PID predictivo

Para la implementación digital de un controlador PID, la ecuación a diferencia de la ec. en tiempo continuo de un PID puede expresarse como:

$$u(n) = K_p e(n) + K_i T \sum_{K=1}^{n} e(K) + \frac{K_d}{T}\left[e(n) - e(n-1)\right] \quad (1)$$

Ciertos beneficios pueden ser conseguidos si se usa una predicción del error, utilizándose los valores futuros en vez del valor actual del mismo, $e(n)$.

La propuesta de Aylor, Ramey and Cook es utilizar una simple predicción linear dada por:

$$e(n) = e(n-1) + \left[e(n-1) - e(n-2)\right] \quad (2)$$

Usando este algoritmo para predecir $e(nT)$, en (1), la ec. del PID predictivo resulta:

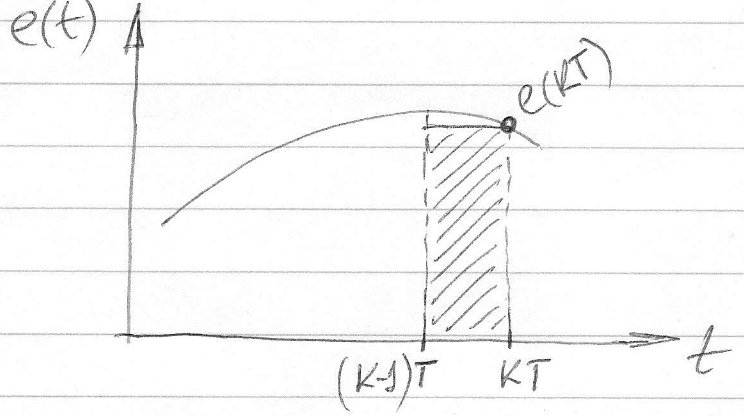
$$u(n) = K_p\left[2e(n-1) - e(n-2)\right] + K_I\left[\sum_{K=1}^{n-1} e(K) + 2e(n-1) - e(n-2)\right] + K_D\left[e(n-1) - e(n-2)\right] \quad (3)$$

donde: $K_I = K_i T$ y $K_D = K_d/T$

Obtención de la función de transferencia del PID-P.

Considérese el término integral en (1).

$\sum_{K=1}^{n} e(K)$: Este término resulta de emplear la regla de integración rectangular, por ejemplo la regla de Backward



El área bajo la curva de e(t) es aproximada por el área rectangular sombreada $= T.\,e(K)$

Si $x(t)$ es la integral de $e(t)$, la regla de integración rectangular da:

$$x(K) = x(K-1) + T.\,e(K) \qquad (4)$$

Tomando la transformada Z de (4) resulta:

$$X(Z) - Z^{-1}X(Z) = T.\,E(Z)$$

$$X(Z)\,(1 - Z^{-1}) = T.\,E(Z)$$

$$X(Z) = \frac{T}{1-Z^{-1}}\,E(Z)$$

$$X(Z) = \frac{ZT}{Z-1}\,E(Z) \qquad (5)$$

Por lo tanto, la transformada Z del controlador PID dado en (1) resulta:

$$U(z) = K_P E(z) + K_I \frac{zE(z)}{z-1} + K_D\left[E(z) - z^{-1}E(z)\right]$$

$$U(z) = \left[K_P + K_I\left(\frac{z}{z-1}\right) + K_D\left(\frac{z-1}{z}\right)\right]E(z) \quad (6)$$

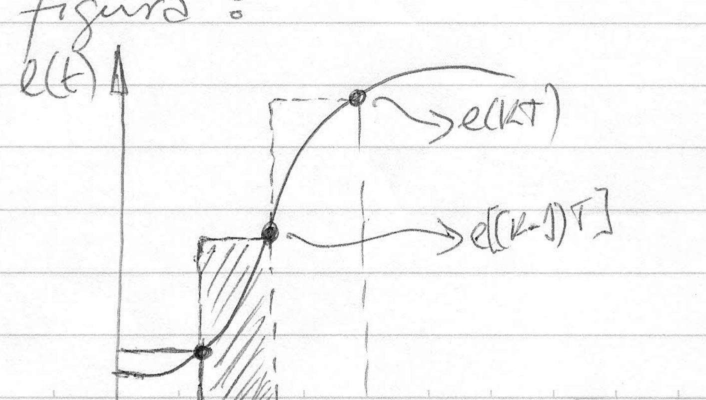
Con el mismo razonamiento puede obtenerse la transformada Z del controlador PID predictivo de la ec. (3):

- La parte proporcional resulta:

$$K_P\left[2z^{-1} - z^{-2}\right]E(z) = K_P\left(\frac{2z-1}{z^2}\right)E(z) \quad (7)$$

- La parte asociada a la integración resulta:

El término $\sum_{k=1}^{n-1} e(k)$ resulta de emplear la regla de integración rectangular, Backward teniendo en cuenta la integración hasta la muestra $(k-1)T$, o sea, esto se expresa en la sig. figura:



El área bajo la curva de $e(t)$ es aproximada por el área rectangular sombreada $T.e[(k-1)T]$

Entonces, siguiendo con el mismo razonamiento q' en (4), si $x(t)$ es la integral de $e(t)$, la regla de integración rectangular resulta:

$$x(k) = x(k-1) + T \cdot e(k-1) \qquad (8)$$

Tomándose la transformada Z de (8) se tiene:

$$X(Z) - Z^{-1} X(Z) = T \cdot Z^{-1} E(Z)$$

$$X(Z) = \frac{T \cdot Z^{-1}}{1 - Z^{-1}} E(Z)$$

(*) $$X(Z) = \frac{T}{Z-1} E(Z) \qquad (9)$$

- La parte asociada a la acción derivativa queda:

$$K_D \left[Z^{-1} - Z^{-2} \right] E(Z) =$$

$$= K_D \left[\frac{Z-1}{Z^2} \right] E(Z)$$

(*) Continuación acción integral predictiva:

$$K_I \left[\frac{1}{Z-1} + 2Z^{-1} - Z^{-2} \right] E(Z)$$

$$K_I \left[\frac{\cancel{Z^2}}{\cancel{Z^2}(Z-1)} + \frac{2Z}{Z^2} - \frac{1}{Z^2} \right] E(Z)$$

$$\left[\frac{Z^2 + 2Z \cdot (Z-1) - Z + 1}{Z^2 (Z-1)} \right]$$

Finalmente la parte integral predictiva resulta:

$$K_I\left[\frac{3z^2-3z+1}{z^2(z-1)}\right]E(z)$$

Agrupándose todos los términos, se llega a:

$$U(z)=\left[K_p\left(\frac{2z-1}{z^2}\right)+K_I\left(\frac{3z^2-3z+1}{z^2(z-1)}\right)+K_D\left(\frac{z-1}{z^2}\right)\right]E(z) \quad (10)$$

Observándose la ec. (10), se aprecia que aparece un polo doble al origen, el cual se debe uno de ellos al segundo atraso o muestra atrasada dos pasos o dos periodos T, del error e(t).

Trabajando con los términos dentro del corchete se tiene:

$$\frac{2K_p}{z}-\frac{K_p}{z^2}+\frac{3K_I}{z-1}-\frac{3K_I}{z(z-1)}+\frac{K_I}{z^2(z-1)}+\frac{K_D}{z}-\frac{K_D}{z^2}=\frac{U(z)}{E(z)}$$

$$\frac{2K_p z(z-1)-K_p(z-1)+3K_I z^2-3K_I z+K_I+K_D z(z-1)-K_D(z-1)}{z^2(z-1)}$$

Distribuyendo el numerador:

$2K_p z^2-2K_p z-K_p.z+K_p+3K_I z^2-3K_I z+K_I+K_D z^2-K_D z-K_D z$
$+K_D$

Finalmente

$$G_C(z)=\frac{(2K_p+3K_I+K_D)z^2-(3K_p+3K_I+2K_D)z+(K_p+K_I+K_D)}{z^2(z-1)} \quad (11)$$

NOTA

Si se introduce en la F.T (11) las expresiones de K_I y K_D, resulta la siguiente expresión con el periodo de muestreo como variable inherente a la misma:

$$G_c(z) = \frac{(2K_pT + 3K_iT^2 + K_d)z^2 - (3K_pT + 3K_iT^2 + 2K_d)z + (K_pT + K_iT^2 + K_d)}{z^2 T (z-1)} \quad (12)$$

Reescribiéndose la última expresión (12) de la siguiente forma:

$$G_c(z) = \frac{a.z^2 - b.z + d}{z^2(z-1)} = \frac{U(z)}{E(z)} \quad (13)$$

$$z^3 U(z) - z^2 U(z) = a.z^2 E(z) - bz E(z) + d E(z)$$

Aplicando la transformada Z inversa, se tiene:

$$u(k+3) - u(k+2) = a.e(k+2) - b e(k+1) + d.e(k) \quad (14)$$

escribiendo en forma causal la (14), 3 muestras atrás, se tiene finalmente la ec. recursiva implementable digitalmente:

$$u(k) = u(k-1) + a.e(k-1) - b.e(k-2) + d.e(k-3)$$

Siendo: $a = (2K_pT + 3K_iT^2 + K_d)/T$

$b = (3K_pT + 3K_iT^2 + 2K_d)/T$ y $d = (K_pT + K_iT^2 + K_d)/T$

Referencias bibliográficas:
Design and Application of a Microprocessor PID Predictor Controller
Robust Design of a Digital PID Predictor Controller

NOTA