# Controlador PI predictivo.

$$u(t) = K_p\, e(t) + \frac{K_p}{T_i}\int_0^t e(t)\,dt \qquad (1)$$

$$u_p(k) = K_p\, e(k) \qquad (2)$$

La acción integral puede ser aproximada por la regla rectangular de Backward de integración. Si $s(k-1)$ aproxima el área bajo la curva del error hasta $t=(k-1)T$, entonces la aproximación del área bajo la curva $e(t)$ hasta $t=kT$, está dada por:

$$s(k) = s(k-1) + T.e(k) \qquad (3)$$

La realización digital de la acción integral está dada entonces por

$$u_I(k) = \frac{K_p}{T_i}\, s(k) = K_i\, s(k) \qquad (4)$$

Utilizándose la predicción lineal para estimar el error $e(k)$ a partir de los dos últimos valores anteriores a este, se tiene:

$$e(k) = e(k-1) + [e(k-1) - e(k-2)] \qquad (5)$$

Sustituyéndose (5) en (1):

$$u_p(k) = 2K_p\, e(k-1) - K_p\, e(k-2) \qquad (6)$$

y ahora, sustituyéndose (5) en (3):

$$s(k) = s(k-1) + 2T.e(k-1) - T e(k-2) \qquad (7)$$

Finalmente, la acción integral predictiva, queda (2)

$$u_I(k) = s(k-1) + 2K_iT \cdot e(k-1) - K_iT \cdot e(k-2) \quad (8)$$

La acción PI en ec. a diferencias finitas p/ su implementación digital en forma predictiva resulta:

$$u_{PI}(k) = 2K_p\, e(k-1) - K_p\, e(k-2) + 2K_iT e(k-1) - K_iT e(k-2)$$
$$+ s(k-1) \quad (9)$$

donde $s(k-1) = u_{PI}(k-1)$

Agrupándose términos:

$$u_{PI}(k) = (2K_p + 2K_iT)\, e(k-1) + (-K_p - K_iT)\, e(k-2) +$$
$$+ u_{PI}(k-1)$$

$$K_1 = 2K_p + 2K_iT \quad y \quad K_2 = -(K_p + K_iT)$$

$$u_{PI}(k) = K_1\, e(k-1) + K_2\, e(k-2) + u_{PI}(k-1) \quad (10)$$

Aplicándose la Transformada Z a (10) se tiene:

$$U_{PI}(z) - z^{-1}U_{PI}(z) = K_1 z^{-1} E(z) + K_2 z^{-2} E(z)$$

$$U_{PI}(z)(1 - z^{-1}) = (K_1 z^{-1} + K_2 z^{-2})\, E(z)$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{U_{PI}(z)}{E(z)} = \frac{K_1 z^{-1} + K_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})} \times \frac{z}{z}$$

$$G(z) = \frac{K_1 + K_2 z^{-1}}{z - 1} \times \frac{z}{z} = \frac{zK_1 + K_2}{z(z-1)}$$

$$G_{PI}(z) = K_1 \times \frac{z + (K_2/K_1)}{z(z-1)} \quad (11)$$

de (10)

$$u_{PI}(k) = K_1\, e(k-1) - K_2\, e(k-2) + u_{PI}(k-1)$$

$$U_{PI}(z) - z^{-1} U_{PI}(z) = \left(K_1 z^{-1} - K_2 z^{-2}\right) E(z)$$

$$G(z) = \frac{U_{PI}(z)}{E(z)} = \frac{K_1 z^{-1} - K_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})} \times \frac{z^2}{z^2}$$

$$G_{PI}(z) = \frac{K_1 z - K_2}{z(z-1)} = \boxed{K_1 \times \frac{z - (K_2/K_1)}{z(z-1)}} \quad (12)$$

---

Ejemplo: Planta corresponde a un horno de secado cuya F.T es:

$$G_p(s) = \frac{10}{5 \times s^2 + 50.5 + 1} \quad (13)$$

Se incorpora un atraso de transporte aproximado por la sig. F.T:

$$G_a(s) = \frac{0{,}5}{5 + 1} \quad (14)$$

La F.T total q' determina la dinámica del proceso a lazo abierto, resulta:

$$G_t(s) = \text{series}(G_a, G_p)$$