

3.4.2 Controlador *Plug-in* Repetitivo

Nesta subseção será abordado o controlador *plug-in* repetitivo [39] que utiliza o gerador de sinais periódicos para obter rastreamento assintótico da referência e rejeição de distúrbios periódicos.

Considere-se a planta pré-compensada da Figura 3.7, cuja função de transferência de malha fechada é dada por:

$$G_s(z) = \frac{G_c(z)G_p(z)}{1 + G_c(z)G_p(z)}, \quad (3.15)$$

ou reescrita em uma forma compacta,

$$G_s(z) = \frac{z^{-d}N_s(z^{-1})}{D_s(z^{-1})}, \quad (3.16)$$

onde $G_s(z)$ é estável, isto é, todas as raízes de $D_s(z^{-1}) = 0$, se encontram dentro do círculo unitário, ou equivalentemente $D_s(z^{-1})$ é um polinômio *Schur*; enquanto “ d ” representa um número conhecido de atrasos da planta.

Segundo o Teorema 2, um modelo interno $\phi(z)$ com os modos da referência e do distúrbio deve ser incluído no laço de realimentação, para que o sistema da Figura 3.7 atenda as especificações de rastreamento assintótico e rejeição de distúrbios. Para o caso em questão, o controlador repetitivo pode ser agregado (*plug-in*) à planta previamente estabilizada por um compensador convencional $G_c(z)$ [39]. A estrutura do controlador *plug-in* repetitivo é apresentada na Figura 3.14.

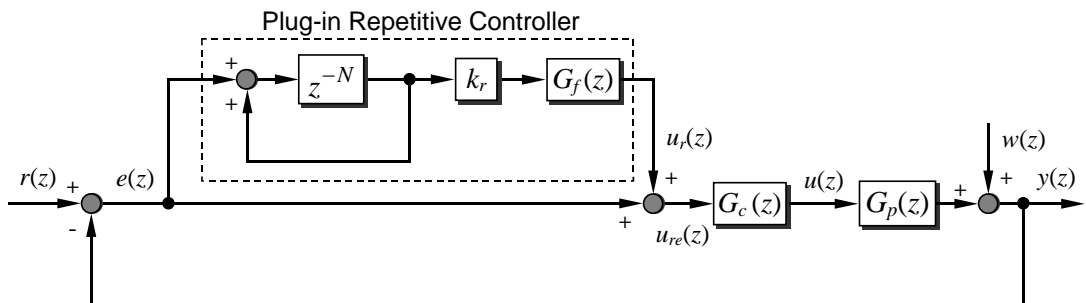


Figura 3.14 – Sistema SISO precompensado com controlador *Plug-in* Repetitivo

A função de transferência do controlador *plug-in* repetitivo da Figura 3.14, é

$$G_r(z) = \frac{k_r z^{-N_1}}{1 - z^{-N}} G_f(z) = \frac{k_r z^{N_2}}{z^N - 1} G_f(z) \quad N_1, N_2 > 0 \quad \text{e} \quad N_1 + N_2 = N \quad (3.17)$$

onde, k_r é o ganho do controlador repetitivo e $G_f(z)$, é um filtro de fase nula, que colocado entre o sistema e o gerador de sinais repetitivo, simplifica extremamente o projeto e a análise de estabilidade deste controlador [38],[39]. Basicamente, a introdução do filtro $G_f(z)$ permite um cancelamento de todos os pólos de malha fechada e zeros canceláveis de (3.16). Essas raízes permanecem como pólos ocultos de malha fechada, os quais representam modos estáveis e não aparecem na saída. De fato, $N_s(z^{-1})$ em (3.16), pode ser fatorado como $N_s(z^{-1}) = N_s^+(z^{-1})N_s^-(z^{-1})$, onde N_s^+ e N_s^- são as partes canceláveis e não canceláveis de N_s . A característica típica desse filtro é mostrada na Figura 3.15. Assim, $G_f(z)$ é definido como sendo,

$$G_f(z) = \frac{z^{-n_u} D_s(z^{-1}) N_s^-(z)}{N_s^+(z^{-1}) b}, \quad (3.18)$$

onde $N_s^-(z)$ é obtido substituindo cada z^{-1} em $N_s^-(z^{-1})$ por z , z^{-n_u} permite que o filtro possa ser implementado, sendo n_u a ordem de $N_s^-(z^{-1})$, isto é, o número de zeros não canceláveis, e $b \geq \max_{\omega \in [0, \pi]} |N_s^-(e^{-j\omega})|^2$ é um escalar o qual define a rapidez da taxa de convergência do erro. Em [39] encontra-se uma descrição para a escolha de “ b ”.

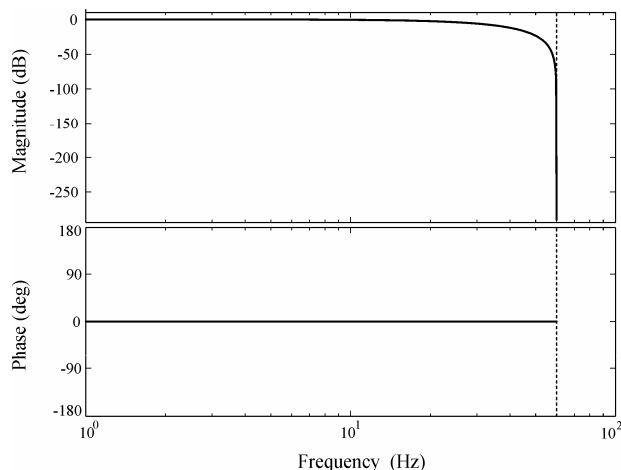


Figura 3.15 – Resposta em frequência do filtro de fase nula $G_f(z)$

Rastreamento assintótico. O erro $e(k)$ do sistema da Figura 3.14 converge assintoticamente para zero desde que a função de transferência do sistema pré-compensado $G_s(z)$, seja assintoticamente estável e $N_s(z^{-1})$ e $1 - z^{-N}$ sejam coprimos.

Estabilidade assintótica. O sistema da Figura 3.14 com o controle *plug-in* repetitivo definido pelas equações (3.17) e (3.18), é assintoticamente estável para $0 < k_r < 2$, se $N_s(z^{-1})$ e $1 - z^{-N}$ são coprimos.

A seguir verifica-se a margem de estabilidade do sistema com a introdução do controlador repetitivo para a faixa especificada de valores do ganho k_r .

A função de transferência do erro para a entrada, do sistema da Figura 3.14, é dada por,

$$\frac{e(z)}{r(z) - w(z)} = \frac{z^N - 1}{1 + G_c(z)G_p(z)} \cdot \frac{1}{[z^N - 1 + k_r z^{N_2} G_f(z)G_s(z)]}, \quad (3.19)$$

por outro lado, $G_f(z)G_s(z) = z^{-n_u} z^{-d} \frac{N_s^-(z)N_s^-(z^{-1})}{b} = z^{-N_2} \frac{N_s^-(z)N_s^-(z^{-1})}{b}$. Substituindo-

se a última expressão, em (3.19), e fatorando z^N no denominador tem-se,

$$\frac{e(z)}{r(z) - w(z)} = \frac{1 - z^{-N}}{1 + G_c(z)G_p(z)} \cdot \frac{1}{\left[1 - z^{-N} + z^{-N} k_r \frac{N_s^-(z)N_s^-(z^{-1})}{b}\right]}. \quad (3.20)$$

Da equação (3.20) resulta a seguinte análise:

1) As raízes de $1 + G_c(z)G_p(z) = 0$ estão dentro do círculo unitário, dado que

$G_s(z)$ é assintoticamente estável;

2) O termo entre colchetes do segundo fator de (3.20) deve ser analisado para definir a estabilidade assintótica do sistema com o controlador repetitivo. Então, fatorando z^{-N} , o termo entre colchetes pode ser reescrito da seguinte forma:

$$z^{-N} \left[1 - k_r \frac{N_s^-(z)N_s^-(z^{-1})}{b} \right] = 1 \quad (3.21)$$

A equação característica (3.21) pode ser considerada como provindo do sistema realimentado mostrado na Figura 3.16. Traçando-se então o diagrama de Nyquist da função de transferência de malha aberta do sistema da Figura 3.16, o número de contornos, em torno ao ponto $-1+j0$, é igual a zero para $0 < k_r < 2$. Portanto, a estabilidade assintótica do sistema da Figura 3.14 com o controlador *plug-in* repetitivo é garantida. Os diagramas de Nyquist para $k_r = 1.99$, (estável) e $k_r = 2.05$, (instável) são apresentados na Figura 3.17.

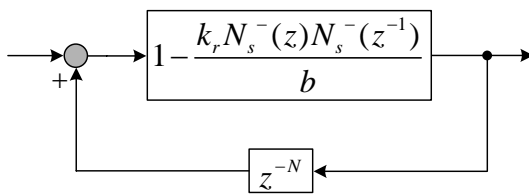


Figura 3.16 – Sistema realimentado equivalente para a análise da estabilidade.

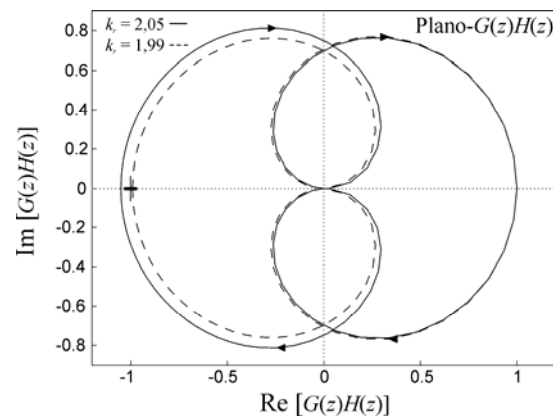


Figura 3.17 – Diagrama de Nyquist para $k_r = 1.99$ e $k_r = 2.05$. $N = 2$.

De outra forma, aplicando-se o teorema de pequenos ganhos [67] ao sistema realimentado da Figura 3.16, tem-se,

$$\|z^{-N}\| \left\| 1 - k_r \frac{N_s^-(z)N_s^-(z^{-1})}{b} \right\| < 1, \text{ ou } \left\| 1 - k_r \frac{N_s^-(z)N_s^-(z^{-1})}{b} \right\| < 1. \quad (3.22)$$

Desde que $\|z^{-N}\| = 1$ e $\|N_s^-(z)N_s^-(z^{-1})/b\| \leq 1$, Figura 3.15, para todo $z = e^{j\omega}$, $\omega \in [0, \pi]$, tem-se que $\|1 - k_r\| < 1$, isto é, $0 < k_r < 2$; para que o sistema resulte assintoticamente estável.

3.4.3 Controlador *Plug-in* Repetitivo Modificado

Como se apresentou na Figura 3.12 e Figura 3.13 da seção anterior, os pólos de malha aberta do controlador repetitivo se encontram sobre o círculo unitário do plano- z isto é, no limite da estabilidade. Assim, a estabilidade do controlador repetitivo resulta sensível às dinâmicas não modeladas, fazendo com que o diagrama de Nyquist se aproxime do ponto $-1+j0$; comprometendo, portanto, a estabilidade de todo o sistema [41]. Com o propósito de aumentar a robustez, em [40] e [41] é proposto um esquema alternativo utilizando um filtro FIR passa baixas assintoticamente estável, $Q(z, z^{-1})$ com $|Q(e^{j\omega}, e^{-j\omega})| \leq 1$ e fase nula, para $\omega \in [0, \pi]$, o qual é introduzido no gerador de sinais periódico. Este filtro pode ser também um escalar $q \in (0, 1)$, o que simplifica a implementação [40]. Em geral, o filtro $Q(z, z^{-1})$ pode ser expresso pela equação (3.23) onde α_i são os coeficientes do filtro, a serem projetados.

$$Q(z, z^{-1}) = \frac{\sum_{i=0}^m \alpha_i z^i + \sum_{i=1}^m \alpha_i z^{-i}}{2 \sum_{i=1}^m \alpha_i + \alpha_0}, \quad \text{onde, } i = 0, 1, 2, \dots, m; m = 0, 1, 2, \dots, N/2 \quad (3.23)$$

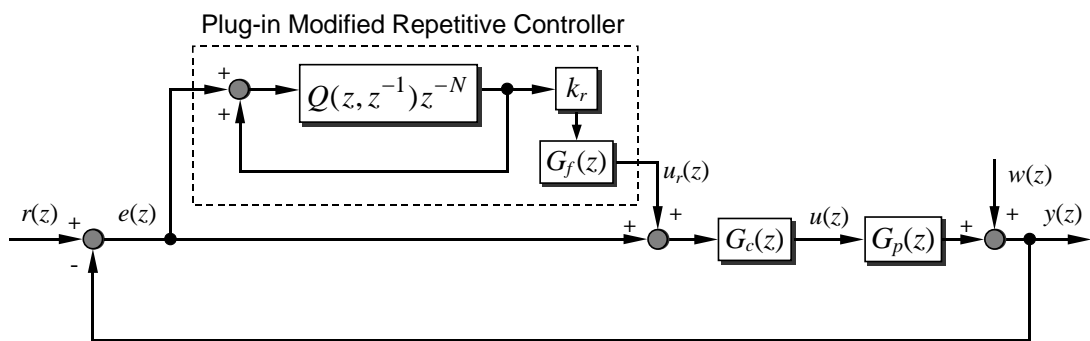


Figura 3.18 – Sistema precompensado com controlador *Plug-in* repetitivo modificado

Os pólos de malha aberta introduzidos pelo controlador repetitivo modificado, se encontram agora dentro do círculo unitário, exceto um em $z = 1$, Figura 3.19. Dessa forma, com a adição de $Q(z, z^{-1})$ o Princípio do Modelo Interno é violado, isto é, o sistema em malha fechada já não possui o modelo exato dos modos da referência e dos distúrbios. Principalmente, os distúrbios periódicos nas altas frequências não são perfeitamente cancelados por esse controlador, comprometendo o rastreamento nesta região. Entretanto, o sistema torna-se mais robusto à existência de incertezas de modelagem, as quais estão normalmente presentes nas altas frequências. De fato, o controlador *plug-in* repetitivo modificado é mais robusto às dinâmicas não modeladas na medida em que $|Q(e^{j\omega}, e^{-j\omega})| \rightarrow 0$. Deverá, portanto, existir uma solução de compromisso entre robustez e rastreamento assintótico para não degradar o desempenho em regime permanente. Em geral, um filtro $Q(z, z^{-1})$ de primeira ordem resulta suficiente para melhorar a robustez sem comprometer significativamente o desempenho em regime permanente, como por exemplo, $Q(z, z^{-1}) = 0.25z + 0.5 + 0.25z^{-1}$, proposto em [41]. O mapa de pólos e zeros para o controlador repetitivo modificado com esse filtro, é apresentado na Figura 3.19. Por outro lado, na Figura 3.20 apresenta-se as características de magnitude e fase para três diferentes filtros de primeira ordem. Note-se que, a diminuição da banda passante do filtro, se traduz em um aumento da robustez do sistema na região das altas frequências, em contrapartida, o desempenho em regime permanente deteriora-se, dado que a banda passante do sistema global em malha fechada diminui.

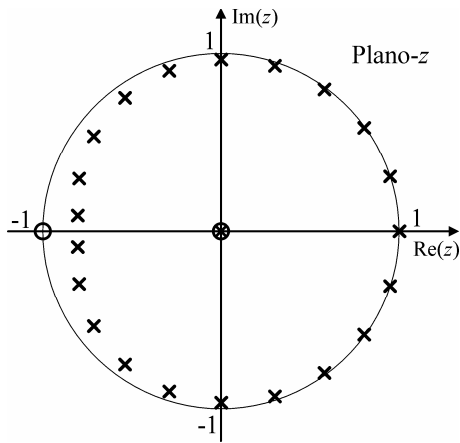


Figura 3.19 – Mapa de pólos e zeros do controlador repetitivo modificado
 $Q(z, z^{-1}) = 0,25z + 0,5 + 0,25z^{-1}$.

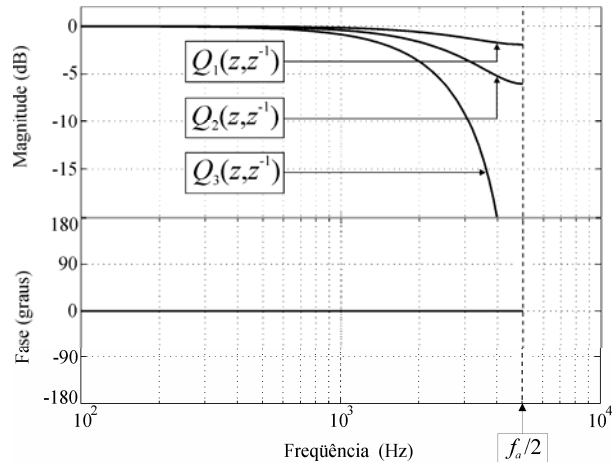


Figura 3.20 – Resposta de magnitude e de fase para três filtros diferentes de 1º ordem.

$$Q_1(z, z^{-1}) = 0.05z + 0.9 + 0.05z^{-1}$$

$$Q_2(z, z^{-1}) = 0.125z + 0.75 + 0.125z^{-1}$$

$$Q_3(z, z^{-1}) = 0.25z + 0.5 + 0.25z^{-1}$$

Com o filtro $Q(z, z^{-1})$, a função de transferência do controlador repetitivo modificado torna-se,

$$G_r(z) = \frac{k_r Q(z, z^{-1})z^{-N}}{1 - Q(z, z^{-1})z^{-N}} G_f(z), \quad (3.24)$$

e o modelo interno resulta: $\phi(z) = 1 - Q(z, z^{-1})z^{-N}$.

Considerando-se a (3.24) e fazendo-se uma análise similar à realizada na subseção anterior, é possível definir a condição para estabilidade assintótica do sistema em malha fechada com o controlador repetitivo modificado.

A função de transferência do erro para o sistema da Figura 3.18 que inclui o filtro $Q(z, z^{-1})$ no gerador periódico, é dada por:

$$\frac{e(z)}{r(z) - w(z)} = \frac{z^N - Q(z, z^{-1})}{1 + G_c(z)G_p(z)} \cdot \frac{1}{z^N - Q(z, z^{-1}) + k_r Q(z, z^{-1})z^{N_2} G_f(z) G_s(z)}, \quad (3.25)$$

substituindo-se $G_f(z)G_s(z) = z^{-N_2} N_s^-(z) N_s^-(z^{-1})/b$ e fatorando z^N no denominador, a equação (3.25) resulta,

$$\frac{e(z)}{r(z)-w(z)} = \frac{1-Q(z, z^{-1})z^{-N}}{1+G_c(z)G_p(z)} \cdot \frac{1}{1-Q(z, z^{-1})z^{-N} + k_r Q(z, z^{-1})z^{-N} \frac{N_s^-(z)N_s^-(z^{-1})}{b}}, \quad (3.26)$$

agrupando termos no denominador do segundo fator da equação (3.26) tem-se,

$$\frac{e(z)}{r(z)-w(z)} = \frac{1-Q(z, z^{-1})z^{-N}}{1+G_c(z)G_p(z)} \cdot \frac{1}{1-Q(z, z^{-1})z^{-N} [1-k_r \frac{N_s^-(z)N_s^-(z^{-1})}{b}]}. \quad (3.27)$$

Da equação (3.27) surge a seguinte análise:

- 1) Analisando-se o primeiro fator da (3.27) conclui-se que, as raízes de $1+G_c(z)G_p(z)=0$ estão dentro do círculo unitário, dado que $G_s(z)$ é assintoticamente estável; por outro lado a parcela $1-Q(z, z^{-1})z^{-N}$ é assintoticamente estável.
- 2) Portanto, o denominador do segundo fator da (3.27) deve garantir a estabilidade assintótica do sistema com o controlador *plug-in* repetitivo modificado. O denominador pode ser reescrito da seguinte forma:

$$Q(z, z^{-1})z^{-N} \left[1 - k_r \frac{N_s^-(z)N_s^-(z^{-1})}{b} \right] = 1. \quad (3.28)$$

Comparando-se (3.28) com (3.21) é possível deduzir que a prova de estabilidade para o caso presente é uma extensão da prova para o caso do controlador *plug-in* repetitivo com $Q(z, z^{-1})=1$. Portanto, uma representação similar à da Figura 3.16 pode ser obtida para a equação (3.28). Aplicando-se o teorema de pequenos ganhos na (3.28) tem-se,

$$\|Q(z, z^{-1})\| \|z^{-N}\| \left\| 1 - k_r \frac{N_s^-(z)N_s^-(z^{-1})}{b} \right\| < 1, \quad (3.29)$$

desde que $\|z^{-N}\| = 1$ e $|N_s^-(z)N_s^-(z^{-1})/b| \leq 1$, Figura 3.15, para todo $z = e^{j\omega}$, $\omega \in [0, \pi]$, tem-se que,

$$\|1 - k_r\| < \frac{1}{\|Q(z, z^{-1})\|}. \quad (3.30)$$

Portanto, o sistema resulta assintoticamente estável para $0 < k_r < 2$ e a desigualdade se mantém para qualquer escolha de $Q(z, z^{-1})$.