



Universidad Nacional de Misiones.



SISTEMAS DE CONTROL 2

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA

DISEÑO DE CONTROLADORES EN EL DOMINIO DE

TIEMPO DISCRETO

PRINCIPIO DEL MODELO INTERNO

SISTEMAS DE CONTROL 2

DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA

FACULTAD DE INGENIERÍA – U.Na.M

PROFESOR RESPONSABLE: FERNANDO BOTTERÓN



Universidad Nacional de Misiones.



SISTEMAS DE CONTROL 2

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA

Índice

1.	Principio del Modelo Interno – Rastreo Asintótico Robusto y Rechazo de Disturbios	3
1.1.	Introducción	3
1.2.	Formas de implementar el modelo interno $\phi(z)$	10
1.2.1.	Generador de Señales Periódicas	10
1.2.2.	Modelo Interno Selectivo	11
	Referencias Bibliográficas	14

1. Principio del Modelo Interno – Rastreo Asintótico Robusto y Rechazo de Perturbaciones

1.1. Introducción

Considere el diseño de un sistema de control SISO LIT en el dominio del tiempo discreto, cuyo diagrama de bloques se muestra en la Figura 1. En este sistema, la función de transferencia muestreada de la planta con un periodo de muestreo T previamente especificado, es considerada estrictamente propia, y, está representada por $G_p(z)$. El problema consiste en diseñar un compensador con una función de transferencia propia $G_c(z)$ de forma tal que el sistema realimentado resulte asintóticamente estable y satisfaga las siguientes especificaciones:

(i) **Rastreo o seguimiento asintótico:** Significa que la salida de la planta $y(k)$ rastree o siga a la señal de referencia $r(k)$ a cada instante de muestreo, inclusive ante la presencia de perturbaciones y variaciones paramétricas de la planta, lo que puede expresarse matemáticamente como: $\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} [r(k) - y(k)] = 0$.

(ii) **Rechazo de perturbaciones:** Significa que el efecto de la perturbación en la salida o la entrada de la planta, tienda a cero cuando $k \rightarrow \infty$, lo que puede expresarse matemáticamente como: $\lim_{k \rightarrow \infty} y_w(k) \rightarrow 0$, donde $y_w(k)$ es la salida del sistema en lazo cerrado debido a la aplicación de la perturbación $w(k)$, con $r(k) \equiv 0$.

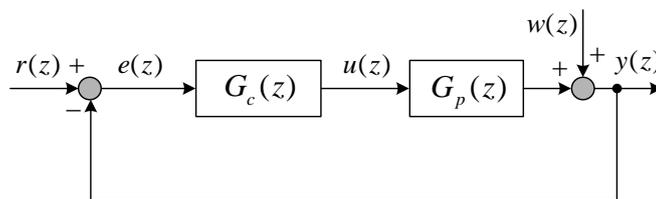


Figura 1 – Diagrama de bloques de un sistema de control SISO LIT con perturbación a la salida.

Las funciones de transferencia de la planta y del compensador son definidas, respectivamente, como $G_p(z) = N(z) / D(z)$ y $G_c(z) = N_c(z) / D_c(z)$. Se asume además que los polinomios $N(z)$ y $D(z)$ son coprimos, o sea, no poseen factores comunes, y por lo tanto no existe cancelación de polos y ceros. Con relación a las señales de referencia y de perturbación,



Universidad Nacional de Misiones.



SISTEMAS DE CONTROL 2

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA

$r(t)$ y $w(t)$, se asume que las transformadas \mathcal{Z} de las mismas son dadas por $r(z) = N_r(z)/D_r(z)$ y $w(z) = N_w(z)/D_w(z)$, respectivamente; donde los polinomios $D_r(z)$ y $D_w(z)$ son conocidos y los polinomios $N_r(z)$ y $N_w(z)$ son arbitrarios, siempre y cuando $r(t)$ y $w(t)$ resulten en funciones de transferencia propias.

Antes de enunciar el **Teorema del Principio del Modelo Interno** para sistemas discretos, se describe el siguiente Teorema para la completa caracterización de sistemas SISO en tiempo discreto.

Teorema 1:

Considere dos sistemas discretos SISO S_1 y S_2 los cuales están completamente caracterizados por sus funciones de transferencia muestreadas $G_1(z)$ y $G_2(z)$.

1. La **conexión paralela** de S_1 y S_2 está completamente caracterizada por $G(z) = G_1(z) + G_2(z)$, si y solamente si, $G_1(z)$ y $G_2(z)$ no poseen ningún polo en común.
2. La **conexión serie** de S_1 y S_2 está completamente caracterizada por $G(z) = G_1(z)G_2(z)$, si y solamente si, no existe cancelación polo-cero entre $G_1(z)$ y $G_2(z)$.

Prueba:

1. Si G_1 y G_2 poseen como mínimo un polo en común, entonces $\delta G < \delta G_1 + \delta G_2$, donde δ es el grado de la función de transferencia. Sea $G_i = N_i/D_i$, para $i = 1, 2$; donde los polinomios N_i y D_i son coprimos. Entonces $G = G_1 + G_2 = \frac{N_1D_2 + N_2D_1}{D_1D_2}$. Se puede demostrar por contradicción que si $G_1(z)$ y $G_2(z)$ no poseen ningún polo en común, entonces $\delta G = \delta G_1 + \delta G_2$. Supóngase que $\delta G < \delta G_1 + \delta G_2$; entonces existe por lo menos un factor común entre $(N_1D_2 + N_2D_1)$ y D_1D_2 . Si existe un factor común, digamos, entre $(N_1D_2 + N_2D_1)$ y D_1 , entonces la hipótesis de que no existe ningún factor común entre D_1 y D_2 implica que existe un factor común entre N_1 y D_1 . Esto contradice la hipótesis de que G_1 es irreducible, o sea, N_1 y D_1 no son coprimos. Por lo tanto, se concluye que si

$G_1(z)$ y $G_2(z)$ no poseen polos en común, entonces la función de transferencia $G = G_1 + G_2$ caracteriza la conexión en paralelo de S_1 y S_2 .

Por ejemplo, sean $G_1(z)$ y $G_2(z)$ dados en (1):

$$G_1(z) = \frac{z+2}{z+4} \quad y \quad G_2(z) = \frac{2}{(z+4)(z+6)} \quad (1)$$

Es fácil deducir por simple observación que la función de transferencia resultante

$$G = G_1 + G_2 = \frac{N_1 D_2 + N_2 D_1}{D_1 D_2},$$

posee grado menor que la suma de los grados de G_1 y G_2 ,

debido al polo común en -4 .

2. La prueba de esta parte es obvia y se omite. Como ejemplo podemos mostrar que siendo las funciones de transferencia $G_1(z)$ y $G_2(z)$ dadas en (2)

$$G_1(z) = \frac{z+6}{z+4} \quad y \quad G_2(z) = \frac{2}{(z+4)(z+6)} \quad (2)$$

Se observa que la función de transferencia resultante $G = G_1 G_2 = \frac{N_1 N_2}{D_1 D_2}$, posee grado

menor que la suma de los grados de G_1 y G_2 , debido a la cancelación del polo en -6 de G_2 con el cero en -6 de G_1 . **QED.**

Teorema 2:

Considere el sistema de la Figura 2 donde la planta está completamente caracterizada por su función de transferencia muestreada $G_p(z) = N(z)/D(z)$ estrictamente propia. Sea $\phi(z)$ el mínimo común denominador de los polos inestables de $r(z)$ y $w(z)$. Si ninguna raíz de $\phi(z)$ es un cero de $G_p(z)$, entonces existe un compensador con una función de transferencia propia, tal que el sistema realimentado es asintóticamente estable y satisface las especificaciones de seguimiento asintótico y rechazo de perturbaciones, inclusive con variaciones paramétricas de la planta.

Obsérvese que en la Figura 2 aparece la función de transferencia $G_c(z) = N_c(z)/D_c(z)$, al cual, a partir de este momento, denominaremos “compensador convencional o clásico”, haciendo alusión a las estructuras de compensación ya conocidas del control clásico.

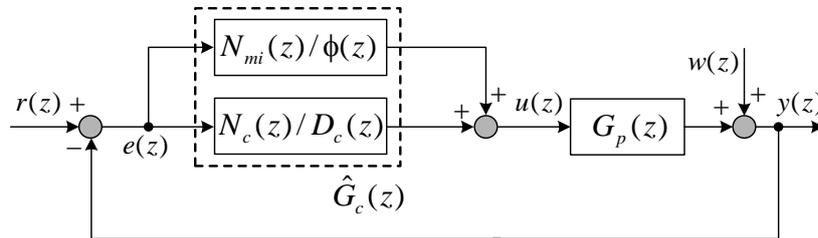


Figura 2 – Diagrama de bloques de la planta que incluye el compensador por modelo interno $\phi(z)$ conectado en paralelo con $G_c(z)$.

Prueba:

Considerando que la conexión paralela de $G_c(z) = N_c(z)/D_c(z)$ con la función de transferencia del controlador por modelo interno, $G_{mi}(z) = N_{mi}(z)/\phi(z)$ está completamente caracterizada por $\hat{G}_c(z) = \frac{N_c(z)}{D_c(z)} + \frac{N_{mi}(z)}{\phi(z)}$ (Teorema 1), y si ninguna raíz

de $\phi(z)$ es un cero de $G_p(z)$, la conexión en serie de la planta con $\hat{G}_c(z)$ es totalmente controlable. Consecuentemente, los polinomios $N(z)$ y $D(z)\phi(z)$ son coprimos. Por lo tanto, existe un compensador $\hat{G}_c(z) = \frac{N_c(z)\phi(z) + N_{mi}D_c(z)}{D_c(z)\phi(z)}$ tal que el sistema en lazo

cerrado mostrado en la Figura 2, es asintóticamente estable y cumple con las especificaciones de rastreo asintótico robusto de la referencia y rechazo de perturbaciones. Haciendo uso de la propiedad de linealidad del sistema, considérese en primer lugar el efecto de la perturbación sobre la salida de la planta cuando $r(k) \equiv 0$ y analícese que sucede con la función de transferencia del error debido única y exclusivamente al efecto de la perturbación sobre la salida de la planta, la cual es dada por:

$$y_w(z) = -e_w(z) = \frac{D(z)D_c(z)N_w(z)}{[D_c(z)D(z)\phi(z) + N_c(z)N(z)\phi(z) + N_{mi}(z)N(z)D_c(z)]} \cdot \frac{\phi(z)}{D_w(z)} \quad (3)$$

donde, $y_w(z)$ es la salida debida solamente a la perturbación $w(z)$. Se observa en la ecuación (3) que el polinomio $\phi(z)$ aparece en el numerador cancelando las dinámicas de la perturbación. Por lo tanto, si todas las raíces inestables de $D_w(z)$ son canceladas por $\phi(z)$, y, todos los polos de $y_w(z)$, o sea, las raíces del polinomio

$[D_c(z)D(z)\phi(z) + N_c(z)N(z)\phi(z) + N_{mi}(z)N(z)D_c(z)]$ se encuentran dentro del círculo unitario, se cumple que $y_w(k) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. Es importante resaltar que incluso cuando $w(k)$ no vaya estrictamente a cero cuando $k \rightarrow \infty$, el efecto de este se reduce significativamente.

Considérese ahora la salida $y(k)$ obtenida exclusivamente por la acción de la referencia $r(k)$ con $w(k) \equiv 0$. La función de transferencia del error es la que se describe en la ecuación (4),

$$e_r(z) = r(z) - y_r(z) = \frac{D(z)D_c(z)N_r(z)}{[D_c(z)D(z)\phi(z) + N_c(z)N(z)\phi(z) + N_{mi}(z)N(z)D_c(z)]} \cdot \frac{\phi(z)}{D_r(z)} \quad (4)$$

donde, $y_r(z)$ es la salida debida solamente al comando $r(z)$. Se observa en la ecuación (4) que el polinomio $\phi(z)$ aparece nuevamente en el numerador cancelando las dinámicas de la referencia. Por lo tanto, si todas las raíces inestables de $D_r(z)$ son canceladas por $\phi(z)$, y, todos los polos de $e_r(z) = r(z) - y_r(z)$, o sea, las raíces del polinomio $[D_c(z)D(z)\phi(z) + N_c(z)N(z)\phi(z) + N_{mi}(z)N(z)D_c(z)]$ se encuentran dentro del círculo unitario se cumple que $e_r(k) = [r(k) - y_r(k)] \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Dada la linealidad del sistema bajo análisis, es posible escribir:

$$y(k) = y_w(k) + y_r(k) \text{ y } e(k) = r(k) - y(k) \rightarrow 0, \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

Esto prueba el Teorema.

QED.

Por consiguiente, de este segundo Teorema se deriva el siguiente procedimiento de diseño que consta de dos etapas:

- 1) Introducción de $1/\phi(z)$, que es el modelo de las señales de referencia y de perturbación;
- 2) Estabilización del sistema realimentado a través de la introducción del compensador convencional $G_c(z)$.

En base a lo expuesto, puede resumirse que, la duplicación de la dinámica de la perturbación y de la referencia dentro del lazo de control por $1/\phi(z)$, se denomina usualmente, “Principio del Modelo Interno”; [3].



Universidad Nacional de Misiones.



Observaciones:

❖ De las ecuaciones (3) y (4) se observa que el rechazo de perturbaciones y el seguimiento asintótico de la referencia son posibles por la cancelación exacta de los modos inestables de las señales de referencia y de perturbación. Esto se realiza a través de duplicar dentro del lazo de control tales modos mediante el modelo interno, definido por el polinomio $\phi(z)$; el cual aparece como numerador de las funciones de transferencia del error $e_w(z)$ y $e_r(z)$. En otras palabras, la introducción del modelo interno se traduce en la determinación del polinomio requerido para cancelar las dinámicas inestables impuestas por las perturbaciones presentes a la entrada y a la salida de la planta; siempre y cuando se tenga información de esas dinámicas inestables.

❖ Se observa también, que aunque los parámetros de $N(z)$, $D(z)$, $N_c(z)$ y $D_c(z)$ cambien, mientras que el sistema en lazo cerrado se mantenga BIBO estable y las raíces inestables de $D_r(z)$ y $D_w(z)$ sean canceladas por $\phi(z)$, el sistema puede rastrear asintóticamente la referencia y rechazar las perturbaciones. Por otro lado, es importante resaltar que no son permitidas variaciones paramétricas del polinomio $\phi(z)$, para no afectar la exacta cancelación de los modos inestables de las perturbaciones exógenas.

❖ Es importante enfatizar que la condición expuesta en el Teorema 2, según la cual ninguna raíz del polinomio $\phi(z)$ debe ser un cero de la función de transferencia de la planta $G_p(z)$, es **necesaria** para la exacta cancelación de los modos inestables de la referencia y de la perturbación. Si esa condición no se satisface, la raíz cancelada de $\phi(z)$ se transforma en un modo oculto, el cual no puede ser compensado; por lo tanto, el diseño no cumplirá adecuadamente los requerimientos de desempeño inicialmente establecidos.

❖ Cabe destacar que la utilización del principio del modelo interno en sistemas de control, tales como el representado en la Figura 1, resulta útil para la operación en régimen permanente, si se tiene en cuenta que las señales de referencia y de la perturbación son periódicas o se repiten con un periodo conocido; no así para perturbaciones a la entrada o a la salida de la planta que son aperiódicas o asincrónicas.

❖ El compensador convencional $G_c(z)$, tiene dos funciones esenciales en este esquema: (i) la de proveer estabilidad al sistema en lazo cerrado con márgenes de fase y de ganancia adecuados, y (ii) mejorar el comportamiento del sistema en lazo cerrado en régimen transitorio para perturbaciones aperiódicas o desconocidas.

❖ La prueba del teorema 2, está basada en la estructura de bloques de la Figura 2 la cual utiliza la conexión del compensador por modelo interno en paralelo con el compensador $G_c(z)$. Es importante dejar claro que la conexión en serie o *tandem* del compensador $G_c(z)$ con el compensador por modelo interno, también permite rastreo asintótico de la referencia y rechazo de perturbaciones, inclusive con variaciones paramétricas de la planta. O sea, se puede demostrar fácilmente que, excepto alguna variante en las funciones de transferencia del error respecto a la referencia y respecto a la perturbación dadas en (3) y (4), el polinomio $\phi(z)$ aparece como numerador de estas funciones de transferencia cancelando los polos inestables de las perturbaciones exógenas. El esquema usado para este caso se representa en la Figura 3.

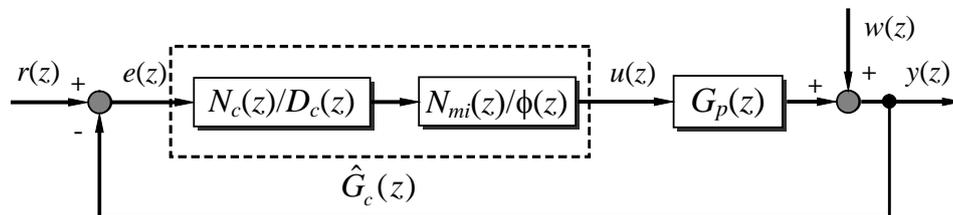


Figura 3 – Diagrama de bloques de la planta incluyendo el compensador $G_c(z)$ y el modelo interno $\phi(z)$, ambos conectados en serie.

Las funciones de transferencia del error respecto a la señal de perturbación, con $r(k) \equiv 0$, y a la señal de referencia, con $w(k) \equiv 0$, están dadas por las ecuaciones (5) y (6), considerando un caso particular de $N_{mi}(z) = 1$:

$$y_w(z) = -e_w(z) = \frac{D_c(z)D(z)N_w(z)}{D_c(z)D(z)\phi(z) + N_c(z)N(z)} \frac{\phi(z)}{D_w(z)} \quad (5)$$

$$r(z) - y_r(z) = \frac{D_c(z)D(z)N_r(z)}{D_c(z)D(z)\phi(z) + N_c(z)N(z)} \frac{\phi(z)}{D_r(z)} \quad (6)$$

Es importante recordar que la conexión serie del compensador $G_c(z)$ con la el compensador por modelo interno $G_{mi}(z)$ debe estar completamente caracterizada por $\hat{G}_c(z) = G_c(z)G_{mi}(z)$, lo que se cumple si y solamente si, no existe cancelación de polo y cero entre $G_c(z)$ y $G_{mi}(z)$; condición expresada en el punto 2 del Teorema 1.

1.2. Formas de implementar el modelo interno $\phi(z)$

1.2.1. Generador de Señales Periódicas

Para el caso específico de aplicaciones donde la referencia $r(k)$ y el disturbio $w(k)$ pueden representados por señales periódicas, el polinomio $\phi(z)$ del modelo interno puede ser representado por un generador de señales periódicas. En el dominio de tiempo discreto, una señal periódica de período $T = NT_s$ puede ser generado por una sucesión de atrasos con realimentación positiva [1]-[2]; como muestra la Figura 4, donde el período T de la señal periódica es un número entero N de muestras del período de muestreo T_s .

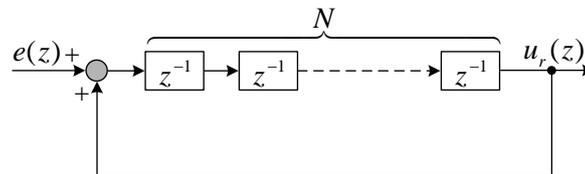


Figura 4 – Generador de señales periódicas en tiempo discreto.

Por ejemplo, para una aplicación tal como la generación de una señal sinusoidal a la salida de un convertidor CC-CA, T es el período fundamental de la referencia sinusoidal, considerado constante. El generador de señales periódicas se describe por la ecuación (7), donde $e_0(z)$ representa la transformada \mathcal{Z} de la primera secuencia periódica de $e(z)$, $e_0(k) = \{e(0), e(1), \dots, e(N-1)\}$, y z^{-N} está definido en (7).

$$u_r(z) = \frac{z^{-N}}{1 - z^{-N}} e_0(z) = \frac{1}{z^N - 1} e_0(z) \quad \begin{cases} z^{-N} = e^{-j2\pi i/N}, \quad i = 1, 2, \dots, M. \\ M = \frac{N}{2} \text{ para } N \text{ par, y} \\ M = \frac{N-1}{2} \text{ para } N \text{ impar.} \end{cases} \quad (7)$$

$$e_0(z) = e(0) + e(1)z^{-1} + \dots + e(N-1)z^{-(N-1)}$$

En resumen, el generador de señales periódicas de la Figura 4, introduce N polos equidistantemente separados, a lo largo del círculo unitario en las frecuencias de los modos de la referencia que se desea seguir, y, de las perturbaciones periódicas que se desean rechazar, como muestran la Figura 5 y la Figura 6, para N par y N impar. Según el Principio del Modelo Interno presentado en la sección anterior, el polinomio $\phi(z) = z^N - 1$. Es importante resaltar que, en este caso, la inclusión de los modos de las señales de referencia y de las perturbaciones en el lazo de control, hace que la ganancia del controlador sea infinita para las frecuencias de esos modos, debido a que están sobre el círculo unitario.

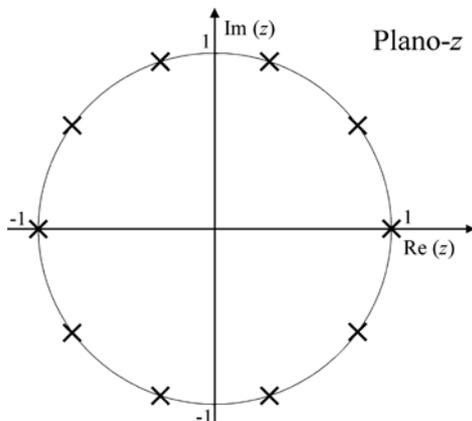


Figura 5 – Mapa de polos de (7) $N = 10$.

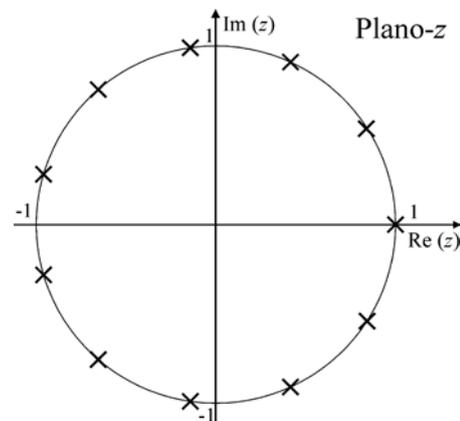


Figura 6 – Mapa de polos de (7) $N = 11$.

1.2.2. Modelo Interno Selectivo

La Figura 7 presenta un modelo interno con número reducido de polos y en frecuencias selectivas, pudiéndose si se desea, incluir mas polos sobre el círculo unitario. El polinomio para este modelo interno, considerando que la frecuencia fundamental es $f_1 = 50\text{Hz}$, resulta como se visualiza en la ecuación (8) y (9). El problema que presenta esta implementación es que si el mismo se pone en práctica en procesadores de aritmética de punto fijo, los polos son sensibles a los errores de redondeo de los coeficientes del polinomio $\phi(z)$. El resultado de los errores de redondeo es que la localización de los polos puede resultar significativamente afectada, como se muestra en la Figura 8. Esto viola el Principio del Modelo Interno, que establece que no son permitidas variaciones paramétricas del modelo interno, para que éste cancele correctamente los modos inestables de las señales de referencia y de disturbio [4].

$$\phi(z) = (z - e^{j2\pi h f_1 T_s}) \times (z - e^{-j2\pi h f_1 T_s}), \text{ con } f_1 = 50\text{Hz}, T_s = 400\mu\text{s} \text{ y } h = 0, 1, 2, \dots, 7. N = 50 \quad (8)$$

Expandiendo, el polinomio en (8) resulta:

$$\begin{aligned} \phi(z) = & z^{16} - 13.88z^{15} + 92.09z^{14} - (387.4 + 7.105e - 015i)z^{13} + (1156 - 1.421e - 014i)z^{12} \\ & - (2598 - 4.974e - 014i)z^{11} + (4543 - 2.842e - 014i)z^{10} - (6309 - 5.684e - 014i)z^9 \\ & + (7031 - 1.137e - 013i)z^8 - (6309 - 5.684e - 014i)z^7 + (4543 - 1.421e - 014i)z^6 \\ & - (2598 - 2.132e - 014i)z^5 + (1156 + 1.776e - 015i)z^4 - (387.4 + 1.088e - 014i)z^3 \\ & + (92.09 + 2.22e - 015i)z^2 - (13.88 + 2.22e - 016i)z + 1 \end{aligned} \quad (9)$$

Es posible observar en (9) que los coeficientes, excepto dos, no son números enteros, lo que acarrea un error inevitable de redondeo en un procesador que utiliza aritmética de punto fijo.

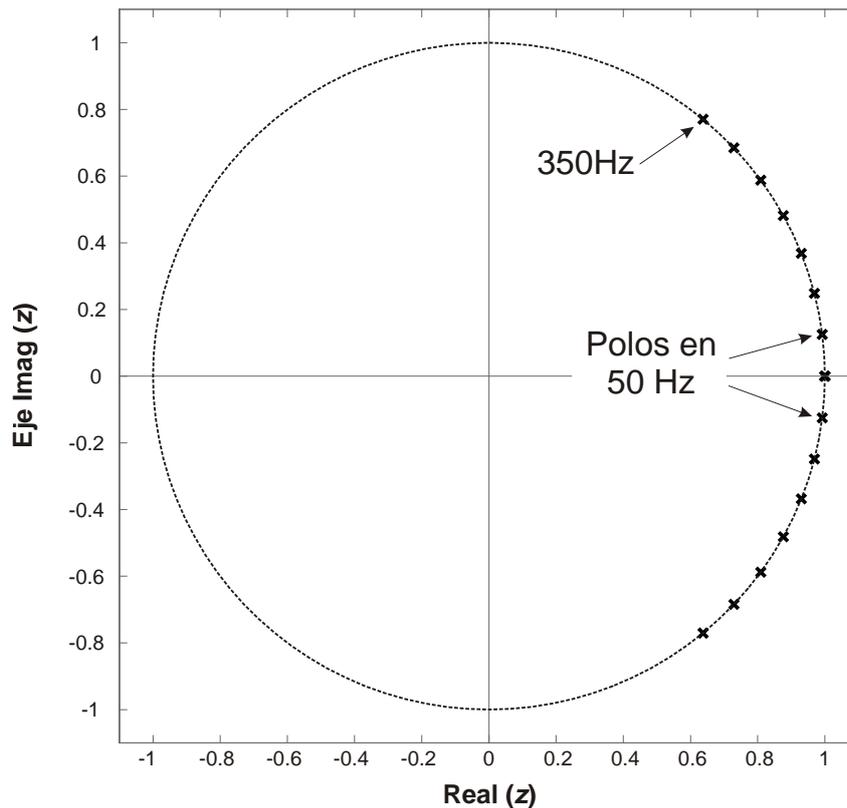


Figura 7 –Modelo interno selectivo con número reducido de polos.

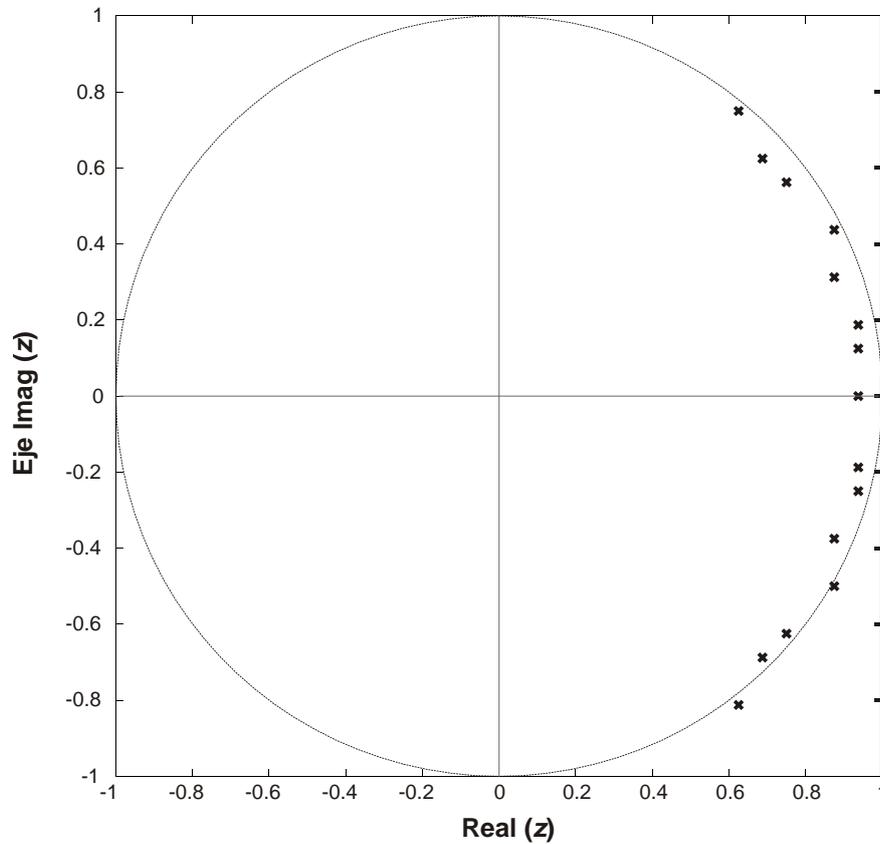


Figura 8 –Modelo interno selectivo con número reducido de polos. Efecto del error de redondeo.

Volviendo al generador de señales periódicas, siendo $\phi(z) = z^N - 1$ la función de transferencia del controlador por modelo interno puede escribirse de la siguiente forma:

$$G_{mi} = \frac{k_{mi} z^d}{z^N - 1} = \frac{U_{mi}(z)}{E(z)} \quad (10)$$

O también, factorizando z^N en el denominador,

$$G_{mi} = \frac{k_{mi} z^{-N+d}}{1 - z^{-N}} = \frac{U_{mi}(z)}{E(z)} \quad (11)$$

Donde, el exponente “ d ” representa un número de pasos o muestras hacia delante que permiten compensar la fase del sistema en lazo cerrado en las altas frecuencias, de forma que el mismo no se vuelva inestable, y k_{mi} es un escalar que permite aumentar o disminuir la velocidad con que el error de la variable controlada va a cero.



Universidad Nacional de Misiones.



Aplicando la inversa de la transformada \mathcal{Z} a la función transferencia en (11) se puede obtener la ecuación a diferencia adecuada para ser implementada recursivamente en un dispositivo programable digital. O sea:

$$u_{mi}(k) = k_{mi}e(k - N + d) + u_{mi}(k - N) \quad (12)$$

Esta última ecuación muestra que tanto el error como la acción de control del controlador por modelo interno deben ser almacenados en memoria RAM en forma de buffer circular. El tamaño de este buffer está definido por el número N de muestras, relacionado al periodo de la frecuencia fundamental de la señal que la salida debe rastrear asintóticamente.

Referencias Bibliográficas

- [1] M. Tomizuka, T. Tsao and K. Chew, “Analysis and synthesis of discrete-time repetitive controllers”, *Trans. ASME, J. Dynam. Syst., Meas. and Control*, vol. 111, pp. 353-358, Sep. 1989.
- [2] K. Chew and M. Tomizuka, “Steady-state and stochastic performance of a modified discrete-time prototype repetitive controller”, *Trans. ASME, J. Dynam. Syst., Meas. and Control*, vol. 112, pp. 35-41, Mar. 1990.
- [3] Chen, C. T. “Linear System Theory and Design”, Third edition. Oxford, 1998.
- [4] Fernando Botterón, “Controladores Discretos de Tensão Baseados no Princípio do Modelo Interno Aplicados a Inversores Trifásicos PWM”, Tese de Doutorado, PPGEE, Universidade Federal de Santa Maria, Dezembro 2005. <http://biblioteca.fio.unam.edu.ar/cgi-bin/koha/opac-main.pl>.