

Discretización de ecuaciones de espacio de estado en tiempo continuo.

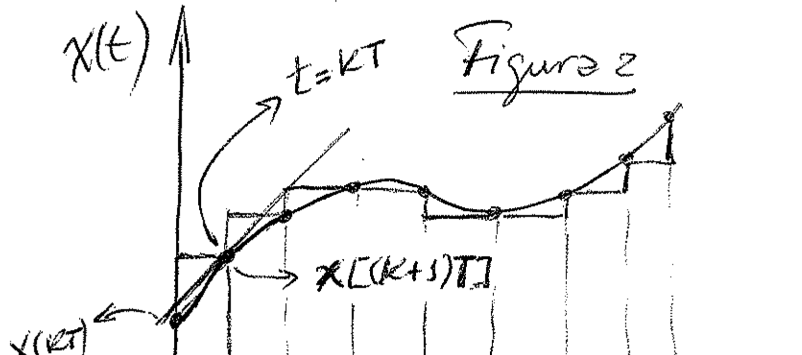
Considérese el siguiente sistema en tiempo continuo, representado por las siguientes ecuaciones de estado y de salida,

$$\dot{X}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \qquad (18)$$

$$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \qquad (19)$$

En control digital, es necesario convertir ec. de espacio de estado en tiempo continuo a su forma en tiempo discreto. Esto puede ser realizado introduciendo muestreadores y dispositivos retenedores ideales en el sistema dado por (18) y (19).-

En una primera ~~aproximación~~ instancia, este sistema puede aproximarse o discretizarse en el instante de muestreo $t = KT$, aplicándose Euler o la aproximación de diferencias hacia adelante, o sea:



$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{KT} \approx \frac{[X(K+1)T - X(KT)]}{T} \qquad (20)$$

Este resultado, q' permite discretizar una ec. diferencial de 1er orden*, puede extenderse a la ec. de estado (18):

* con coeficientes constantes.

Sustituyéndose (20) en (18) se tiene:

$$\frac{X[(K+1)T] - X(KT)}{T} \approx A\,X(KT) + B\,u(KT)$$

suponiéndose q' en un intervalo de discretización $u(t) \simeq u(KT) = $ cte.

$$X[(K+1)T] = [I + AT]\,X(KT) + B.T\,u(KT) \quad (21)$$

$$Y(KT) = C\,X(KT) + D\,u(KT) \quad (22)$$

La (21) puede escribirse de la siguiente forma:

$$X[(K+1)T] = G\,X(KT) + H\,u(KT) \quad (22)$$

donde: $G = I + A.T$ y $H = B.T$ (23)

Es importante observar q' las ecuaciones en (23) son sencillas de calcular, con la salvedad de q' las mismas dan muy buenos resultados cuando T es lo suficientemente pequeño, o lo q' lo mismo, como se afirmó en clases anteriores, cuando

$$f_m \geqslant 10 \times f_{max}$$

donde, f_m es la frecuencia de muestreo y f_{max}, la máxima componente de frecuencia contenida en la señal de interés.

Repaso de la solución de la ec. de espacio de estado en tiempo continuo:

Primero repasemos la definición de la exponencial de matriz y algunas propiedades útiles:

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots \frac{1}{k!}A^k t^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

Propiedades:

1) $A e^{At} = e^{At} \cdot A$ (se obtiene derivando e^{At})

2) $e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As}$

3) si $s = -t$, entonces

$$e^{At} e^{-At} = e^{-At} e^{At} = e^{A(t-t)} = I$$

Dado q' la inversa de e^{At} siempre existe, e^{At} es no singular.

Es importante anotar q':

4)
$$e^{(A+B)t} = e^{At} e^{Bt}, \quad \text{si } AB = BA$$
$$e^{(A+B)t} \neq e^{At} e^{Bt}, \quad \text{si } AB \neq BA$$

A continuación, reescríbase la (18) de la siguiente forma:

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = Bu(t)$$

Premultiplíquese ambos lados por e^{-At}

$$e^{-At}[\dot{x}(t) - Ax(t)] = \frac{d}{dt}[e^{-At}x(t)] = e^{-At}Bu(t)$$

Integrando la última ecuación entre 0 y t se tiene:

$$e^{-At} X(t) = X(0) + \int_0^t e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau$$

ó

$$X(t) = e^{At} X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad (24)$$

La (24) es la solución de la (18). Más aún, la solución de la ecuación diferencial de estado comienza en un estado inicial t_0, por lo q' la (24) puede generalizarse de la siguiente forma:

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} X(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad (25)$$

Utilicemos a continuación, la solución (25) para obtener la solución de la ec. de estado discreta

$$X[(K+1)T] = G X(KT) + H u(KT) \quad (26)$$

Estrictamente, G y H dependen del periodo de muestreo seleccionado, por lo q' deben escribirse como $G(T)$ y $H(T)$; pero si T es ctte, p/ un determinado sistema, puede obviarse el argumento. Es importante recordar, q' $u(t)$ es muestreada y pasa por un retenedor de orden cero, por lo que la misma se mantiene constante durante un intervalo de muestreo:

$$u(t) = u(KT) \quad \text{para } KT \leq t < (K+1)T$$

Considérese $t_0 = 0$. En $t = (K+1)T$ la (25) resulta:

$$X[(K+1)T] = e^{A(K+1)T} X(0) + \int_0^{(K+1)T} e^{A[(K+1)T - \tau]} B\,u(\tau)\,d\tau \quad (27)$$

o también:

$$X[(K+1)T] = e^{A(K+1)T} X(0) + e^{A(K+1)T} \int_0^{(K+1)T} e^{-A\tau} B\,u(\tau)\,d\tau \quad (28)$$

En $t = KT$, la (25) resulta:

$$X[KT] = e^{AKT} X(0) + e^{AKT} \int_0^{KT} e^{-A\tau} B\,u(\tau)\,d\tau \quad (29)$$

Multiplicando (29) por e^{AT} y restando luego de (28) miembro a miembro, se tiene:

$$e^{AT} X(KT) = e^{A(K+1)T} X(0) + e^{A(K+1)T} \int_0^{KT} e^{-A\tau} B\,u(\tau)\,d\tau$$

$$X[(K+1)T] - e^{AT} X(KT) = \cancel{e^{A(K+1)T} X(0)} + e^{A(K+1)T} \int_0^{(K+1)T} e^{-A\tau} B\,u(\tau)\,d\tau -$$

$$- \cancel{e^{A(K+1)T} X(0)} + e^{A(K+1)T} \int_0^{KT} e^{-A\tau} B\,u(\tau)\,d\tau$$

$$\int_0^{(K+1)T} f(\tau)\,d\tau - \int_0^{KT} f(\tau)\,d\tau = \int_{KT}^{(K+1)T} f(\tau)\,d\tau$$

$$X[(K+1)T] = e^{AT} X(KT) + e^{A(K+1)T} \int_{KT}^{(K+1)T} e^{-A\tau} B\,u(\tau)\,d\tau$$

dado q' $u(t) = u(KT)$ es constante durante el intervalo de muestreo T, o sea, durante el intervalo de integración $KT \leq t < (K+1)T$, $u(\tau) = u(KT)$

La última expresión puede escribirse de la siguiente forma:

$$X[(k+1)T] = e^{AT} X(kT) + e^{AT}\int_0^T e^{-A\tau} B\, u(kT)\, d\tau$$

$$X[(k+1)T] = e^{AT} X(kT) + \int_0^T e^{A(T-\tau)} B\, u(kT)\, d\tau \quad (30)$$

Haciendo un cambio de variables de integración

$\lambda = T-\tau \Rightarrow d\lambda = -d\tau$

$$X[(k+1)T] = e^{AT} X(kT) + \int_0^T e^{A\lambda} B\, u(kT)\, d\lambda \quad (31)$$

De la (31) se definen:

$$G(T) = e^{AT} \quad (32)$$

$$H(T) = \left(\int_0^T e^{A\lambda} d\lambda\right) B \quad (33)$$

la (31) resulta entonces:

$$X[(k+1)T] = G\, X(kT) + H\, u(kT) \quad (34)$$

q' en definitiva es la (26). La ecuación de salida es:

$$y(kT) = C\, X(kT) + D\, u(kT) \quad (35)$$

C y D son matrices constantes q' no dependen del período de muestreo T.—

Si A es una matriz no singular, entonces H puede obtenerse solucionando la (33):

$$H = \left(\int_0^T e^{A\lambda} d\lambda\right) B = A^{-1}(e^{AT} - I) B = (e^{AT} - I) A^{-1} B \quad (36)$$

Nótese que la (30) podría haberse obtenido también, sustituyendo $t_0 = KT$ y $t = (K+1)T$ en la (25):

$$X[(K+1)T] = e^{A[\cancel{KT}+T-\cancel{KT}]} X(KT) + \int_{KT}^{(K+1)T} e^{A[(K+1)T-\tau]} B\,u(\tau)\,d\tau$$

$$X[(K+1)T] = e^{AT} X(KT) + \int_{0}^{T} e^{A(T-\tau)} B\,u(KT)\,d\tau \quad (37)$$

Cálculo de e^{AT}.

- Desarrollo en Serie de Taylor. El desarrollo en serie de e^{at} visto anteriormente, puede extenderse al caso de exponencial de matriz, sustituyendo el tiempo t por el periodo de muestreo T:

$$e^{AT} = I + AT + \frac{1}{2!} A^2 T^2 + \dots + \frac{1}{K!} A^K T^K = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{A^K T^K}{K!}$$

Si se cumple la condición establecida para la frecuencia de muestreo de $f_m \geq 10 \times f_{max}$, es suficiente tomar los 2 primeros términos de la expansión en serie, esto es:

$$e^{AT} \simeq I + A.T \qquad (38)$$

Si se sustituye la (38) y (36) en la ec. de estado discreta (34), se tiene:

$$X[(K+1)T] = [I + A.T]\,X(KT) + A^{-1}(\cancel{I} + A.T - \cancel{I})\,B\,u(KT)$$

siendo $A^{-1}.A = I$

$$X[(k+1)T] = (I + AT)X(kT) + (B.T)u(kT) \quad (39)$$

La (39) es la misma expresión q' se obtuvo mediante la aproximación de Euler.

- Método de la transformada de Laplace.

De la teoría para la solución de e^{At} en tiempo continuo, se sabe q':

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]$$

donde: $$(sI-A)^{-1} = \frac{adj\,(sI-A)}{|sI-A|}$$

siendo q' el determinante de $(sI-A)$ es un polinomio en s dado por

$$|sI-A| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

Veamos la aplicación de este método, directamente con un ejemplo. Sea el siguiente sistema en tiempo continuo, dado por su función de transferencia

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

Este sistema puede ser representado en el espacio de estado por la sig. ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \;\; 0][x_1 \;\; x_2]^T$$

Para obtener la forma discreta de la anterior debemos obtener las matrices en tiempo discreto G y H. Para esto suponemos un periodo de muestreo $T = 0{,}1$ seg. (18)

- Cálculo de $G = e^{AT}$

$$\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} = (sI - A)$$

$|sI - A| = s^2 + 2s = 0$ cuyas raíces son $s_1 = 0$ y $s_2 = -2$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{adj\,(sI-A)}{s(s+2)}$$

$$adj\,(sI - A) = \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s+2)} \times \begin{bmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/s & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1/s & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{(s+2)} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G = e^{AT} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}0906 \\ 0 & 0{,}8187 \end{bmatrix}$$

$$H = \left(\int_0^T e^{At} dt \right) B = \left\{ \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1-e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} dt \right\} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a- $$H = \int_0^T \begin{bmatrix} 1/2(1-e^{-2t}) \\ e^{-2t} \end{bmatrix} dt$$

b- $$\int_0^T \frac{1}{2} dt - \int_0^T \frac{1}{2} e^{-2t} dt = \frac{1}{2} T - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-2T}}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(T + \frac{e^{-2T} - 1}{2} \right)$$

c- $$\int_0^T e^{-2t} dt = -\frac{1}{2} e^{-2t} \Big|_0^T = \frac{1}{2} - \frac{e^{-2T}}{2} = \frac{1}{2}(1 - e^{-2T})$$

Sustituyéndose $T = 0,1$ seg, la matriz $H(T)$ resulta:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(T + \frac{e^{-2T} - 1}{2} \right) \\ \frac{1}{2}(1 - e^{-2T}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,04682 \\ 0,09063 \end{bmatrix}$$

La discretización de la matrices en tiempo continuo pueden realizarse utilizando el toolbox de Control de Matlab, de la siguiente forma: Dadas las matrices A y B y el periodo de muestreo G y H resultan:

$$[G, H] = c2d(A, B, T) \qquad T = 0,1 \text{ seg.}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0,0906 \\ 0 & 0,8187 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 0,0047 \\ 0,0906 \end{bmatrix}$$

Es importante observar como las matrices G y H dependen del periodo muestreo. A continuación se presentan 2 casos p/ T = 1 seg y T = 0,01 seg.

Nota: Es importante recordar q' el comando c2d utiliza un ZOH para discretizar el sistema continuo.

Para T = 1 seg:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}4323 \\ 0 & 0{,}1353 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 0{,}2838 \\ 0{,}4323 \end{bmatrix}$$

Para T = 0,01 seg:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}0099 \\ 0 & 0{,}9801 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 4{,}966 \times 10^{-5} \\ 0{,}0099 \end{bmatrix}$$

Para comparar, se obtendrán las matrices G y H por el método de Euler: T = 0,1 seg.

$$G = I + A.T \quad y \quad H = B.T$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}8 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}1 \end{bmatrix}$$

T = 0,01 seg.

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}01 \\ 0 & 0{,}98 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}01 \end{bmatrix}$$

Es posible observar, por comparación, q' a medida q' T se hace menor, la diferencia con la discretización utilizando un ZOH, se hace menor.

Respuesta temporal entre 2 instantes de muestreo consecutivos

Como ya se explicó en las primeras clases, la transformada Z de un sistema de ecuaciones de tiempo discreto da la respuesta de salida únicamente para los instantes de muestreo.

Si se desea conocer el comportamiento de esta respuesta entre 2 instantes de muestreo consecutivos, existen algunos métodos disponibles para determinarla tales como el método de la transformada de Laplace o el método de la transformada Z modificada.

Se mostrará a continuación q' el método de espacio de estado utilizado p' analizar la evolución de los estados entre 2 muestras consecutivas, puede ser modificado para analizar el comportamiento entre ambas muestras.

Tomando la ec. (25) como referencia, o sea:

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} X(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} B\, u(\tau)\, d\tau$$

se desea obtener la respuesta entre un instante $t_0 = KT$ y otro $t = KT + \Delta T$, donde $0 < \Delta T < T$

y se considera q' $u(\tau) = u(KT) =$ constante durante el periodo KT y $KT+T$.

Sustituyendo t y t_0 se tiene:

$$X(KT+\Delta T) = e^{A(\Delta T)} X(KT) + \int_{KT}^{KT+\Delta T} e^{A[KT+\Delta T-\tau]} B\,u(KT)\,d\tau$$

$$X(KT+\Delta T) = e^{A\Delta T} X(KT) + \int_0^{\Delta T} e^{\lambda A} B\,u(KT)\,d\lambda$$

con $\lambda = KT + \Delta T - \tau \Rightarrow d\lambda = -d\tau$

para $\tau = KT \Rightarrow \lambda = \Delta T$

para $\tau = KT + \Delta T \Rightarrow \lambda = 0$

Pueden definirse a continuación, las siguientes matrices de estado:

$$G(\Delta T) = e^{A\Delta T} \quad y \quad H(\Delta T) = \left(\int_0^{\Delta T} e^{\lambda A}\,d\lambda\right) B$$

y la ecuación de estado resultante es:

$$X(KT+\Delta T) = G(\Delta T)X(KT) + H(\Delta T)u(KT)$$

y la salida está dada por:

$$Y(KT+\Delta T) = CX(KT+\Delta T) + D\,u(KT)$$

$$Y(KT+\Delta T) = CG(\Delta T)X(KT) + [CH(\Delta T) + D]\,u(KT)$$

Se observa q' tanto los estados como las salidas pueden calcularse entre dos instantes de muestreo consecutivos, calculándose $G(\Delta T)$ y $H(\Delta T)$ para diferentes valores de ΔT, entre 0 y T, y sustituyendo estas matrices en las ecuaciones anteriores de $X(KT+\Delta T)$ e $Y(KT+\Delta T)$.

Considérese como ejemplo, el mismo caso anterior pero para un periodo T de 1 seg y un $\Delta T = 0{,}5$ seg.

$$G(\Delta T) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\Delta T}\right) \\ 0 & e^{-2\Delta T} \end{bmatrix}$$

$$H(\Delta T) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\Delta T + \dfrac{e^{-2\Delta T} - 1}{2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\Delta T}\right) \end{bmatrix}$$

$$y(KT + \Delta T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot G(\Delta T) \begin{bmatrix} x_1(KT) \\ x_2(KT) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} H(\Delta T)\, u(KT)$$

Sustituyéndose $\Delta T = 0{,}5$ seg, se tienen:

$$\begin{bmatrix} x_1(K+0{,}5) \\ x_2(K+0{,}5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}3161 \\ 0 & 0{,}3679 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(K) \\ x_2(K) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}0920 \\ 0{,}3161 \end{bmatrix} u(K)$$

$$y(K+0{,}5) = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}3161 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(K) \\ x_2(K) \end{bmatrix} + 0{,}092 \cdot u(K)$$

Diseño de sistemas de control modelados en espacio de estado, mediante reubicación de polos.

El método de diseño de ubicar polos de lazo cerrado en ubicaciones deseadas en el plano-z, se denomina técnica de diseño por reubicación de polos.
En esta técnica se realimentan todas las variable de estado, a la entrada de la planta, de tal forma q' todos los polos del sistema en lazo cerrado sean reubicados en ubicaciones deseadas; estas últimas definidas en base a especificaciones de regimen transitorio y permanente.

Para poder aplicar esta técnica, es necesario q' todos los estados o variables de estado de la planta, estén disponibles para ser realimentados a través de un conjunto de ganancias. Sin embargo, en la práctica puede darse q' no todas las variables de estado estén disponibles o puedan ser medidas.
Si se da esta situación, las variables q' no pueden ser medidas, deben ser estimadas; lo q' puede realizarse mediante observadores de estado, los cuales serán abordados más adelante.

Conceptos Fundamentales:

Controlabilidad: El concepto de controlabilidad es la base para la solución del problema de reubicación de polos.

La controlabilidad se refiere al problema o cuestión, de si es posible llevar un sistema dinámico desde un estado inicial hacia otro estado arbitrario mediante una acción de control no limitada.

En términos de un sistema dinámico modelado en tiempo continuo ~~el sistema discreto~~, se dice "q' un sistema de control es completamente controlable si es posible transferir este sistema desde algún estado inicial arbitrario hacia un estado deseado (o estado arbitrario) en un periodo de tiempo finito, mediante un vector de control no limitado".

Si alguna variable de estado es independiente de la señal de control, entonces es imposible controlar esta variable de estado y por tanto, el sistema es incontrolable.

Controlabilidad de Estado Completa para un sistema de control en tiempo discreto, LIT.

Sea el sig. sistema LIT definido por su ec. de estado discreta:

$$X[(K+1)T] = G\,X(KT) + H\,u(KT) \quad (40)$$

$X(KT)$: vector de estado de orden "n"

$u(KT)$: señal de control (escalar)

G : matriz de estados $n \times n$

H : matriz de entrada $n \times 1$

$u(KT)$ es constante durante $KT \leq t < (K+1)T$

El sistema de control discreto dado por (40)
es ~~[illegible]~~ completamente de estado controlable si existe una señal de control, constante por partes, $u(kT)$, definida sobre un número finito de periodos de muestreo, tal que partiendo de un estado inicial dado, el estado $x(kT)$ puede ser transferido hacia un estado deseado final x_f en al menos "n" periodos de muestreo.

La condición "necesaria" y "suficiente" q' determina si un determinado sistema es "completamente controlable", está dada por la denominada "matriz de controlabilidad" de la cual, el rango debe ser igual a "n"; o sea igual al orden del sistema, esto es:

$$\text{rango}\left[H \vdots GH \vdots \cdots \vdots G^{n-1}H\right] = n$$

Significa q' tal matriz posee n vectores columna (o n vectores filas) linealmente independientes, o también, el determinante de esa matriz es diferente de cero.

Nótese, q' p' este caso en q' la matriz H es $n\times 1$ en la matriz controlabilidad se observa q' las matrices $GH, \ldots, G^{n-1}H$, también serán de $n\times 1$ o sea, vectores columnas, resultando en una matriz controlabilidad de dimensión "$n\times n$". La matriz controlabilidad, q' aquí denominaremos por $M = \left[H \vdots GH \vdots \cdots \vdots G^{n-1}H\right]$, puede ser obtenida en Matlab por: ctrb(G,H) y su rango, con la función "rank".

Controlabilidad de estado completa para el caso en q' la acción de control $u(KT)$ es un vector

A diferencia del caso anterior, $u(KT)$ es un vector de dimensión "r" y H es una matriz de dimensión "$n \times r$". En este caso, la matriz de controlabilidad resultará de dimensión $n \times rn$ y el sistema discreto será completamente controlable, si M posee rango $= n$; o lo q' es lo mismo si tiene "n" filas linealmente independientes.

Controlabilidad de Salida Completa

Considérese el sistema en tiempo discreto, definido por la ec. (40), con $u(KT)$ escalar y $H = n \times 1$. Además, la ecuación de salida de este sistema está dada por

$$y(KT) = C\,x(KT) \tag{41}$$

con $y(KT)$ siendo el vector de salida de orden "m" y la matriz $C = m \times n$.

Se dice q' este sistema es de salida completamente controlable, o de salida controlable, si es posible construir un vector no limitado $u(KT)$ definido sobre un número finito de periodos de muestreo $0 \leq KT \leq nT$, tal que partiendo de una salida inicial $y(0)$, la salida $y(KT)$ puede ser transferida a un punto deseado y_f en el espacio de salida, en al menos "n" periodos de muestreo.

La condición necesaria y suficiente para que el sistema sea de salida controlable, es q' los vectores CH, CGH, ..., $CG^{n-1}H$ sean linealmente independientes; o lo q' es lo mismo q' la matriz

$$[CH \vdots CGH \vdots \cdots \vdots CG^{n-1}H]$$ posea rango

igual a "m", o sea igual al número de salidas q' posee el sistema.

Considérese a continuación el siguiente sistema:

$$X[(K+1)T] = GX(KT) + H\,U(KT) \qquad (42)$$

$$Y(KT) = C\,X(KT) + D\,U(KT) \qquad (43)$$

con $U(KT)$ siendo un vector de dimensión "r" $Y(KT)$ un vector de dimensión "m"; $H = n \times r$; $C = m \times n$ y $D = m \times r$.

La condición necesaria y suficiente para q' el sistema definido por (42) y (43) sea de salida controlable es q' la matriz de dimensión $m \times (n+1)r$

$$[D \vdots CH \vdots CGH \vdots \cdots \vdots CG^{n-1}H]$$

posea rango $= m$.

Nótese q' la presencia de la matriz D en la ecuación de salida, siempre ayudará a establecer la completa controlabilidad de salida.

Transformaciones útiles para el análisis y diseño en el espacio de estado.

Aquí se verán algunas técnicas para transformar ecuaciones de espacio de estado en su forma canónica las cuales facilitan el diseño por reubicación de polos.

Considérese el siguiente sistema en tiempo discreto dado por la ecuación de estado y su ec. de salida:

$$X(k+1) = GX(k) + Hu(k) \qquad (44)$$

$$Y(k) = CX(k) + Du(k) \qquad (45)$$

La transformación q' nos interesa es la forma canónica controlable, a la cual puede ser transformado el sistema dado por (44) y (45), mediante la siguiente transformación matricial:

$$T = MW \qquad (46)$$

donde, M es la matriz controlabilidad

$$M = [H \vdots GH \vdots \cdots \vdots G^{n-1}H] \qquad (47)$$

y

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (48)$$

donde los elementos a_i de la matriz W son los coeficientes de la ec. característica, obtenida mediante:

$$(49) \qquad |zI - G| = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

A partir de la transformación lineal T, puede obtenerse la forma canónica controlable del sistema dado por (44) y (45), o sea:

$$X(K) = T\hat{X}(K) \qquad (50)$$

con la (50), las 44 y 45 se transforman en:

$$(51) \quad \hat{X}(K+1) = T^{-1}GT\hat{X}(K) + T^{-1}H\,u(K) = \hat{G}\hat{X}(K) + \hat{H}\,u(K)$$

$$(52) \quad y(K) = CT\hat{X}(K) + D\,u(K) = \hat{C}\hat{X}(K) + \hat{D}\,u(K)$$

$$\hat{G} = T^{-1}GT \quad \hat{H} = T^{-1}H \quad \hat{C} = CT \text{ y } \hat{D} = D$$

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = \left[b_n - a_n b_0 \,\vdots\, b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, b_1 - a_1 b_0 \right]$$

donde los coeficientes b_i son los q' aparecen en numerador de la función de transferencia del sistema, dada por:

$$C(zI-G)^{-1}H + D = \hat{C}(zI-\hat{G})^{-1}\hat{H} + \hat{D}$$

$$= \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_{n-1} z + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots a_{n-1} z + a_n} \qquad (53)$$

Diseño vía ubicación de polos

Presentaremos a continuación el método de diseño comúnmente llamado de ubicación de polos o técnica de asignación de polos.-

Se asume en primer lugar, que todas las variables de estado son medibles y están disponibles para ser realimentadas. Por lo tanto, si el sistema es completamente controlable, entonces los polos deseados de lazo cerrado pueden ser ubicados en ubicaciones determinadas por medio de la realimentación de los estados a través de una matriz de ganancias, apropiada.

El primer paso del diseño, comienza con la determinación de los polos deseados de lazo cerrado, basada en especificaciones de desempeño transitorio o requerimientos de la respuesta en frecuencia; tales como tiempos de respuesta, factor de amortiguamiento relativo, sobrepaso o pico de resonancia, o ancho de banda.

Dadas las consideraciones de diseño, se asume q' los polos deseados de lazo cerrado se ubican en $z_1 = \mu_1$; $z_2 = \mu_2$; ...; $z_n = \mu_n$.

Es importante recordar, q' los polos de lazo cerrado resultantes, en el plano-z, dependerán también del periodo de muestreo; el cual debe ser seleccionado adecuadamente, en función de las reglas ya vistas, para evitar tener señales de control muy elevadas.

Considérese el sistema de lazo abierto q' se muestra a continuación en la Figura 3:

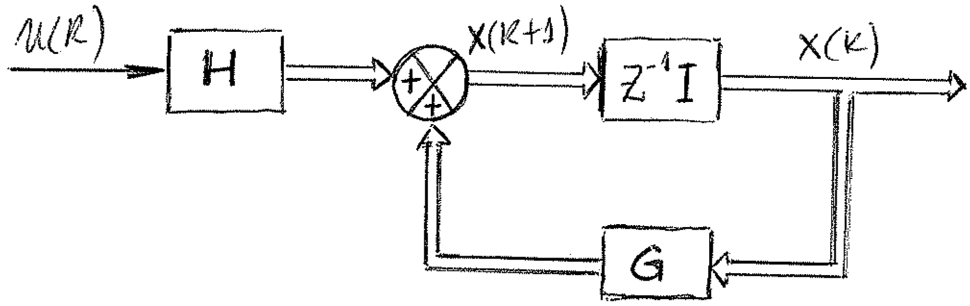


Figura 3

Representado por la siguiente ecuación de estado

$$X(k+1) = G\,X(k) + H\,u(k) \qquad (54)$$

con $X(k)$ = vector "n"
$u(k)$ = señal de control, escalar
$G = n \times n$ y $H = n \times 1$

Se asume también, q' la señal de control u(k) es no limitada.

Si la señal de control es elegida como

$$u(k) = -\mathbb{K}\,X(k) \qquad (55)$$

donde "$\mathbb{K}$" es la matriz de ganancias de realimentación de estados de dimensión $(1 \times n)$, el sistema de la figura 3 se torna un sistema a lazo cerrado como se muestra en la figura 4.

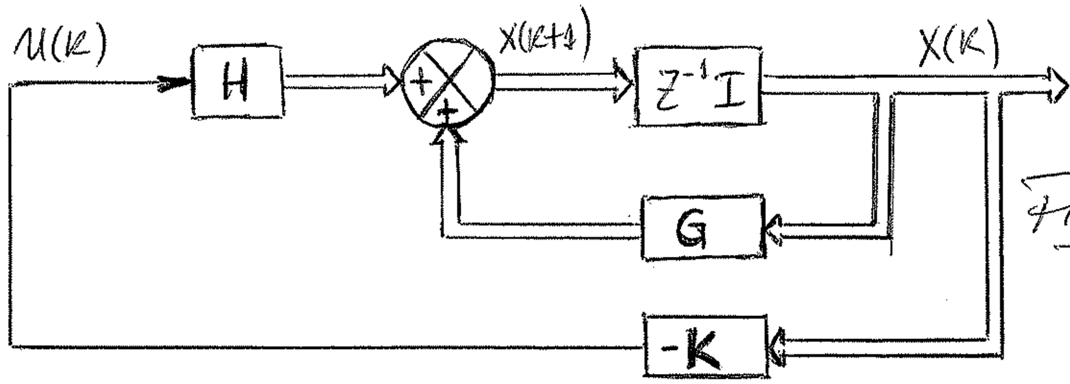


Figura 4

Sustituyéndose (55) en (54) se tiene:

$$X(K+1) = G\,X(K) - HK\,X(K)$$

$$X(K+1) = [G - HK]\,X(K) \quad (56)$$

Si se elige una matriz K, tal que los autovalores de $(G-HK)$ son los polos de lazo cerrado deseados $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$; el sistema de la figura resultará asintóticamente estable, desde q' los polos deseados se ubiquen dentro del circulo unitario del plano-z. Es importante resaltar, q' la condición necesaria y suficiente para la ubicación arbitraria de polos por realimentación de los estados del sistema, es q' el sistema sea <u>completamente</u> <u>controlable</u>. Por lo que esta es la primera condición que debe verificarse antes de iniciar el procedimiento de diseño.

A continuación, se describen tres métodos por los cuales puede diseñarse la matriz K.

<u>Método 1</u>:

Los autovalores deseados de $(G-HK)$ son $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ siendo alguno de estos autovalores numeros complejos los mismos deben darse de a pares.

La ec. característica del sistema, está dada por la (49). En base a las ecuaciones (46), (47) y (48) y recordando las transformaciones lineales de la forma canónica controlable: $\hat{G} = T^{-1}GT$ y $\hat{H} = T^{-1}H$ puede definirse a continuación

$$\hat{K} = KT = [\delta_n \;\; \delta_{n-1} \cdots \delta_1] \quad (57)$$

entonces,

$$\hat{H}\hat{K} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_n & \delta_{n-1} & \cdots & \delta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \delta_n & \delta_{n-1} & \cdots & \delta_1 \end{bmatrix} \quad (58)$$

De esta forma, la ecuación característica del sistema de lazo cerrado de la figura 4, resulta:

$$|zI - G + HK| = |zI - \hat{G} + \hat{H}\hat{K}|$$

$$= \begin{vmatrix} z & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & z & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \\ (a_n+\delta_n) & (a_{n-1}+\delta_{n-1}) & \cdots & (z+a_1+\delta_1) \end{vmatrix} \quad (59)$$

$$= z^n + (a_1+\delta_1)z^{n-1} + \cdots + (a_{n-1}+\delta_{n-1})z + a_n + \delta_n = 0 \quad (60)$$

Por otro lado, el polinomio característico de los autovalores deseados, estadado por:

$$P_{cd}(z) = (z-\mu_1)(z-\mu_2)\cdots(z-\mu_3)$$
$$= z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n = 0 \quad (61)$$

Igualando coeficientes de igual potencia de los polinomios (60) y (61) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\alpha_1 = a_1 + \delta_1$$
$$\alpha_2 = a_2 + \delta_2$$
$$\vdots$$
$$\alpha_n = a_n + \delta_n$$

De la ecuación (57) se tiene:

$$\mathbb{K} = \hat{\mathbb{K}} T^{-1}$$

$$\mathbb{K} = [\delta_n \ \delta_{n-1} \cdots \delta_1] T^{-1}$$

$$\mathbb{K} = [\alpha_n - a_n \vdots \alpha_{n-1} - a_{n-1} \vdots \cdots \vdots \alpha_1 - a_1] T^{-1} \quad (62)$$

donde los coeficientes a_i y α_i son conocidos y la matriz T está dada por (46).-
De esta forma queda determinada la matriz $\mathbb{K}$ de realimentación de estados, la cual ubica los autovalores de $(G - H\mathbb{K})$ en las posiciones deseadas.

Método 2: Fórmula de Ackermann

La expresión matricial (62) no es la única forma por la cual puede obtenerse la matriz $\mathbb{K}$ de ganancias de realimentación. Hay otra expresión disponible y es la denominada fórmula de Ackermann.

Asumiéndose q' el sistema dinámico en tiempo discreto está definido por la ec. de estado (54), q' el sistema es completamente controlable y utilizando una realimentación de estados mediante la ley

$$u(k) = -\mathbb{K}\, x(k)$$

es posible ubicar los polos de lazo cerrado de este sistema en las posiciones $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$, a través de las ganancias $k_1; k_2; \ldots; k_n$ obtenidas de la siguiente expresión:

$$K = [0\ 0 \cdots 0\ 1][H \vdots GH \vdots \cdots \vdots G^{n-1}H]^{-1}\phi(G) \quad (63)$$

donde $\phi(G)$ es un polinomio de matrices dado por la siguiente expresión:

$$\phi(G) = G^n + \alpha_1 G^{n-1} + \cdots \alpha_{n-1} G + \alpha_n I \quad (64)$$

y los α_i de la (64) son los coeficientes del polinomio característico deseado dado en (61).

Mientras q' la matriz $[H \vdots GH \vdots \cdots \vdots G^{n-1}H]^{-1}$ es la inversa de la matriz controlabilidad, M^{-1} y la primera matriz del lado derecho de la (63) tendrá una dimensión de $1 \times n$.-

Método 3:

Si el orden "n" del sistema no es elevado, se sustituye la matriz de ganancias

$$K = [K_1 \vdots K_2 \vdots \cdots \vdots K_n] \quad (65)$$

en la ecuación característica de lazo cerrado

$$|zI - G + HK| = 0 \quad (66)$$

La (66) resulta en un polinomio característico en potencias de z en la cual las ganancias K_i aparecen como variables desconocidas.

Igualando entonces los coeficientes de iguales potencias de (66) con los coeficientes del polinomio característico deseado (61), se obtiene un sistema de "n" ecuaciones, q' solucionado da los valores de las ganancias de realimentación de estados de acuerdo a los autovalores deseados.

Esta forma de cálculo de la matriz K resulta simple para sistemas de orden reducido.

Ilustraremos los tres métodos vistos, con un ejemplo numérico.

Sea el siguiente sistema dinámico, modelado en tiempo discreto

$$X(k+1) = G\,X(k) + H\,u(k) \qquad (67)$$

con $u(k)$ siendo la señal de control escalar.

La ecuación característica del sistema a lazo abierto, como se indica en la figura 3, está dada por: $|ZI - G|$

Las matrices G y H son las siguientes:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}16 & -1 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (68)$$

$$|ZI - G| = \begin{vmatrix} Z & -1 \\ 0{,}16 & Z+1 \end{vmatrix} = Z^2 + Z + 0{,}16 \qquad (69)$$

los coeficientes de este polinomio son:

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = 0{,}16$$

Debe determinarse la matriz K para q' el sistema de lazo cerrado tenga los polos de lazo cerrado en las siguientes posiciones:

$$\mu_1 = 0{,}5 + j0{,}5 \quad \mu_2 = 0{,}5 - j0{,}5 \qquad (70)$$

Antes de efectuar el procedimiento de proyecto debe verificarse la controlabilidad del sistema a través de la matriz M:

$$M = [H \,\vdots\, GH] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (71)$$

El rango de esta matriz es igual a 2, o sea, es igual al orden del sistema. O también, el determinante de $M \neq 0$, por lo q' el sistema dado por (67) es totalmente controlable.
Esto indica q' es posible realizar la ubicación de polos en los valores asignados por (70).
Esto significa q' la ecuación característica de lazo cerrado debe ser igual a la ecuación característica deseada:

$$|zI - G + HK| = (z - 0{,}5 + j0{,}5)(z - 0{,}5 - j0{,}5) = 0$$
$$= z^2 - z + 0{,}5 = 0$$

Los coeficientes del polinomio característico deseado son:

$$\alpha_1 = -1 \;\; y \;\; \alpha_2 = 0{,}5$$

Método 1:

De la ecuación (62) se tiene:

$$\mathbb{K} = \left[\alpha_2 - a_2 \; \vdots \; \alpha_1 - a_1\right] T^{-1}$$

Dado q la matriz G y H están en su forma canónica controlable, la transformación lineal T resultará en la matriz identidad:

$$T = MW = [H \vdots GH]\begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto:

$$\mathbb{K} = [(0{,}5 - 0{,}16) \; (-1 - 1)]$$

$$\mathbb{K} = [\, 0{,}34 \quad -2 \,] \qquad (72)$$

Método 2: Fórmula de Ackermann

$$\mathbb{K} = [0 \quad 1][H \vdots GH]^{-1}\phi(G)$$

$$\phi(G) = G^2 - G + 0{,}5I$$

$$\phi(G) = \begin{bmatrix} -0{,}16 & -1 \\ 0{,}16 & 0{,}84 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}16 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}34 & -2 \\ 0{,}32 & 2{,}34 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{K} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}34 & -2 \\ 0{,}32 & 2{,}34 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{K} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 0{,}66 & 0{,}34 \\ 0{,}34 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{K} = [0{,}34 \quad -2] \qquad (73)$$

Método 3: En este caso $\mathbb{K} = [k_1 \; k_2]$

Sustituyendo la matriz $\mathbb{K}$ en la ecuación característica de lazo cerrado, se tiene:

$$|zI - G + HK| = \left| \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}16 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \; k_2] \right| = 0$$

$$= \left| \begin{bmatrix} z & -1 \\ 0{,}16 & z+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$= \left| \begin{bmatrix} z & -1 \\ 0{,}16 + k_1 & z+1+k_2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$= z^2 + z + z k_2 + 0{,}16 + k_1 = 0$$

$$= z^2 + (1 + k_2) z + (0{,}16 + k_1) = 0$$

$$z^2 + (1 + k_2) z + (0{,}16 + k_1) = z^2 - z + 0{,}5$$

Igualándose coeficientes de iguales potencias se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + k_2 = -1 \Rightarrow k_2 = -2 \\ 0{,}16 + k_1 = 0{,}5 \Rightarrow k_1 = 0{,}34 \end{array} \right\}$$

Finalmente, la matriz de ganancias de realimentación resulta:

$$\mathbb{K} = [0{,}34 \quad -2] \qquad (74)$$

Es posible observar q' la (72), (73) y (74) resultan iguales por los 3 métodos.

<u>Observaciones</u>: La matriz ganancia de realimentación de estados debe ser determinada en el sentido de que el error producido por perturbaciones, a la entrada ó salida de la planta, sea llevado a cero lo más rapido posible.
Tal velocidad de respuesta, dependerá de las ubicaciones deseadas de los polos de lazo cerrado.
La selección de estas ubicaciones es una solución de compromiso entre la rapidez de respuesta de la señal de error y la sensibilidad a las perturbaciones y ruidos de medida.
O sea, a mayores velocidades de respuesta del error los efectos adversos de las perturbaciones y los ruidos de medición se incrementan, dado que generalmente las acciones (ó acción) de control resultan elevadas.
Por eso, la matriz $\mathbb{K}$ no es única para un determinado sistema, ya q' es importante probar diversas matrices bajo diferentes especificaciones y seleccionar la que resulte en el mejor desempeño global; de régimen transitorio y estacionario.

Apliquemos a continuación, la metodología de diseño de la matriz **K**, para un tipo de respuesta, único del sistema discreto, como lo es la respuesta de tiempo mínimo o deadbeat, ya analizada anteriormente por el enfoque por función de transferencia.

Como es bien sabido, en control deadbeat, todo vector de error puede ser llevado a cero en "n" periodos de muestreo (siendo "n" el orden del sistema) si la acción de control es no limitada. Esto significa q' el tiempo de asentamiento de la respuesta al escalón, depende del periodo de muestreo seleccionado, por lo que para periodos de muestreo muy pequeños el tiempo de asentamiento será reducido (muy pequeño) lo q' implica señales de control elevadas. Esto significa q' ocurrirán fenómenos de saturación en el sistema digital de control y con la saturación de la acción de control se pierde la respuesta deadbeat. Por eso, en este caso, el periodo de muestreo es el único parámetro de diseño.

Para el sistema dado en (67), presente rta. deadbeat, los polos deseados deben ubicarse al origen: $\mu_1 = \mu_2 = 0$

Esto implica q' el polinomio característico deseado resulta: en general

$$P_{cd}(z) = (z-\mu_1)(z-\mu_2)\cdots(z-\mu_n) = z^n$$

y los coeficientes $\alpha_i = 0$

Para el ejemplo que nos ocupa:

$$P_{cd}(z) = z^2$$

Por el método 1, ecuación (62), la matriz de ganancias $\mathbb{K}$ resulta:

$$\mathbb{K} = [-a_2 \quad -a_1]\, T^{-1}$$

dado que $T^{-1} = I \Rightarrow \mathbb{K} = [-0{,}16 \quad -1]$

Como esperado, las ganancias son los parámetros de la planta, como se analizó en la clase de deadbeat al obtenerse el controlador a partir de la función de transferencia del proceso.

Por el método 2 se tiene que:

$$\mathbb{K} = [0 \quad 1] \cdot M^{-1} \cdot \phi(G)$$

donde
$$\phi(G) = G^2 = \begin{bmatrix} -0{,}16 & -1 \\ 0{,}16 & 0{,}84 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{K} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0{,}16 & -1 \\ 0{,}16 & 0{,}84 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{K} = [-0{,}16 \quad -1] \rightarrow$ Igual resultado q' con el Método 1.

Y finalmente, por el Método 3, se tiene:

$$z^2 + (1+K_2)z + (0,16 + K_1) = z^2$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1+K_2 = 0 \\ 0,16 + K_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} K_2 = -1 \\ K_1 = -0,16 \end{array}$$

$$\mathbf{K} = [-0,16 \quad -1]$$

Diseño de la matriz de ganancias $\mathbb{K}$ utilizando comandos de Matlab

Función "acker". Esta función utiliza la fórmula de Ackermann (63) con la salvedad que dicha fórmula es únicamente aplicable para sistemas SISO, donde la señal de control es un escalar.

$$K = acker(G, H, P)$$

donde P indica el vector línea q' contiene los polos de lazo cerrado deseados, o sea, los autovalores de $(G - HK)$.

Este método no es numéricamente confiable para sistemas de orden mayores a 10 o para sistemas debilmente controlables.—

Función "Place".

Dado un sistema SISO o MIMO, la función "place" calcula la ganancia K de realimentación de estados en base a los polos deseados en un vector P :

$$K = place(G, H, P)$$

desde que la señal de control o vector de control $u(k) = -K\,x(k)$.-

Se asume q' todas las entradas a la planta son las señales de control.

El tamaño del vector "P" debe ser igual al N° de filas de la matriz G.

La función "place" utiliza el algoritmo propuesto por Kautsky, J., Nichols, N y Van Dooren, P, en "Robust Pole Assignment in Linear State Feedback" (1.985), International Journal of Control".

Este algoritmo opera con sistemas de múltiples entradas y utiliza un grado de libertad adicional para encontrar la solución que minimiza la sensibilidad de los polos de lazo cerrado a las perturbaciones en G o H.-

[K, prec] = place(G, H, P) : De esta forma la función retorna "prec" q' indica una estimativa de cuan próximos se encuentran los autovalores de (G - HK) de las ubicaciones especificadas en P. Esta estimativa está medida en dígitos decimales de los polos de lazo cerrado reales.

Si algún polo de lazo cerrado $\neq 0$ es mayor q' el 10% de la ubicación deseada indicada en en vector P, la función retorna un mensaje de advertencia.

Otro inconveniente en la utilización de esta función es q' si la multiplicidad de los polos es mayor q' el rango de la matriz H, el algoritmo no puede ubicar los polos. Osea, si en el ejemplo q' se analizó anteriormente se selecciona el vector P para respuesta deadbeat, el mismo sería:

$$P = [0 \quad 0] \Rightarrow \text{multiplicidad} = 2$$

y dado q' el rango de la matriz H es igual 1 "place" da un mensaje de error.

Este inconveniente se soluciona variando sensiblemente la posición de uno de los polos por ejemplo: $P = [0 \quad 0{,}00001]$

Sistema de control con referencia de entrada

Hasta el momento se consideró el problema de regulación considerándose q' el vector de comando $r(k)=0$, por lo q' el efecto de una perturbación externa crea estados diferentes de cero los cuales tienden al origen de acuerdo a la dinámica impuesta en la ecuación característica de lazo cerrado a través de la realimentación de los estados.

A continuación, se considera que el sistema tiene aplicada una referencia $r(k) \neq 0$, por lo q' se tiene el esquema mostrado en la figura 5.

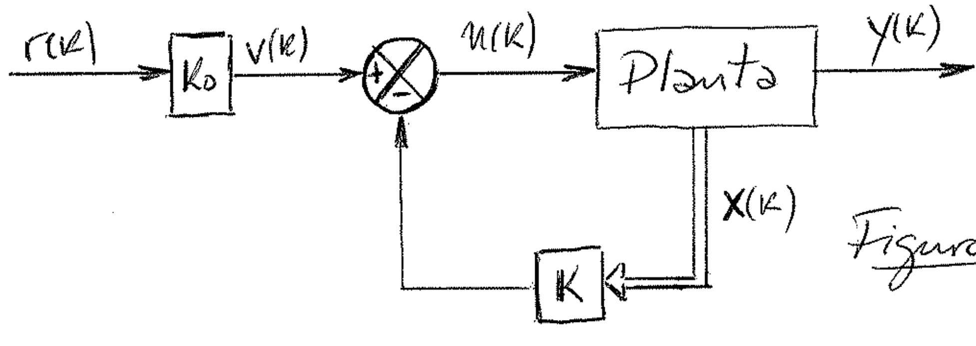


Figura 5

Sea la Planta, descrita por la siguiente ec. de estado y de salida

$$X(k+1) = G\,X(k) + H\,u(k)$$
$$y(k) = C\,X(k)$$

La señal escalar de la acción de control, está dada por:

$$u(k) = K_o\,r(k) - K\,X(k) \qquad (75)$$

reemplazando esta última en la ec. de estado se tiene:

$$X(k+1) = (G - HK)\,X(k) + HK_o\, r(k) \quad (76)$$

Se observa q' la ecuación característica de este sistema es:

$$|zI - G + HK| = 0$$

Si el sistema es completamente controlable entonces, la matriz de ganancias de realimentación K puede ser determinada para obtener los polos deseados de lazo cerrado.

En este punto, hay q' hacer notar q' la realim. de estado puede cambiar la ecuación característica del sistema, y al hacerlo, la ganancia de régimen permanente (o de frecuencia cero, para entrada constante) de todo el sistema se modifica.

Es por eso q' en el diagrama de bloques de la figura 5 aparece una ganancia K_o que debe ser ajustada, de tal forma q' la respuesta al escalón unitario, de todo el sistema, en estado estacionario sea igual a la unidad para $k \to \infty$

o sea, $y(\infty) = 1$.

Lo expresado se demuestra a través de un ejemplo:

Sea el sistema dinámico definido por las siguientes matrices G, H y C:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}16 & -1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad y \quad C = [1 \;\; 0]$$

Este sistema es el mismo q' el definido en (68) utilizado para diseñar la matriz K.
Los polos de lazo cerrado de la ecuación caract. deseada se ubican en:

$$z_1 = 0{,}5 + j0{,}5 \; ; \quad z_2 = 0{,}5 - j0{,}5$$

con lo que:

$$|zI - G + HK| = z^2 - z + 0{,}5$$

Este caso ya fue resuelto en los ejemplos anteriores por los 3 métodos, resultando:

$$K = [0{,}34 \quad -2]$$

Se observa en la ecuación (76) q' la misma puede ser reescrita de la siguiente forma:

$$X(k+1) = \hat{G}\,X(k) + \hat{H}\,r(k) \quad (77)$$

donde: $\hat{G} = G - HK$ y $\hat{H} = HK_0$ (78)

La constante de ajuste de la ganancia de estado estacionario, puede ser determinada en espacio de estado o en el plano z, a partir de la función de transferencia del sistema de la figura 5; o sea

$$G(z) = C\,(zI - \hat{G})^{-1}\,\hat{H} \quad (79)$$

$$\hat{G} = G - HK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}16 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0{,}34 \quad -2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} K_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ K_0 \end{bmatrix}$$

$$G(z) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} z & -1 \\ 0{,}5 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ k_0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z & -1 \\ 0{,}5 & z-1 \end{bmatrix}^{-1} = (zI - \hat{G})^{-1} = \frac{adj(zI-\hat{G})}{|zI-\hat{G}|}$$

$$|zI - G| = z^2 - z + 0{,}5$$

$$adj(zI - \hat{G}) = \begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ -0{,}5 & z \end{bmatrix}$$

$$G(z) = [1 \quad 0] \frac{1}{z^2 - z + 0{,}5} \begin{bmatrix} z-1 & 1 \\ -0{,}5 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ k_0 \end{bmatrix}$$

$$G(z) = [1 \quad 0] \frac{1}{z^2 - z + 0{,}5} \begin{bmatrix} k_0 \\ zk_0 \end{bmatrix} = [1 \; 0] \begin{bmatrix} k_0 \\ zk_0 \end{bmatrix} \frac{1}{z^2 - z + 0{,}5}$$

$$G(z) = \frac{k_0}{z^2 - z + 0{,}5} = \frac{Y(z)}{R(z)} \qquad (80)$$

Para determinar k_0, puede usarse el teorema del valor final de la transformada Z de la salida, sabiendo que para una entrada en escalón unitaria, $y(\infty) = 1$:

$$\lim_{k \to \infty} y(k) = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1})\, Y(z)$$

O sea:

$$\lim_{K\to\infty} y(K) = \lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z} \times \frac{K_0}{z^2 - z + 0{,}5} \cdot R(z)$$

siendo $R(z) = \dfrac{z}{z-1}$

$$\Rightarrow \lim_{z\to 1} \frac{\cancel{z-1}}{\cancel{z}} \times \frac{K_0}{z^2 - z + 0{,}5} \times \frac{\cancel{z}}{\cancel{z-1}} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{K_0 = 0{,}5}$$

Con este ajuste se garantiza q' la salida será siempre igual a la referencia $r(K)$ en cada instante de muestreo, $K\to\infty$, desde que no haya variaciones paramétricas en la matriz G y para la matriz $\mathbb{K}$ de realimentación determinada para el caso presente. Si se desean cambiar las especificaciones la matriz $\mathbb{K}$ sufrirá cambios y habrá q' determinar nuevamente la constante K_0.

Es importante destacar también, que la salida $y(K)$ será igual a $r(K)$, cuando $K\to\infty$, inclusive si $r(K) = A$, donde A es el valor de amplitud deseado, y diferente de la unidad.

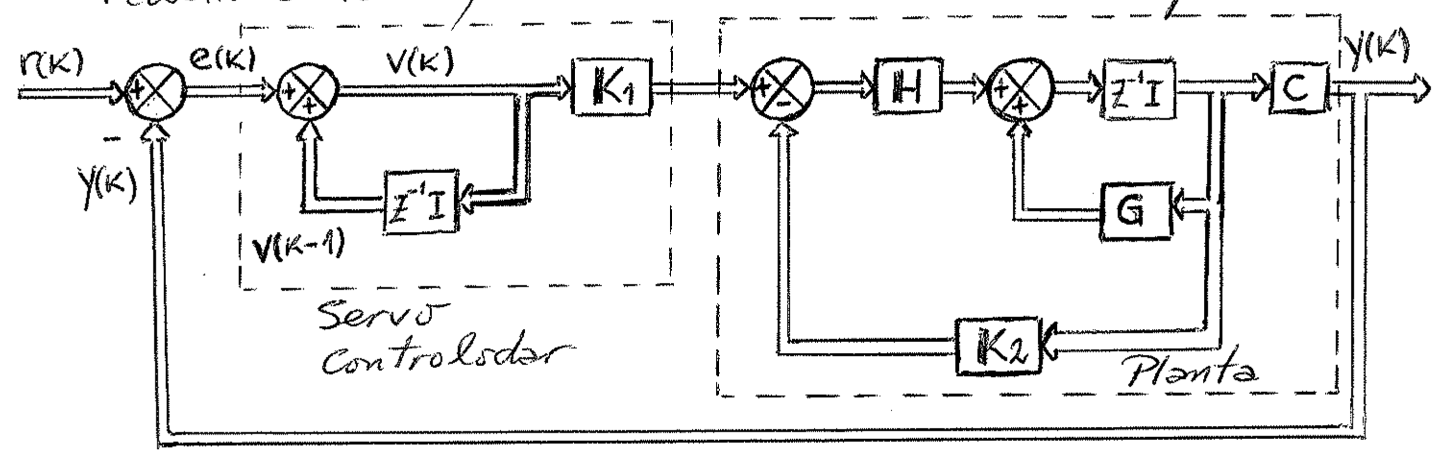
———— o ————

Sistemas Servo o de seguimiento.

En los sistemas seguidores, generalmente se requiere que el sistema de lazo cerrado tenga uno o más integradores. A menos que la planta posea una propiedad integradora, será necesario agregar dentro del bucle de control, integradores para eliminar el error de régimen estacionario a entradas en escalón.

Una manera de introducir un integrador en el modelo matemático del proceso en lazo cerrado es la de introducir un nuevo vector de estado q' integre la diferencia entre el vector de comando y el de salida, esto es, una acción integral del vector de error.

En la figura 6 se muestra una posible configuración para la solución de un sistema de seguimiento con realimentación de todos los estados de la planta.



El controlador integral consiste de "m" elementos integradores (siendo "m" el N° de salidas del sistema de control) uno para cada comando de entrada.
El o los integradores, pueden ser incluidos como parte de la formulación del problema de reubicación de polos la cual será presentada en esta sección.

Considérese el sistema de seguimiento de la figura 6, el cual se asume es completamente controlable y que la planta no tiene integrador. La ecuación de estado de la planta está dada por la siguiente:

$$X(K+1) = G\,X(K) + H\,u(K) \qquad (80)$$

$$y(K) = C\,X(K) \qquad (81)$$

donde:

$X(K)$ = vector de estado, dimensión "n"

$u(K)$ = vector de control, dimensión "m"

$y(K)$ = vector de salida, dimensión "m"

G = matriz de estado, dimensión "n×n"

H = matriz de entrada, dimensión "n×m"

C = matriz de salida, dimensión "m×n"

En este análisis se asume q' la dimensión del vector de entrada o de control es igual a la dimensión del vector de salida.

Del diagrama de la figura 6, la ecuación de estado del integrador está dada por

$$V(K) = V(K-1) + r(K) - y(K) \qquad (82)$$

donde $V(K)$ es el vector resultante de la integral del error $e(K) = r(K) - y(K)$; también denominado vector servo, de dimensión "m".

$r(K)$ es el vector de comando, también de dimensión "m".

Reescribiendo la ec. (82) una muestra hacia adelante, se tiene:

$$v(k+1) = v(k) + r(k+1) - y(k+1) \qquad (83)$$

La ecuación de salida puede escribirse en $(k+1)$ $y(k+1) = C\,x(k+1)$ y sustituyéndose la ec. de estado (80),

$$y(k+1) = CG\,x(k) + CH\,u(k) \qquad (84)$$

sustituyéndose (84) en (83) obtenemos:

$$v(k+1) = v(k) + r(k+1) - CG\,x(k) - CH\,u(k) \qquad (85)$$

Por otro lado, el vector de control $u(k)$, según el diagrama de la figura 6, está dado por la siguiente ecuación:

$$u(k) = -K_2\,x(k) + K_1\,v(k) \qquad (86)$$

En la ec. (86) se observa, que las matrices K_1 y K_2 son los parámetros de diseño en este problema. Y las mismas deben ser determinadas para sí la ec. (86) pueda ser implementada recursivamente en un procesador digital.

A continuación, se presenta entonces el enfoque para determinar tales matrices de ganancias para que el sistema en lazo cerrado responda a un determinado desempeño de régimen transitorio y estacionario.

Escribimos la (86) una muestra hacia adelante,

$$u(k+1) = -K_2\,x(k+1) + K_1\,v(k+1) \qquad (87)$$

Reemplazamos a continuación las ec. (80) y (85)

$$u(k+1) = -K_2 G\,x(k) - K_2 H\,u(k) + K_1 v(k) + K_1 r(k+1) - \\ - K_1 C G\,x(k) - K_1 C H\,u(k) \qquad (88)$$

De la ec. (86) se obtiene que:

$$K_1 v(k) = u(k) + K_2\,x(k) \qquad (89)$$

la última se sustituye en la (88)

$$u(k+1) = -K_2 G\,x(k) - K_2 H\,u(k) + u(k) + K_2 x(k) + \\ + K_1 r(k+1) - K_1 C G\,x(k) - K_1 C H\,u(k)$$

$$u(k+1) = [K_2 - K_2 G - K_1 C G]\,x(k) + \\ + [I_m - K_2 H - K_1 C H]\,u(k) + K_1\,r(k+1) \qquad (90)$$

A partir de las ecuaciones (80) y (90), es posible definir un nuevo vector de estado que conste de los vectores $x(k)$ y $u(k)$, como sigue:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ u(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & H \\ (K_2 - K_2 G - K_1 C G) & (I_m - K_2 H - K_1 C H) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_1 \end{bmatrix} r(k+1) \qquad (91)$$

y la ecuación de salida resultará:

$$y(k) = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \qquad (92)$$

Es posible observar en la ec. de estado de mayor grado obtenida en (91), que los polos de lazo cerrado del sistema de la figura 6, están determinados por el propio sistema, y los mismos dependen del diseño de las matrices de ganancias K_1 y K_2; y no dependen del vector de comando $r(K)$. Esos polos de lazo cerrado, están determinados por los autovalores de la matriz de estado en la (91).

Para aplicar la técnica de reubicación de polos presentada en secciones anteriores, es necesario transformar el sistema de la figura 6 para llevarlo a la forma de la figura 4. Con este objetivo, considérese el caso donde el vector de comando $r(K)$ es un vector constante, o sea:

$$r(K) = r$$

La ec. (91) se torna:

$$\begin{bmatrix} X(K+1) \\ u(K+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & H \\ (K_2 - K_2 G - K_1 C G) & (I_m - K_1 C H - K_2 H) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(K) \\ u(K) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_1 r \end{bmatrix} \quad (93)$$

Antes de continuar, es importante aclarar q' la matriz de estado de la (93) posee dimensión $(n+m)\times(n+m)$ y la matriz de salida de la ec. (92) posee dimensión $m\times(n+m)$, siendo la dimensión de la matriz nula igual a $(m\times m)$. Por otro lado, la matriz de entrada en la (93) posee dimensión $(n+m)\times m$ y la matriz nula, tiene dimensión igual a $(n\times m)$.

Nótese que, para una entrada en escalón los vectores $x(k)$, $u(k)$ y $v(k)$ tienden a los vectores constantes cuando $k \to \infty$, o sea, tienden a $x(\infty)$, $u(\infty)$ y $v(\infty)$ respectivamente.

Con esta condición se obtiene la siguiente ecuación de régimen estable:

$$v(\infty) = v(\infty) + r - y(\infty) \qquad (94)$$

o sea, cuando $k \to \infty$

$$y(\infty) = r \qquad (95)$$

por lo que no existe error de régimen permanente cuando el vector de entrada es un escalón.

Por lo tanto, la ec. (93) se torna:

$$\begin{bmatrix} x(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & H \\ (K_2 - K_2 G - K_1 C G) & (I_m - K_2 H - K_1 C H) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ u(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_1 r \end{bmatrix} \qquad (96)$$

Definimos a continuación los vectores de error de ~~[illegible]~~ estado y acción de control,

$$x_e(k) = x(k) - x(\infty)$$
$$u_e(k) = u(k) - u(\infty) \qquad (97)$$

Entonces, restando la ec. (96) de la (93), resulta la siguiente ecuación de espacio de estado homogénea de error, esto es:

$$\begin{bmatrix} x_e(k+1) \\ u_e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & H \\ (K_2 - K_2 G - K_1 C G) & (I_m - K_2 H - K_1 C H) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(k) \\ u_e(k) \end{bmatrix} \qquad (98)$$

Esta última ecuación de estado, puede ser modificada y reescrita de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} X_e(K+1) \\ u_e(K+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & H \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_e(K) \\ u_e(K) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} W(K) \quad (99)$$

donde: $W(K) = \left[(K_2 - K_2 G - K_1 C G) \vdots (I_m - K_2 H - K_1 C H) \right] \begin{bmatrix} X_e(K) \\ u_e(K) \end{bmatrix}$ (100)

Se observa que la (99) aparece como una nueva ecuación de estado, en la cual se incluye la dinamica de la planta más el la del servo controlador. A partir de esto podemos definir lo siguiente:

$$\xi(K) = \begin{bmatrix} X_e(K) \\ u_e(K) \end{bmatrix} : \text{vector de dimensión } (n+m)$$

$$\hat{G} = \left[\begin{array}{c|c} G & H \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] = \text{matriz de estados aumentada de dimensión } (n+m) \times (n+m)$$

$$\hat{H} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline I_m \end{array} \right] = \text{matriz de entrada aumentada de dimensión } (n+m) \times m$$

(101) $\hat{K} = -\left[(K_2 - K_2 G - K_1 C G) \vdots (I_m - K_2 H - K_1 C H) \right]$ = matriz de ganancias de realimentación de estados, compuesta, de dimensión $m \times (n+m)$.-

Nótese que, en cuanto a las matrices nulas en la matriz $\hat{G}$, la q' se encuentra a la izquierda y debajo de la matriz G, posee dimensión $(m \times n)$ y la restante, posee dimensión $(m \times m)$.- En cuanto que la matriz nula en la matriz $\hat{H}$, posee dimensión $(n \times m)$ y la matriz identidad, $(m \times m)$.-

Por lo tanto, de las ecuaciones (99) y (100) se obtiene la siguiente ec. de estado

$$\xi(K+1) = \hat{G}\,\xi(K) + \hat{H}\,w(K) \qquad (102)$$

siendo $w(K)$, el vector de acción de control dado por:

$$w(K) = -\hat{K}\,\xi(K) \qquad (103)$$

Como se puede observar, se ha transformado el problema de control del sistema de seguimiento o servo de la figura 6, a un problema de reubicación de polos por realimentación de estados como el de la figura 4; en el cual los estados en este caso específico, son los propios estados de la planta y las acciones de control impuestas al sistema.

El paso siguiente es el de diseñar la matriz de ganancias $\hat{K}$, por ejemplo, por la técnica de reubicación de polos. Para que esta técnica pueda ser aplicada, debe primero verificarse si el sistema dinámico definido por la (102) es totalmente controlable.

La matriz de controlabilidad de este sistema, está definida por:

$$[\hat{H} \vdots \hat{G}\hat{H} \vdots \cdots \vdots \hat{G}^{n+m-1}\hat{H}] = (n+m) \times m(n+m) \qquad (104)$$

Al asumirse q' la ec. de estado de la planta dada en la (80) es completamente controlable, el rango de la matriz $[H \vdots GH \vdots \cdots \vdots G^{n-1}H]$ es igual a "n".

Por lo que el rango de la matriz aumentada de controlabilidad, de la ec. de estado (102), dada por la (104), es igual a $(n+m)$.

Por lo tanto, si el rango de esta matriz es completo e igual a $(n+m)$, el sistema definido por la (102) es totalmente controlable y la técnica de ubicación de polo puede ser aplicada.

Definitivamente, una vez especificados los polos de lazo cerrado, pueden utilizarse algunos de los métodos planteados en secciones anteriores, o en su defecto la función "place" de Matlab, para obtener la matriz de ganancias $\hat{\mathbb{K}}$. Entonces, una vez determinada la matriz $\hat{\mathbb{K}}$, pueden obtenerse a partir de esta última, las matrices $\mathbb{K}_1$ y $\mathbb{K}_2$ de la siguiente forma:

En la (101), introduciendo el signo (−) dentro de la matriz y factorizando $\mathbb{K}_2$ y $\mathbb{K}_1$, se tiene:

$$\hat{\mathbb{K}} = [\, K_2 G + K_1 C G - K_2 \,\vdots\, K_2 H + K_1 C H - I_m \,]$$

$$\hat{\mathbb{K}} = [K_2 \,\vdots\, K_1] \left[\begin{array}{c|c} G - I_n & H \\ \hline C G & C H \end{array}\right] + [\mathbb{0} \,\vdots\, -I_m]$$

De esta última, se obtienen:

$$[\mathbb{K}_2 \,\vdots\, \mathbb{K}_1] = \left\{ \hat{\mathbb{K}} + [\mathbb{0} \,\vdots\, I_m] \right\} \left[\begin{array}{c|c} G - I_n & H \\ \hline C G & C H \end{array}\right]^{-1} \qquad (105)$$

donde la matriz nula posee una dimensión $(m \times n)$.

Es importante resaltar, que de la ec. (**105**) pueden obtenerse más que un conjunto de matrices K_1 y K_2 dado que la matriz $\hat{K}$ no es única cuando $u(k)$ es un vector de dimensión "m" con $m > 1$.
Por lo tanto, el conjunto de K_1 y K_2, que brinde el mejor desempeño global del sistema en lazo cerrado, debe ser elegido.

El procedimiento de proyecto presentado en esta sección será validado a través de un ejemplo numérico.

En el sistema de control de la figura 5, se observó que la realimentación de los estados modifica la ecuación característica del sistema, modificando la ganancia de régimen estacionario, por lo si hubo que diseñarse una ganancia de ajuste K_0 de la referencia para que el error de régimen $e(k)$ entre la salida y la referencia sea nulo cuando $k \to \infty$.
Entonces, en este mismo caso, para evitar tener que hacer posteriores ajustes en la ganancia debido a variaciones paramétricas de la planta, se introduce un seguidor de referencia o servo controlador, a fin de garantizar error nulo de régimen estacionario para entrada en escalón.

<u>Primer paso</u>: Definir las matrices circunflejas o aumentadas:

$$\hat{G} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -0{,}16 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \hat{H} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hline 1 \end{array}\right] \quad \hat{C} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\hat{D} = 0$$

Definidas las matrices aumentadas, debe verificarse la controlabilidad de este sistema de control con servo, o sea:

$$M_c = [\hat{H} \,\vdots\, \hat{G}\hat{H} \,\vdots\, \hat{G}^2\hat{H}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El rango de la matriz $M_c = n+m = 3$, por lo q' el nuevo sistema de control con realimentación de estados q' incluye al servo, es totalmente controlable.

A continuación, deben definirse los polos deseados de lazo cerrado. Como primer solución, se eligen los mismos polos complejos conjugados presentados anteriormente, como polos dominantes, y un polo no dominante, el cual está asociado a la dinámica de la integral del error. O sea:

$$z_1 = 0{,}5 + j0{,}5 \quad z_2 = 0{,}5 - j0{,}5 \quad z_3 = 0{,}01$$

Con esta selección, el polinomio característico deseado resulta:

$$P_{cd} = z^3 - 1{,}01z^2 + 0{,}51z - 0{,}005$$

del cual, los coeficientes α_i serán:

$$\alpha_1 = -1{,}01 \;;\; \alpha_2 = 0{,}51 \;;\; \alpha_3 = -0{,}005$$

Por otro lado, debe plantearse el polinomio característico de la planta aumentada, a partir de la matriz $\hat{G}$, esto es:

$$\hat{P}_c = |z\mathbf{I} - \hat{G}|$$

$$P_c = z^3 + z^2 + 0{,}16z$$

del cual, los coeficientes a_i son los siguientes:

$$a_1 = 1 \; ; \quad a_2 = 0{,}16 \; ; \quad a_3 = 0$$

Con los datos q' se tiene hasta el momento, pueden aplicarse los métodos ya presentados para calcular la matriz de ganancias $\hat{K}$.

Método 1: Se tiene q' la transformación lineal

$T = M_c W$ donde: M_c, es la matriz de controlabilidad circunfleja

y la matriz W está dada por:

$$W = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}16 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0{,}16 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0{,}16 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{K} = [(\alpha_3 - a_3) \,\vdots\, (\alpha_2 - a_2) \,\vdots\, (\alpha_1 - a_1)] \times T^{-1}$$

$$\hat{K} = [0{,}3166 \quad 2{,}36 \quad -2{,}01]$$

Método 2: Fórmula de Ackermann

$$\hat{K} = [0 \; 0 \; 1] \, M_c^{-1} \phi(\hat{G})$$

$$\phi(\hat{G}) = \hat{G}^3 + \alpha_1 \hat{G}^2 + \alpha_2 \hat{G} + \alpha_3 I_{n+m}$$

$$M_c^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad \phi(G) = \begin{bmatrix} 0{,}3166 & 2{,}36 & -2{,}01 \\ -0{,}3776 & -2{,}0434 & 2{,}36 \\ 0 & 0 & -0{,}005 \end{bmatrix}$$

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} 0{,}3166 & 2{,}36 & -2{,}01 \end{bmatrix}$$

<u>Método 3</u>: La ecuación característica del sistema aumentado en lazo cerrado con la realimentación de los estados a partir de $\hat{K}$; estos es, la realimentación de los estados de la (102):

$$|zI - \hat{G} + \hat{H}\hat{K}| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0{,}16 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{K}_1 & \hat{K}_2 & \hat{K}_3 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} z & -1 & 0 \\ 0{,}16 & z+1 & -1 \\ \hat{K}_1 & \hat{K}_2 & \hat{K}_3 + z \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$P_{CRe} = z^3 + (\hat{K}_3 + 1) z^2 + (\hat{K}_2 + \hat{K}_3 + 0{,}16) z + (\hat{K}_1 + 0{,}16 \hat{K}_3) = 0$$

Igualando coeficientes de igual potencia de este último polinomio con los del polinomio característico deseado, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\hat{K}_3 + 1 = -1{,}01 \qquad \hat{K}_2 + \hat{K}_3 + 0{,}16 = 0{,}51$$

$$\hat{K}_1 + 0{,}16 \hat{K}_3 = -0{,}005$$

De estas ecuaciones se obtienen:

$$\underline{\hat{K}_3 = -2{,}01} \qquad \hat{K}_2 = 0{,}51 - 0{,}16 + 2{,}01$$

$$\underline{\hat{K}_2 = 2{,}36}$$

$$\hat{K}_1 = -0{,}005 + 0{,}16 \times 2{,}01$$

$$\underline{\hat{K}_1 = 0{,}3166}$$

Finalmente, se tiene que:

$$\hat{\mathbb{K}} = [0{,}3166 \quad 2{,}36 \quad -2{,}01]$$

Como conclusión hasta el momento, se aprecia q/ para los 3 métodos utilizados, la matriz $\hat{K}$ resultó igual. El mismo resultado se obtiene, al utilizarse la función "place" en Matlab.

Finalmente, con $\hat{K}$ calculada, aplicándose la (105) se obtienen las ganancias de realimentación de los estados y la ganancia del servo controlador.

$$[K_2 \,\vdots\, K_1] = \left\{[0{,}3166 \;\; 2{,}36 \;\; -2{,}01] + [0 \;\; 0 \;\; 1]\right\} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -0{,}16 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$K_2 = [-0{,}1550 \quad -1{,}01] \qquad K_1 = 0{,}4950$$

Diseñadas las ganancias del sistema, resta validarlas en simulación. Para tal propósito, es útil hallar las matrices de estado de lazo cerrado del sistema resultante q/ se muestra en la figura 7.

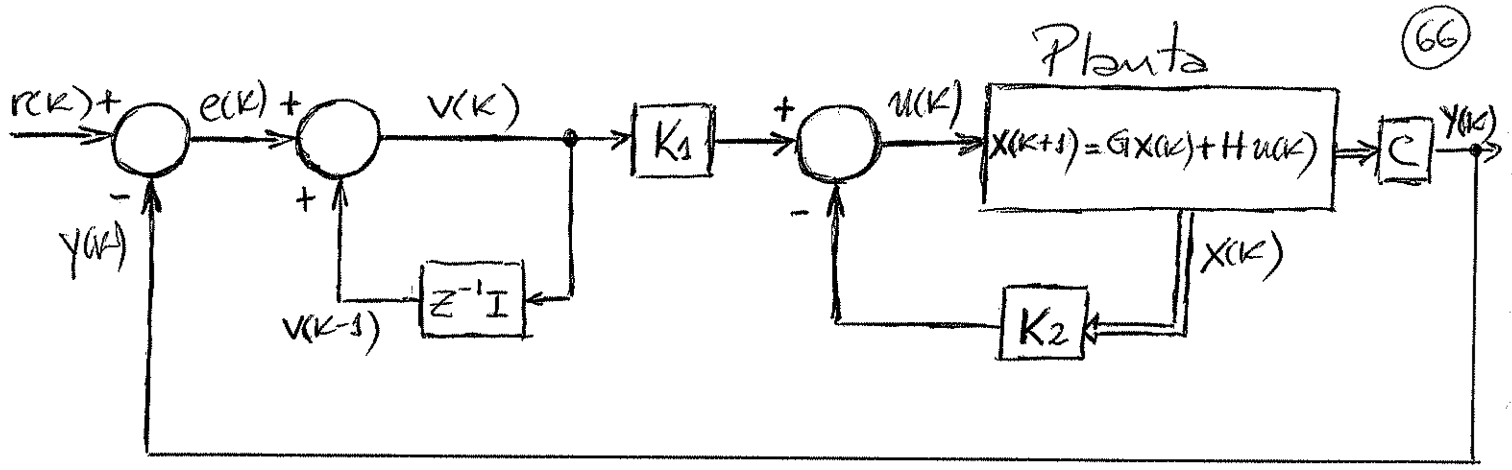


Figura 7

Para tal fin, tómese la ecuación (85) y sustitúyase la ec. (86), esto es:

$$V(K+1) = V(K) + r(K+1) - CGX(K) - CHK_1V(K) + CHK_2X(K) \quad (106)$$

También, tómese la ec. (80) y sustitúyase la (86), o sea,

$$X(K+1) = GX(K) + HK_1V(K) - HK_2X(K) \quad (107)$$

Reordenando las ec. (106) y (107) se tiene:

$$V(K+1) = [I_m - CHK_1]V(K) + [CHK_2 - CG]X(K) + r(K+1) \quad (108)$$

$$X(K+1) = HK_1V(K) + [G - HK_2]X(K) \quad (109)$$

La dinámica del sistema de lazo cerrado de la figura 7, puede representarse ahora como una combinación lineal de las ecuaciones de estado (108) y (109), o sea:

$$\begin{bmatrix} X(K+1) \\ V(K+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (G - HK_2) & HK_1 \\ (CHK_2 - CG) & (I_m - CHK_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(K) \\ V(K) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} r(K+1) \quad (110)$$

Cabe destacar, q' los autovalores de la matriz de estados de la (110), son los mismos q' los de la matriz de estado de la ec. (91), lo que demuestra q' la representación de espacio de estado de un mismo sistema dinámico, no es única.

Con la (110) se define el sistema lineal de espacio de estado útil para verificar el desempeño dinámico del sistema. En Matlab puede definirse este sistema de la siguiente forma:

$$SYS\_CS = SS(G_S, H_S, \hat{C}, \hat{D}, T_m) \qquad (111)$$

En la (111), las matrices para el ejemplo q'se está tratando, son:

$$G_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0{,}005 & 0{,}01 & 0{,}495 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad H_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \hat{D} = 0$$

y $T_m = 0{,}1s$ (periodo de muestreo)

Con este sistema puede verificarse el desempeño de los estados, con condiciones iniciales determinadas usando el comando "initial", y también la respuesta al escalón unitario.

Para verificar el proceso de diseño de las ganancias para diferentes especificaciones de desempeño y los resultados de simulación de este sistema, remitirse al script de Matlab "ejemplo_clase_teorica_02_servo.m".