



DISEÑO DE CONTROLADORES DIGITALES

SISTEMAS DE CONTROL 2

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA

FACULTAD DE INGENIERÍA – U.Na.M

PROFESOR RESPONSABLE: FERNANDO BOTTERÓN

AÑO 2020

Índice

1. Diseño de Controladores Digitales	3
A. Discretización de controladores diseñados en el dominio continuo: “Rediseño Digital”	3
2. Técnicas de Discretización	11
A. Discretización de controladores PID	11
B. Aproximación con mantenedor de orden cero o invariante al escalón	13
C. Mapeo de diferencias	14
D. Integración Rectangular: Método de Euler o Forward Difference	15
E. Transformación Bilineal o Transformación de Tustin	16
3. Diseño de Controladores en el Dominio de Tiempo Discreto	17
A. Controlador Deadbeat o de Respuesta de Tiempo Mínimo	17
B. Controlador OSAP (One Sampling Ahead Preview)	25
C. Controlador OSAP Modificado	31
D. Controlador PID Predictivo	35

1. Diseño de Controladores Digitales

A. Discretización de controladores diseñados en el dominio continuo: “Rediseño Digital”

En el caso que se desee utilizar un controlador digital basado en el argumento de que el *hardware* correspondiente es más económico y flexible, es posible encontrar un sistema muestreado o sistema digital que reproduzca el comportamiento del sistema de control original en tiempo continuo. Por tanto, podemos utilizar cualquier técnica de diseño en el dominio continuo y a continuación muestrear o aproximar el controlador resultante, tratando siempre de satisfacer los requisitos originales del diseño. Veamos esto a través de un ejemplo:

Sea el sistema de control mostrado en la Figura 1.

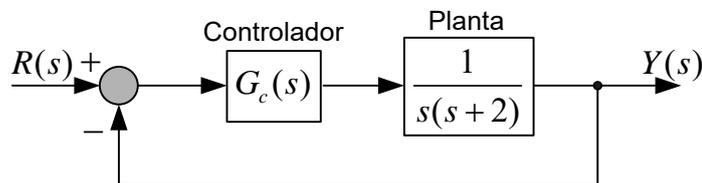


Figura 1 – Sistema de control considerado para *rediseño digital*.

Sean las especificaciones de desempeño en lazo cerrado, las siguientes: frecuencia natural no amortiguada $\omega_n = 3$ rad/seg y factor de amortiguamiento $\xi = 0,5$. Estas especificaciones pueden ser obtenidas con el siguiente compensador de adelanto de fase:

$$G_c(s) = 9 \frac{s+2}{s+3} \quad (1)$$

Con este controlador obtenemos la siguiente función de transferencia de lazo cerrado (ver `digital_redesign_ejemplo1.m`),

$$G_{lc}(s) = \frac{9}{s^2 + 3s + 9} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2)$$

La respuesta al escalón para este sistema de control en tiempo continuo resulta como se muestra en la Figura 2.

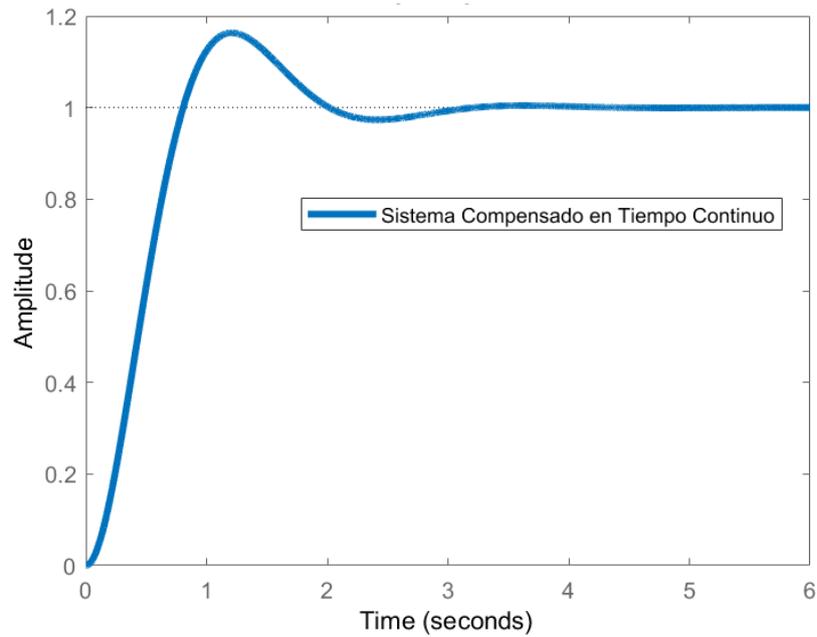


Figura 2 – Respuesta a una entrada en escalón del sistema de control de la Figura 1.
 $M_p = 16,3\%$ y $t_s = 2,69$ segundos

Los márgenes de estabilidad resultantes del sistema compensado se pueden observar en la siguiente figura:

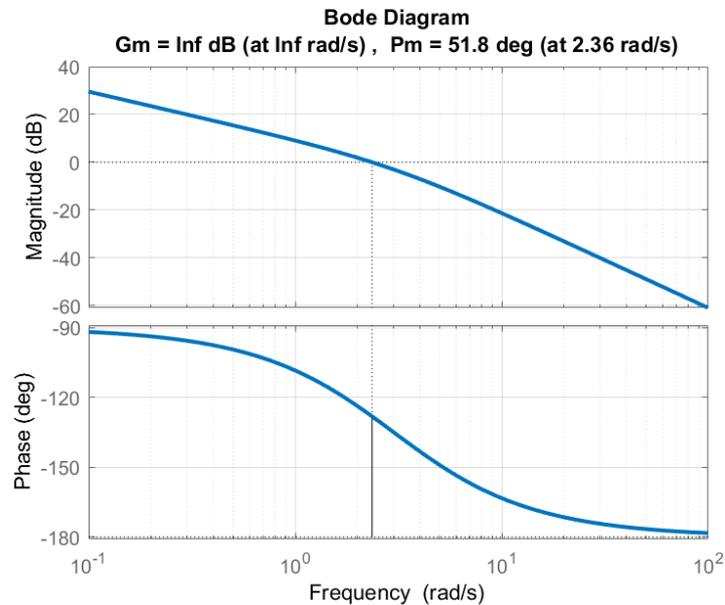


Figura 3 – Respuesta en frecuencia de lazo abierto del sistema de control de la Figura 1.
 $MP = 51,8^\circ$ y $MG = \text{infinito}$.

El sistema de control digital correspondiente a la estructura de la Figura 1, puede representarse según [1] de la siguiente forma:

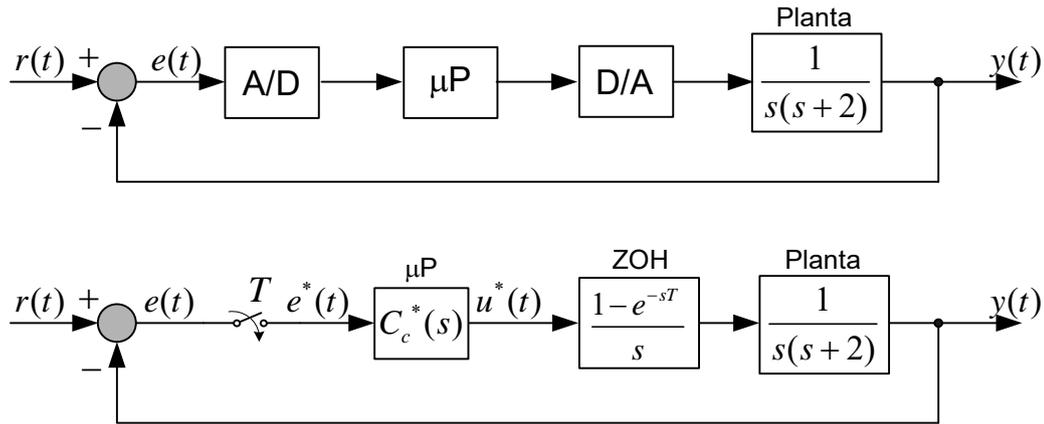


Figura 4 – Implementación digital del sistema de control de la Figura 1.

Consideremos para este caso un período de muestreo de $T = 0,1$ seg. El problema se resume en determinar un compensador o filtro digital $G_{cd}(z)$ cuya respuesta sea semejante a la del compensador dado en (1). Utilizaremos la aproximación del tipo retenedor de orden cero o invariante al escalón, como se representa en la figura abajo:



Figura 5 – Aproximación invariante al escalón para $G_c(s)$.

La función de transferencia del compensador en el dominio de tiempo discreto de Figura 5 puede obtenerse como sigue:

$$U(z) = E(z)G_{cd}(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}G_{cd}(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s}G_c(s)\right]. \quad (3)$$

De la ecuación (3) resulta la siguiente función de transferencia discreta:

$$G_{cd}(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s}G_c(s)\right]. \quad (4)$$

La ecuación (4) puede ser resuelta utilizando la expresión mostrada en (5) con base en el teorema del residuo de Cauchy, esto es:

$$Y(z) = \sum_i \text{Residuo}\left[\frac{z}{z-e^{sT}}Y(s), p_i\right], \text{ donde } p_i \text{ es el } i\text{-ésimo polo de } Y(s). \quad (5)$$

Así, para hallar la transformada \mathcal{Z} de una función de transferencia en el dominio s , aplicamos la (5), o sea:

$$G_{cd}(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{9(s+2)}{s(s+3)}\right] = (1-z^{-1})\left\{\lim_{s \rightarrow 0}\left(\frac{9(s+2)z}{(s+3)(z-e^{sT})}\right) + \lim_{s \rightarrow -3}\left(\frac{9(s+2)z}{s(z-e^{sT})}\right)\right\}. \quad (6)$$

La última ecuación resulta en la siguiente función de transferencia:

$$G_{cd}(z) = \frac{9z - 6e^{-3T} - 3}{z - e^{-3T}}. \quad (7)$$

Para el periodo de muestreo escogido más arriba de $T = 0,1$ segundos, esta última resulta:

$$G_{cd}(z) = \frac{9z - 7,445}{z - 0,741}. \quad (8)$$

Factorizando la variable z en el numerador y denominador, podemos reescribir (8) de la siguiente forma,

$$G_{cd}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{9 - 7,445z^{-1}}{1 - 0,741z^{-1}}. \quad (9)$$

Para saber cuál es la operación que debe efectuar el microprocesador debemos hallar la ecuación a diferencias o lo que es lo mismo, la transformada \mathcal{Z} inversa de la (9), esto es:

$$U(z)(1 - 0,741z^{-1}) = E(z)(9 - 7,445z^{-1}). \quad (10)$$

luego,

$$U(z) = 9E(z) - 7,445z^{-1}E(z) + 0,741z^{-1}U(z). \quad (11)$$

Algunas transformadas \mathcal{Z} de ecuaciones a diferencia pueden ser resumidas en la siguiente tabla:

Tabla I. Transformadas \mathcal{Z} de $y(k+n)$ e $y(k-n)$

Función discreta	Transformada \mathcal{Z}
$y(k+4)$	$z^4Y(z) - z^4Y(0) - z^3Y(1) - z^2Y(2) - zY(3)$
$y(k+3)$	$z^3Y(z) - z^3Y(0) - z^2Y(1) - zY(2)$
$y(k+2)$	$z^2Y(z) - z^2Y(0) - zY(1)$
$y(k+1)$	$zY(z) - zY(0)$
$y(k)$	$Y(z)$
$y(k-1)$	$z^{-1}Y(z)$
$y(k-2)$	$z^{-2}Y(z)$
$y(k-3)$	$z^{-3}Y(z)$
$y(k-4)$	$z^{-4}Y(z)$

Utilizando la Tabla I podemos obtener nuestra ecuación a diferencias como sigue:

$$u(kT) = 9e(kT) - 7,445e[(k-1)T] + 0,741u[(k-1)T]. \quad (12)$$

o de una forma más simple, omitiéndose el periodo de muestreo T ,

$$u(k) = 9e(k) - 7,445e(k-1) + 0,741u(k-1). \quad (13)$$

A continuación se muestran las respuestas al escalón unitario para el sistema en tiempo continuo de la Figura 1 y para el mismo sistema implementado digitalmente según la Figura 4.

La Figura 6 muestra la comparación de ambos sistemas para un periodo de muestreo $T = 0,1$ seg y la Figura 7 para $T = 0,025$ seg.

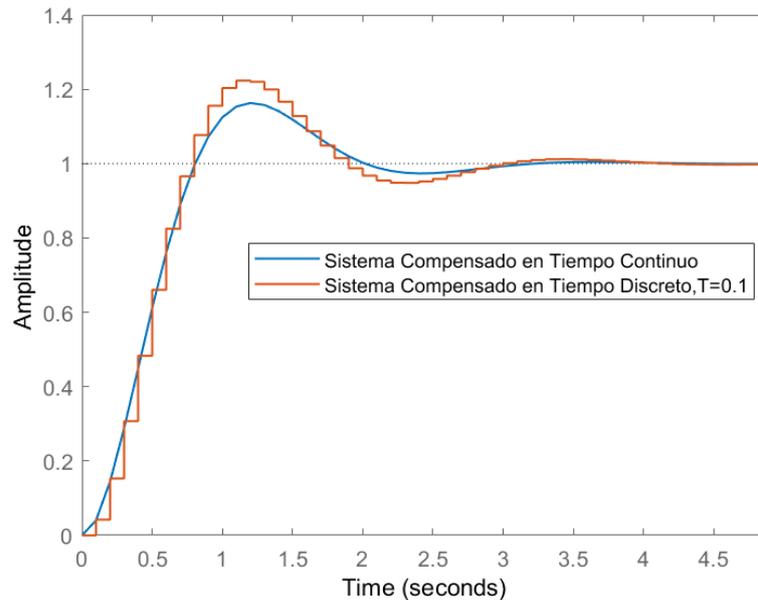


Figura 6 – Respuesta al escalón para los sistemas continuos y discretos. $T = 0,1$ seg. $M_p = 22,3\%$

Como se observa en la Figura 6 y en la Figura 7, el aumento de la frecuencia de muestreo resulta en una mejor aproximación del sistema en tiempo discreto al sistema en tiempo continuo de la Figura 1, permitiendo que se verifiquen con mayor precisión las especificaciones de desempeño transitorio. No obstante, es importante, en la medida que se disminuye el periodo de muestreo, verificar si el sistema en lazo cerrado resulta estable, utilizando el diagrama de Nyquist o las respuestas en frecuencia del sistema en tiempo discreto.

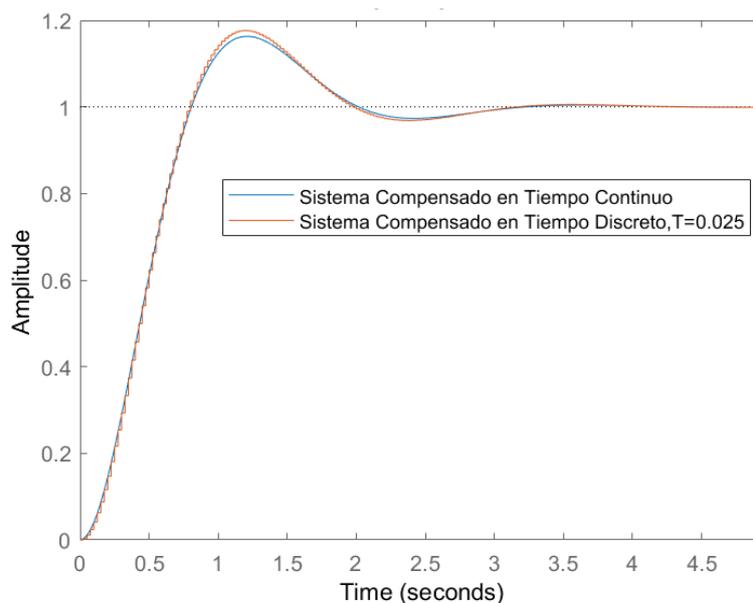


Figura 7 – Respuesta al escalón para los sistemas continuo y discreto. $T = 0,025$ seg. $M_p = 17,6\%$

Otra forma de verificar la estabilidad sería a partir del cálculo de los polos de la función de transferencia de lazo cerrado, verificando que estos se encuentran dentro del círculo unitario. Para los dos casos simulados anteriormente, se muestra a continuación la representación de los polos y ceros de lazo cerrado:

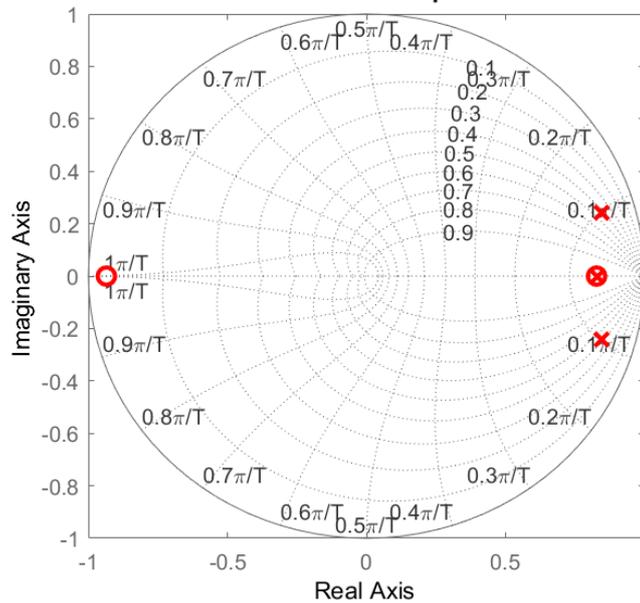


Figura 8 – Polos y ceros de lazo cerrado. $T = 0,1$ seg. $\omega_n = 3,08$ rad/s y $\xi = 0,424$.

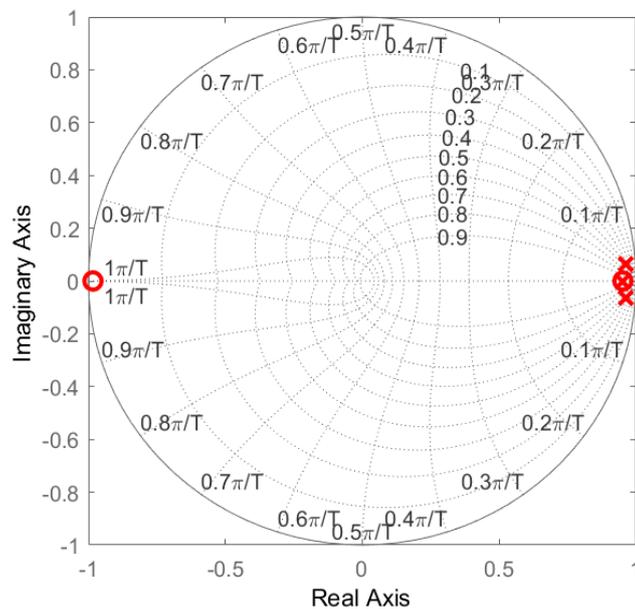


Figura 9 – Polos y ceros de lazo cerrado. $T = 0,025$ seg. $\omega_n = 3,02$ rad/s y $\xi = 0,482$.

Se observa en la Figura 9 un pequeño aumento del coeficiente de amortiguamiento y una brusca disminución de la frecuencia natural de los polos de lazo cerrado, lo que se traduce en una disminución del sobrepaso, respecto al caso de la Figura 8, haciendo que la respuesta al escalón sea prácticamente igual a la del sistema continuo. Si quisiéramos hacer que la respuesta del sistema digital sea igual a la del sistema continuo deberíamos aumentar aún más la frecuencia de

muestreo. Simulamos nuestro sistema entonces para $T = 0,001$ seg, y la respuesta al escalón es la que se muestra a continuación:

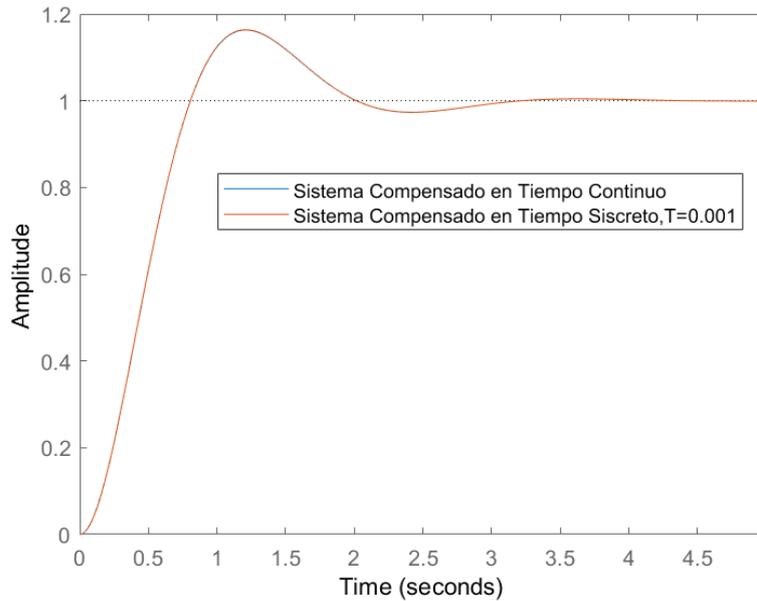


Figura 10 – Respuesta al escalón para los sistemas continuos y discretos. $T = 0,001$ seg.

Como se observa en la Figura 10 que la salida del sistema en tiempo discreto prácticamente coincide con la salida del sistema en tiempo continuo, para el periodo de muestreo considerado. Esto puede verificarse en la ubicación de los polos de lazo cerrado mostrados en la Figura 11 y Figura 12. Se observa en la Figura 12, la cual muestra una ampliación de la región cercana a $z = 1$, que los polos complejos conjugados cumplen con las especificaciones transitorias de $\omega_n = 3$ rad/s y $\xi = 0,5$. A la vez, el polo real de lazo cerrado se cancela con el cero impuesto por el compensador de adelanto de fase, esto es: $\text{cero} = e^{-2T} = 0,998$ rad/s y $\text{polo} = e^{-2T} = 0,998$ rad/s .

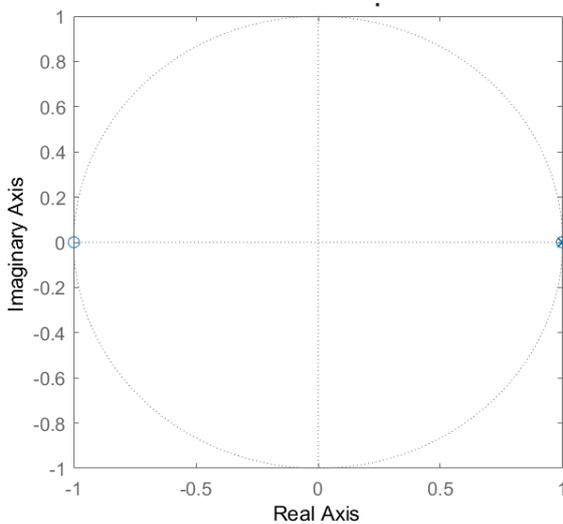


Figura 11 – Polos y ceros de lazo cerrado. $T = 0,001$ seg.

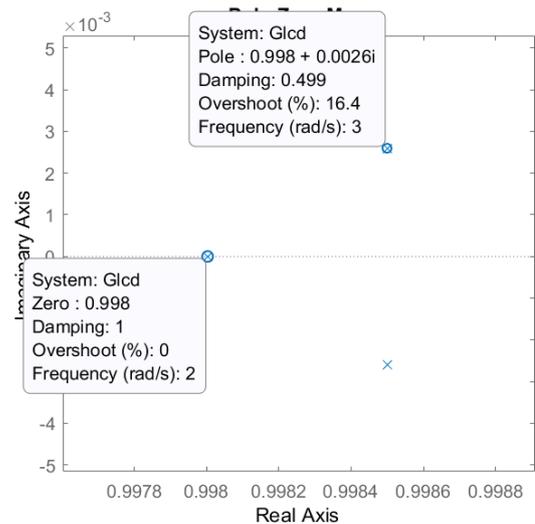


Figura 12 – Polos y ceros de lazo cerrado. $T = 0,001$ seg. Región próxima a $z = 1$.

En resumen, se puede concluir que la respuesta del sistema de control se deteriora en la medida que el período T aumenta, debido al atraso de transporte que introduce el retenedor de orden cero, lo que se traduce en una dinámica dominante de lazo cerrado que afecta directamente al desempeño transitorio. Esta situación provoca que la estabilidad relativa se reduzca para valores grandes de T . Por el contrario, el desempeño dinámico del sistema en tiempo discreto se aproxima al desempeño del sistema en tiempo continuo en la medida que la frecuencia de muestreo aumenta, o el período T disminuye, con el consiguiente aumento de carga computacional para un mismo procesador digital.

Por otro lado, es importante realizar algunas simulaciones para observar el rango dinámico de todas las señales en juego, especialmente de la acción de control resultante, y poder detectar si existe saturación de la misma, antes de efectuar los ensayos en el sistema digital real. Puede apreciarse en la Figura 13 la comparación de las acciones de control en tiempo continuo y de tiempo discreto para $T = 0,1$ seg. El valor máximo es fácilmente realizable sin provocar saturaciones tanto para la implementación en tiempo continuo como en tiempo discreto. Hay solamente un valor máximo negativo un poco mayor para la acción de control en tiempo discreto. Para un período mucho menor, $T = 0,001$ seg., ambas acciones de control coinciden.

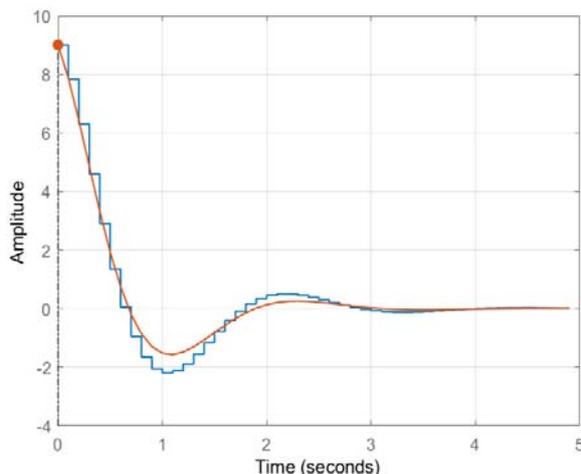


Figura 13 – Acciones de control en tiempo continuo (línea roja) y en tiempo discreto (línea azul). $T = 0,1$ seg.

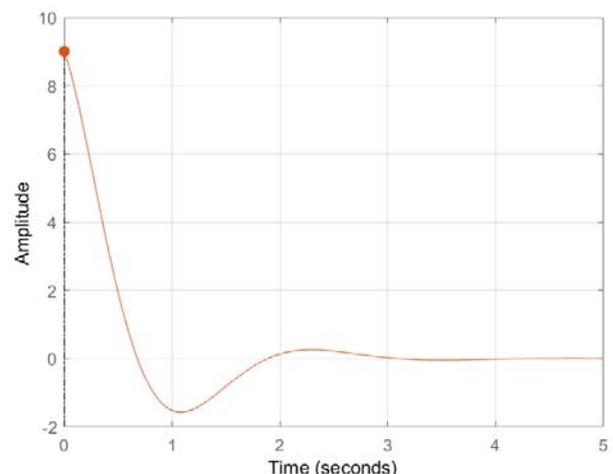


Figura 14 – Acciones de control en tiempo continuo (línea roja) y en tiempo discreto (línea azul). $T = 0,001$ seg.

En la Figura 15 se observan los márgenes de estabilidad relativa para el sistema de lazo cerrado en tiempo discreto y tiempo continuo. Se puede apreciar la diferencia en los márgenes de fase debido al valor elegido de T , y, además, aparece un margen de ganancia en el sistema en tiempo discreto debido al corte en -180° de la curva de fase por la presencia del ZOH, el cual impone un atraso de transporte que incrementa la fase por arriba de los -180° . Este efecto prácticamente desaparece para el $T = 0,001$ s, Figura 16; dándose el corte en -180° en las altas frecuencias, lo que se traduce en un MG elevado para el sistema en tiempo discreto.

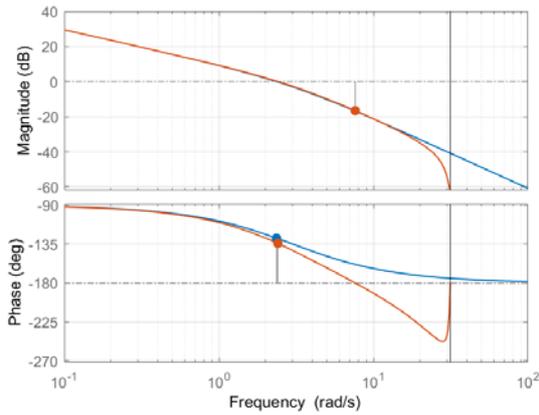


Figura 15 – Respuestas en frecuencia de lazo abierto. Tiempo discreto (rojo) con $T = 0,1$ s. Tiempo continuo (azul).
 MG (TD) = 16,6 dB y MF (TD) = 45,7°.
 MF (TC) = 51,8°.

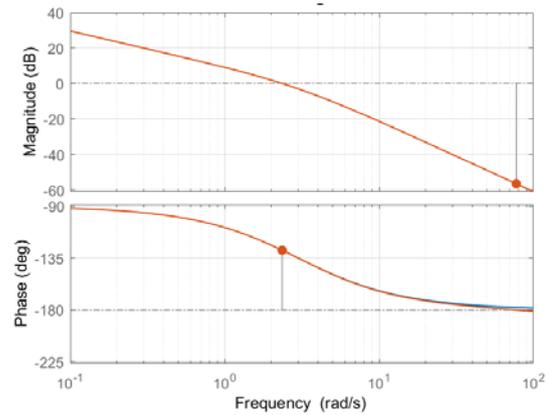


Figura 16 – Respuestas en frecuencia de lazo abierto. Tiempo discreto (rojo) con $T = 0,001$ s. Tiempo continuo (azul).
 MG (TD) = 56,5 dB y MF = 51,8° (TD y TC).

2. Técnicas de Discretización

A. Discretización de controladores PID

En esta sección consideraremos algunas técnicas generales para la discretización de controladores proyectados en el dominio continuo. En primer lugar, debido a la gran aplicabilidad de controladores PID, consideraremos especialmente la discretización de estos compensadores. Supongamos entonces que hemos obtenido los parámetros de un PID analógico por alguna técnica de proyecto dada. Para obtener el controlador digital, podemos entonces usar algunas de las aproximaciones siguientes:

1º Aproximación:

Derivación: La derivada de la señal de error puede aproximarse por la diferencia entre dos muestras sucesivas, o sea:

$$\frac{de(t)}{dt} \approx \frac{e(kT) - e[(k-1)T]}{T} \tag{14}$$

Integración: La integral de la señal de error puede aproximarse de la siguiente forma:

$$\int_0^{kT} e(t)dt \approx T \sum_{i=1}^k e(iT) \tag{15}$$

Luego, tenemos:

en kT ,

$$u(k) = K_p e(k) + K_i T \sum_{i=1}^k e(i) + K_d \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \tag{16}$$

en $(k-1)T$,

$$u(k-1) = K_p e(k-1) + K_i T \sum_{i=1}^{k-1} e(i) + K_d \frac{e(k-1) - e(k-2)}{T} \tag{17}$$

En un intervalo de muestreo T , la acción de control PID resulta:

$$u(k) - u(k-1) = K_p [e(k) - e(k-1)] + K_i T e(k) + \frac{K_d}{T} [e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)]. \quad (18)$$

Observe que, suponiendo $k = 3$, la integración en un periodo de muestreo resulta:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^k e(i) &= e(1) + e(2) + e(3) \\ \sum_{i=1}^{k-1} e(i) &= e(1) + e(2) \end{aligned} \right\} \sum_{i=1}^k e(i) - \sum_{i=1}^{k-1} e(i) = e(3) \Rightarrow e(k). \quad (19)$$

Finalmente, la ecuación que debe ser implementada en el microprocesador resulta:

$$u(k) = u(k-1) + [K_p + K_i T + \frac{K_d}{T}] e(k) - [K_p + \frac{2K_d}{T}] e(k-1) + \frac{K_d}{T} e(k-2). \quad (20)$$

2º Aproximación:

Derivación: Para aproximar la derivada de la señal de error se usa la anterior.

Integración: Para la integral de la señal de error utilizamos la aproximación trapezoidal:

$$\begin{aligned} \int_0^{kT} e(t) dt &= T \left[\frac{e(0) + e(T)}{2} + \frac{e(T) + e(2T)}{2} + \dots + \frac{e(k-1)T + e(kT)}{2} \right] = \\ &= T \sum_{i=1}^k \frac{e(i-1)T + e(iT)}{2} \end{aligned} \quad (21)$$

La ecuación (21) se explica a través de la Figura 17.

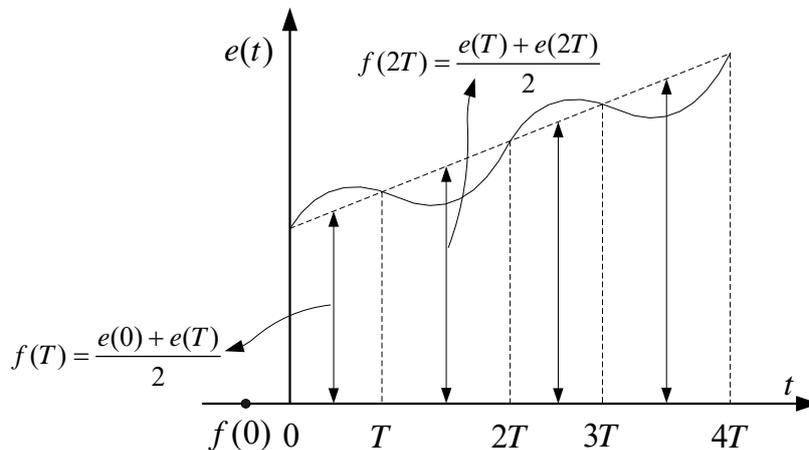


Figura 17 – Representación gráfica de la aproximación trapezoidal.

Luego, tenemos:

en kT ,

$$u(k) = K_p e(k) + K_i T \sum_{i=1}^k \frac{e(i-1) + e(i)}{2} + K_d \frac{e(k) - e(k-1)}{T}. \quad (22)$$

en $(k-1)T$,

$$u(k-1) = K_p e(k-1) + K_i T \sum_{i=1}^{k-1} \frac{e(i-1) + e(i)}{2} + K_d \frac{e(k-1) - e(k-2)}{T}. \quad (23)$$

En un intervalo de muestreo T , la acción de control PID resulta:

$$u(k) - u(k-1) = K_p [e(k) - e(k-1)] + K_i T \left[\frac{e(k-1) + e(k)}{2} \right] + \frac{K_d}{T} [e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)]. \quad (24)$$

Observe que, suponiendo $k = 2$, la integración en un periodo de muestreo resulta:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{e(i-1) + e(i)}{2} &= \frac{e(0) + e(1)}{2} + \frac{e(1) + e(2)}{2} \\ \sum_{i=1}^{k-1} \frac{e(i-1) + e(i)}{2} &= \frac{e(0) + e(1)}{2} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k \frac{e(i-1) + e(i)}{2} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{e(i-1) + e(i)}{2} = \frac{e(1) + e(2)}{2} = \frac{e(k-1) + e(k)}{2}$$

Finalmente, la ecuación que debe ser implementada en el microprocesador resulta:

$$u(k) = u(k-1) + \left[K_p + \frac{K_i T}{2} + \frac{K_d}{T} \right] e(k) - \left[K_p - \frac{K_i T}{2} + \frac{2K_d}{T} \right] e(k-1) + \frac{K_d}{T} e(k-2). \quad (26)$$

A continuación, vamos a considerar algunas técnicas generales para discretización de controladores proyectados en el dominio continuo.

B. Aproximación con mantenedor de orden cero o invariante al escalón

Esta aproximación ya la vimos anteriormente. Aquí presentaremos una justificativa más formal. Consideremos los sistemas continuo y discreto mostrados en la figura.



Figura 18 – Procedimiento para la obtención de la aproximación invariante al escalón.

Para que la respuesta sea invariante a una entrada en escalón se debe imponer la condición de que $\bar{u}(kT)$ coincida con los valores de $u(t)$ para $t = kT$. Esta condición resulta en la siguiente igualdad:

$$\left(\frac{1}{1-z^{-1}} \right) G_{cd}(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s} G_c(s) \right]. \quad (27)$$

De esta última ecuación se tiene,

$$G_{cd}(z) = (1-z^{-1}) \mathcal{Z} \left[\frac{1}{s} G_c(s) \right]. \quad (28)$$

C. Mapeo de diferencias

Sea $u(t) = \frac{de(t)}{dt}$. Entonces, sustituyéndose la derivada por la aproximación de Backward de primer orden, o sea

$$u(t) = \frac{de(t)}{dt} \approx \frac{e(t) - e(t-T)}{T}. \quad (29)$$

resulta que,

$$U(s) = sE(s) \rightarrow U(z) \approx \frac{1-z^{-1}}{T} E(z). \quad (30)$$

De la última ecuación (30) observamos que se puede sustituir s por $\frac{1-z^{-1}}{T}$, o sea:

$$G_{cd}(z) = G_c(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}}. \quad (31)$$

Esta técnica de discretización se caracteriza por la extrema simplicidad siendo fácilmente programable en un microprocesador. Ejemplo: Sea la siguiente función de transferencia en tiempo continuo:

$$G_c(s) = \frac{9(s+2)}{(s+3)}. \quad (32)$$

Sustituyendo s por $\frac{1-z^{-1}}{T}$ en (32), tenemos:

$$G_{cd}(z) = \frac{9(s+2)}{(s+3)} \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{9(1-z^{-1}+2T)}{1-z^{-1}+3T} = \frac{9+18T-9z^{-1}}{1+3T-z^{-1}}. \quad (33)$$

factorizando $1+3T$, la última nos queda:

$$G_{cd}(z) = \frac{9(s+2)}{(s+3)} \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{(9+18T-9z^{-1})/(1+3T)}{1-(z^{-1}/(1+3T))} = \frac{U(z)}{E(z)}. \quad (34)$$

Para obtener la expresión a diferencias, hacemos:

$$U(z)[1-(z^{-1}/(1+3T))] = E(z)[(9+18T-9z^{-1})/(1+3T)]. \quad (35)$$

y utilizando las relaciones de la Tabla I, tenemos finalmente:

$$u(k) = \frac{1}{1+3T} [u(k-1) + (9+18T)e(k) - 9e(k-1)]. \quad (36)$$

D. Integración Rectangular: Método de Euler o *Forward Difference*

Supongamos que utilizamos la aproximación $u(kT) = T \sum_{i=0}^{k-1} e(iT)$ para la integral

$u(kT) = \int_0^{kT} e(t)dt$, a partir de la Figura 19, donde la altura del rectángulo viene dada por la amplitud de la muestra en el instante anterior, o sea $e[(k-1)T]$.

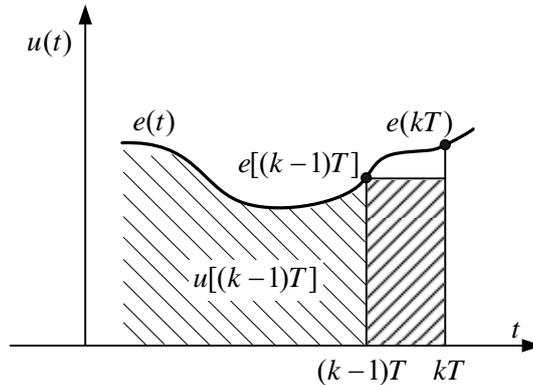


Figura 19 – Método *forward* de integración rectangular.

$$u(kT) = u[(k-1)T] + Te[(k-1)T] \Rightarrow U(z) = \frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}} E(z) \Rightarrow U(z) = \frac{T}{z-1} E(z). \quad (37)$$

y dado que $u(t)$ es la integral de $e(t)$, tenemos también que $U(s) = \frac{1}{s} E(s)$. De esta forma, y

teniendo en cuenta la (37), sustituimos $\frac{1}{s}$ por $\frac{T}{z-1}$, resultando,

$$G_{cd}(z) = G_c(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T}}. \quad (38)$$

Ejemplo: Sea el siguiente compensador

$$G_c(s) = \frac{9(s+2)}{(s+3)}. \quad (39)$$

Sustituyendo s por $\frac{z-1}{T}$ en (39), tenemos:

$$G_{cd}(z) = \frac{9(s+2)}{(s+3)} \Big|_{s=\frac{z-1}{T}} = \frac{9(z-1+2T)}{z-1+3T} = \frac{9+(18T-9)z^{-1}}{1+(3T-1)z^{-1}}. \quad (40)$$

Considerando un $T = 0,1$ segundo:

$$G_{cd}(z) = \frac{9-7,2z^{-1}}{1-0,7z^{-1}}. \quad (41)$$

y la ecuación a diferencias resulta:

$$u(k) = 0,7u(k-1) + 9e(k) - 7,2e(k-1). \quad (42)$$

E. Transformación Bilineal o Transformación de Tustin

Supongamos ahora que utilizamos la aproximación trapezoidal para la integral del error, o

sea $u(kT) = u[(k-1)T] + \frac{T}{2} \sum_{i=0}^{k-1} e(iT) + e[(i-1)T]$. De esta aproximación podemos escribir que,

$$u(k) - u(k-1) = \frac{T}{2} [e(k-1) + e(k)] \Rightarrow U(z) = \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} E(z). \quad (43)$$

De esta última ecuación se observa que la función de transferencia del compensador $G_{cd}(z)$ puede ser obtenida sustituyéndose $\frac{1}{s}$ por $\frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}$, resultando,

$$G_{cd}(z) = G_c(s) \Big|_{s=\frac{2z-1}{Tz+1}}. \quad (44)$$

Consideremos el compensador de los ejemplos anteriores y realícese la sustitución dada en (44):

$$G_{cd}(z) = \frac{9(s+2)}{(s+3)} \Big|_{s=\frac{2z-1}{Tz+1}} = \frac{9\left(\frac{2z-1}{Tz+1} + 2\right)}{\left(\frac{2z-1}{Tz+1} + 3\right)} = \frac{9(2z-2+2Tz+2T)}{2z-2+3Tz+3T}. \quad (45)$$

Distribuyendo términos y factorizando z^{-1} en el numerador y denominador tenemos:

$$G_{cd}(z) = \frac{(18+18T)z+18T-18}{(2+3T)z+3T-2} = \frac{18+18T+(18T-18)z^{-1}}{2+3T+(3T-2)z^{-1}} = \frac{U(z)}{E(z)}. \quad (46)$$

A partir de las relaciones de la Tabla I, se obtiene finalmente:

$$u(k) = \frac{1}{2+3T} [(18+18T)e(k) + (18T-18)e(k-1) - (3T-2)u(k-1)]. \quad (47)$$

Considerando, por ejemplo, $T = 0,1$ segundo:

$$u(k) = 8,609e(k) - 7,04e(k-1) + 0,739u(k-1). \quad (48)$$

3. Diseño de Controladores en el Dominio de Tiempo Discreto

Hasta aquí hemos considerado el diseño de controladores digitales a partir de controladores analógicos, o sea, el controlador digital es obtenido a partir de la aproximación del controlador analógico utilizando alguno de los métodos que se han desarrollado anteriormente. En esta sección vamos a presentar técnicas de diseño fundamentadas directamente en el dominio de tiempo discreto.

A. Controlador *Deadbeat* o de Respuesta de Tiempo Mínimo

Consideremos el sistema discreto que se muestra en la Figura 20 al cual se le aplica una referencia $r(kT) = 1$ para $k \geq 0$, y por tanto, $R(z) = 1/(1 - z^{-1})$,

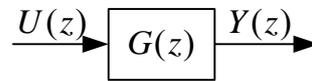


Figura 20 – Sistema discreto a controlar.

La función de transferencia propia del sistema discreto puede ser representada por una relación de polinomios en z como se muestra a continuación,

$$G(z) = \frac{\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} \cdots + \beta_m z^{-m}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} \cdots + \alpha_m z^{-m}}. \quad (49)$$

donde $G(z)$ puede contemplar la ganancia del actuador y del sensor.

El problema consiste en determinar la ley de control $u(kT)$ para el sistema en lazo cerrado de la Figura 21, de modo tal que la salida alcance la referencia (o valor de consigna) en “ m ” pasos o muestras, siendo “ m ” el orden del sistema, y, a partir de la muestra m , se mantenga igual al valor de la referencia en cada instante de muestreo. Esto es, la respuesta en tiempo discreto no puede presentar sobrepaso alguno ni oscilaciones. Para que esto se cumpla, es necesario que la acción de control impuesta sea no limitada. Precisamente, suponiéndose $y(0) = 0$ y siendo que por hipótesis la referencia es unitaria, se desea obtener

$$Y(z) = y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \cdots + 1(z^{-m} + z^{-m-1} + \cdots), \quad (50)$$

por tanto, se hace necesario imponer que:

$$u(kT) = u(mT), \text{ para } k \geq m, \quad (51)$$

o sea,

$$U(z) = u(0) + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + \cdots + u(m)(z^{-m} + z^{-m-1} + \cdots). \quad (52)$$

Si dividimos $Y(z)$ por $R(z)$ podremos hallar la función de transferencia en lazo cerrado del sistema en la Figura 21, esto es, $\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{Y(z)(z-1)}{z}$ y, por lo tanto, a partir de la ecuación (50)

podemos escribir:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{y(1) + y(2)z^{-1} + \dots + 1(z^{-m+1} + z^{-m} + \dots) - y(1)z^{-1} - y(2)z^{-2} - \dots - 1(z^{-m} + z^{-m-1} + \dots)}{z}, \quad (53)$$

Agrupando términos se puede escribir la última ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = p_1z^{-1} + p_2z^{-2} + \dots + p_mz^{-m} \triangleq P(z), \quad (54)$$

de la cual comparando con la (53) resulta que,

$$p_1 = y(1), p_2 = y(2) - y(1), \dots, p_m = 1 - y(m-1), \quad (55)$$

Si dividimos ahora $U(z)$ de la ecuación (52) por $R(z)$ obtenemos, operando de forma similar a la (53), la siguiente expresión:

$$\frac{U(z)}{R(z)} = \frac{U(z)(z-1)}{z} = q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2} + \dots + q_mz^{-m} \triangleq Q(z), \quad (56)$$

y de esta última surge que,

$$q_0 = u(0), q_1 = u(1) - u(0), \dots, q_m = u(m) - u(m-1), \quad (57)$$

La estructura resultante del sistema de control de lazo cerrado en tiempo discreto, resulta como se muestra a continuación:

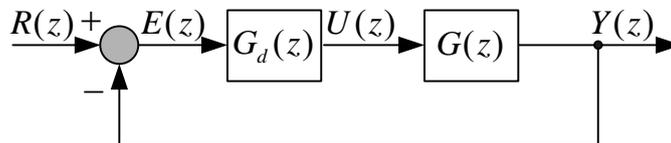


Figura 21 – Estructura resultante del sistema de control de lazo cerrado en tiempo discreto.

De la Figura 21 tenemos que la función de transferencia de lazo cerrado está dada por:

$$G_{lc}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_d(z)G(z)}{1 + G_d(z)G(z)}. \quad (58)$$

También de la Figura 21 se tiene que,

$$U(z) = G_d(z)E(z) = G_d(z)[R(z) - Y(z)]. \quad (59)$$

Adicionalmente, por definición, de (54) y (56), se tiene que

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = P(z) \quad \text{y} \quad \frac{U(z)}{R(z)} = Q(z). \quad (60)$$

Se observa, a partir de las ecuaciones (59) y (60), que si se divide ambos miembros de la (59) por $R(z)$, se obtiene:

$$G_d(z) \frac{R(z) - Y(z)}{R(z)} = Q(z) \rightarrow G_d(z) \left(1 - \frac{Y(z)}{R(z)} \right) = Q(z) \Rightarrow \left\| G_d(z) = \frac{Q(z)}{1 - P(z)} \right\|. \quad (61)$$

Sustituyéndose $P(z)$ y $Q(z)$, se obtiene la función de transferencia del controlador *deadbeat* en tiempo discreto:

$$G_d(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_m z^{-m}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - \dots - p_m z^{-m}}. \quad (62)$$

Por otro lado, de la Figura 21 y de (60), se tiene que,

$$\frac{Y(z)}{R(z)} \cdot \frac{U(z)}{R(z)} = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)} = G(z) \quad (63)$$

y teniendo en cuenta la (49), (54) y (56), se llega a la siguiente igualdad:

$$G(z) = \frac{\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_m z^{-m}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots + \alpha_m z^{-m}} = \frac{p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_m z^{-m}}{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_m z^{-m}}, \quad (64)$$

o también, dividiéndose el numerador y el denominador de la última relación por q_0 , resulta

$$G(z) = \frac{\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_m z^{-m}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots + \alpha_m z^{-m}} = \frac{(p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_m z^{-m}) / q_0}{1 + (q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_m z^{-m}) / q_0}. \quad (65)$$

Nótese de la (55) que

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1, \text{ o sea que, } \frac{p_1}{q_0} + \frac{p_2}{q_0} + \dots + \frac{p_m}{q_0} = \frac{1}{q_0}, \quad (66)$$

y por lo tanto, de (65) se tiene que:

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m = \frac{1}{q_0} \Rightarrow q_0 = \frac{1}{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m}. \quad (67)$$

En lo que hace a los demás parámetros del controlador, los mismos se obtienen fácilmente por comparación de los numeradores y denominadores de las funciones de transferencia en (65),

$$q_1 = q_0 \alpha_1, \quad q_2 = q_0 \alpha_2, \dots, \quad q_m = q_0 \alpha_m, \quad (68)$$

$$p_1 = q_0 \beta_1, \quad p_2 = q_0 \beta_2, \dots, \quad p_m = q_0 \beta_m. \quad (69)$$

De esta forma quedan definidos todos los parámetros del controlador *deadbeat*. Es importante notar que la función de transferencia en lazo cerrado, a partir de (54) y (58), resulta:

$$G_{lc}(z) = \frac{G_d(z)G(z)}{1 + G_d(z)G(z)} = \frac{Y(z)}{R(z)} = P(z) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_m z^{-m}, \quad (70)$$

o también, multiplicando y dividiendo $P(z)$ por z^m , $G_{lc}(z)$ resulta:

$$G_{lc}(z) = \frac{p_1 z^{m-1} + p_2 z^{m-2} + \dots + p_m}{z^m}, \quad (71)$$

o sea, la ecuación característica posee “ m ” polos al origen del plano z . Se puede decir entonces que el controlador *deadbeat* es un controlador por ubicación de polos al origen del plano- z , o también, que es un controlador que reubica m polos al origen del plano- z y así conseguir una respuesta al escalón de tiempo mínimo.

Ejemplo: Sea el sistema a controlar descrito por la siguiente función de transferencia,

$$G(s) = \frac{200}{(s+3)(s+10)^2} \quad (72)$$

Si se traza la respuesta al escalón unitario del proceso en lazo cerrado con realimentación unitaria, dado en la ecuación (72), se obtiene el comportamiento que se observa en la Figura 22, en la cual puede apreciarse que la misma presenta un pequeño sobrepaso de aproximadamente un 3%; un tiempo de asentamiento de 1,04 segundos; un tiempo de subida de 0,4 segundos y además un importante error de régimen estacionario del 60%. Se desea entonces, que la salida digital de este proceso, ante una entrada en escalón unitaria $r(kT) = 1$ para $k \geq 0$, presente una respuesta sin ningún sobrepaso y que alcance el valor de la referencia en el menor tiempo posible.

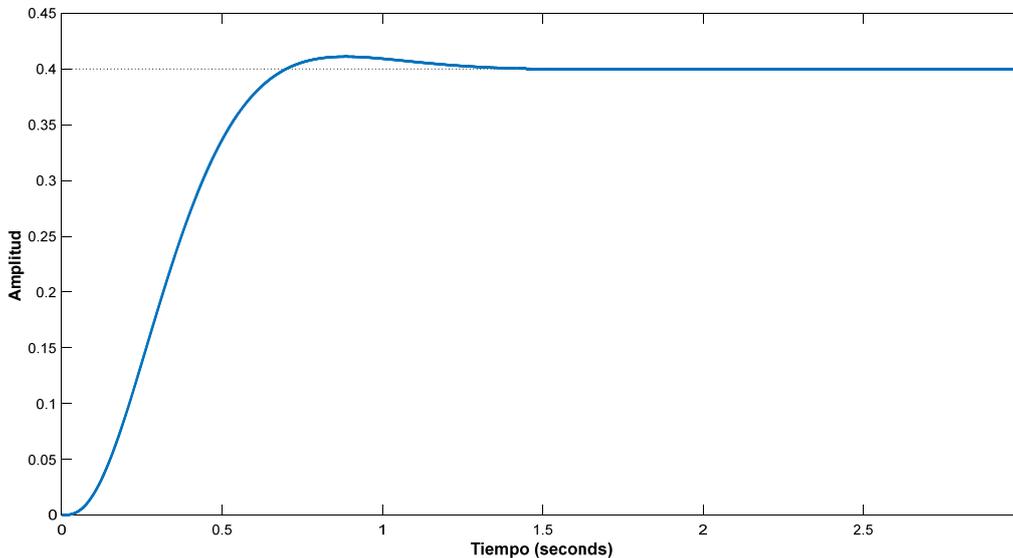


Figura 22 – Respuesta en lazo cerrado del proceso dado por (72) para una entrada en escalón unitario.

Muestreando este proceso con $T = 0,2$ seg., resulta la siguiente función de transferencia:

$$G(z) = \frac{0,091z^2 + 0,125z + 0,009}{z^3 - 0,819z^2 + 0,167z - 0,01} \quad (73)$$

De (67), (68) y (69) obtenemos los parámetros del controlador *deadbeat*, como sigue:

$$q_0 = \frac{1}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} = \frac{1}{0,091 + 0,125 + 0,009} = 4,444, \quad q_1 = q_0\alpha_1 = 4,444 \times (-0,819) = -3,64$$

$$q_2 = q_0\alpha_2 = 4,444 \times 0,167 = 0,742, \quad q_3 = q_0\alpha_3 = 4,444 \times (-0,01) = -0,044,$$

$$p_1 = q_0\beta_1 = 4,444 \times 0,091 = 0,404, \quad p_2 = q_0\beta_2 = 4,444 \times 0,125 = 0,556,$$

$$p_3 = q_0\beta_3 = 4,444 \times 0,009 = 0,04.$$

Obtenidos los parámetros del controlador, la función de transferencia del mismo resulta:

$$G_d(z) = \frac{4,444 - 3,64z^{-1} + 0,742z^{-2} - 0,044z^{-3}}{1 - 0,404z^{-1} - 0,556z^{-2} - 0,04z^{-3}} = \frac{U(z)}{E(z)}. \quad (74)$$

Por lo tanto, efectuando la transformada Z inversa de la función de transferencia (74), se obtiene la ecuación a diferencias que el procesador digital debe efectuar:

$$u(k) = 0,404u(k-1) + 0,554u(k-2) + 0,04u(k-3) + 4,444e(k) - 3,64e(k-1) + 0,742e(k-2) - 0,044e(k-3). \quad (75)$$

En general, la ecuación a diferencias de la acción de control *deadbeat* para un proceso de grado “m”, resulta:

$$u(k) = p_1 u(k-1) + p_2 u(k-2) + \dots + p_m u(k-m) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) + \dots + q_m e(k-m). \quad (76)$$

En cuanto a la función de transferencia en lazo cerrado del ejemplo presentado, la misma resulta:

$$G_{ic}(z) = P(z) = 0,404z^{-1} + 0,556z^{-2} + 0,04z^{-3}. \quad (77)$$

A continuación, se grafican, utilizando Matlab, la salida $y(k)$ y la señal de control $u(k)$.

A partir de la ecuación (77), se obtienen los siguientes valores de la salida en tiempo discreto, los cuales se muestran graficados en la Figura 23:

$$y(0) = 0; y(1) = 0,404; y(2) = y(1) + 0,556 = 0,96; y(3) = y(2) + 0,04 = 1; y(4) = y(3) + 0 = 1 \dots$$

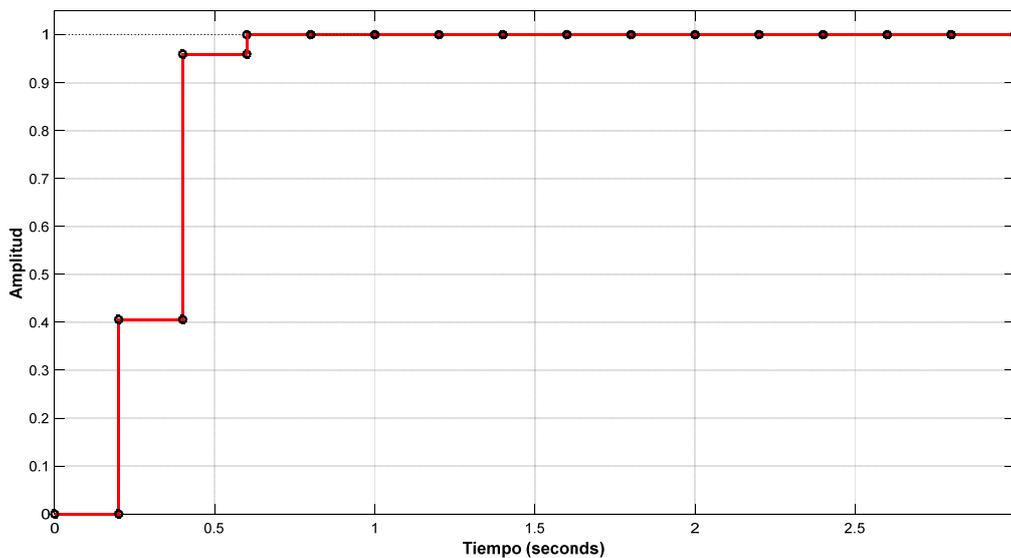


Figura 23 – Señal de Salida $y(kT)$ para una entrada en escalón unitario. $T = 0,2$ seg.

De la ecuación (75) pueden obtenerse los valores numéricos para el trazado de la acción de control aplicada a la planta:

$$u(0) = q_0 = 4,444; u(1) = u(0) + q_1 = 4,444 - 3,64 = 0,804;$$

$$u(2) = u(1) + q_2 = 0,804 + 0,742 = 1,546;$$

$$u(3) = u(2) + q_3 = 1,546 - 0,044 = 1,502$$

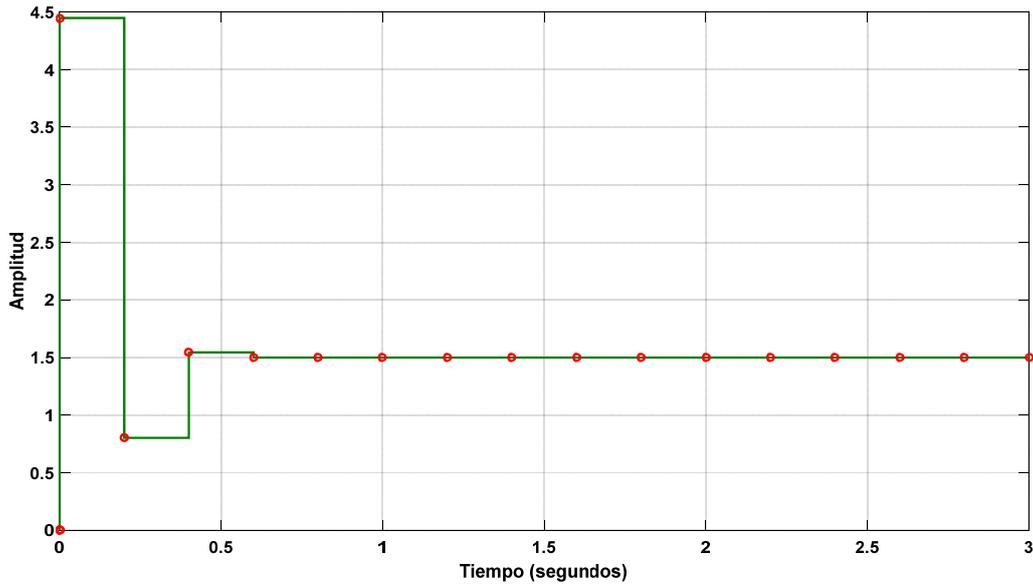


Figura 24 – Señal de control $u(kT)$ para una estrada en escalón unitario. $T = 0,2$ seg.

Siendo la señal de error en tiempo discreto definida como $e(kT) = r(kT) - y(kT)$, se tienen los siguientes valores para el trazado de dicha respuesta, que se muestra en la Figura 25:

$$e(0) = r(0) - y(0) = 1; \quad e(1) = r(1) - y(1) = 1 - 0,404 = 0,596; \quad e(2) = r(2) - y(2) = 1 - 0,96 = 0,04; \\ e(3) = r(3) - y(3) = 1 - 1 = 0; \quad e(4) = r(4) - y(4) = 1 - 1 = 0 \dots$$

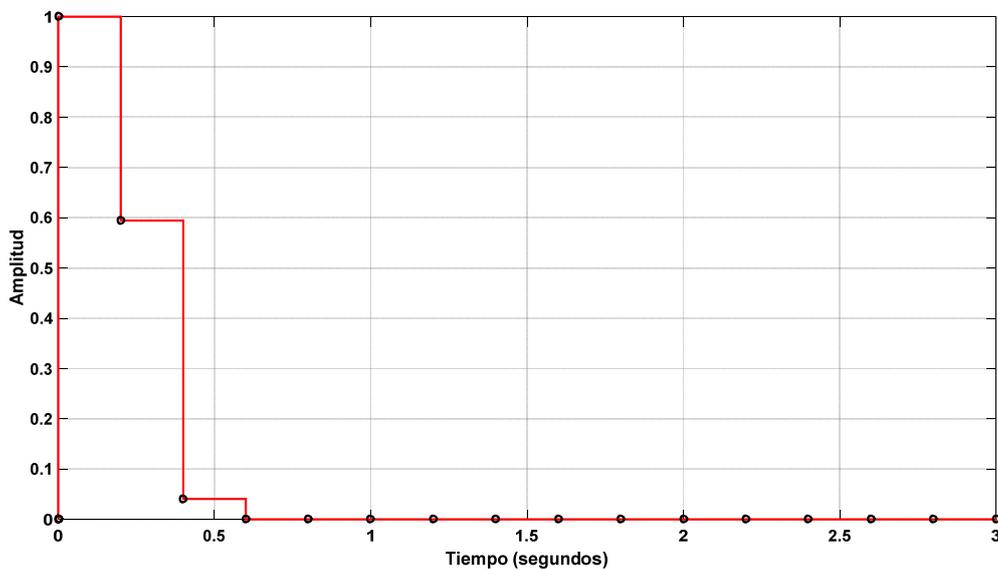


Figura 25 – Señal de error $e(kT)$ para una estrada en escalón unitario. $T = 0,2$ seg.

A continuación, en la Figura 26, se puede observar la comparación de las respuestas temporales para una entrada en escalón, del proceso en lazo cerrado en tiempo continuo, (gráfica en azul) y del mismo proceso en lazo cerrado con un controlador *deadbeat*. Es posible apreciar como para el periodo de muestreo elegido, los tiempos de subida y de asentamiento se redujeron, a 0,3 segundos y 0,5 segundos respectivamente; además de que la respuesta no presenta sobrepaso alguno y el error de régimen estacionario es nulo a partir de la tercera muestra.

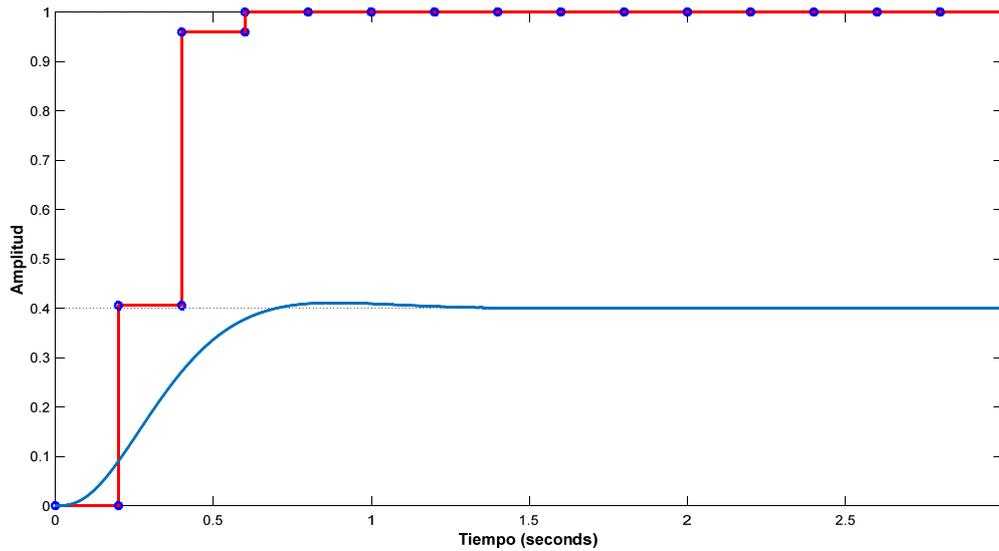


Figura 26 – Comparación de la señal $y(t)$ e $y(kT)$ del proceso dado por (72), en lazo cerrado para una entrada en escalón unitario. $T = 0,2$ seg.

Si ahora muestreamos nuestra función de transferencia con $T = 0,02$ seg., la misma resulta:

$$G(z) = \frac{0,0002379 z^2 + 0,0008488 z + 0,000189}{z^3 - 2,579 z^2 + 2,212 z - 0,6313} \tag{78}$$

lo que da como resultado un parámetro q_0 con un valor elevado, como se muestra a continuación,

$$q_0 = \frac{1}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} = \frac{1}{0,0002379 + 0,0008488 + 0,000189} = 784,$$

y este valor elevado de q_0 retorna valores elevados de q_1, q_2 y q_3 . Veamos qué sucede con la salida del sistema ante una entrada en escalón unitaria y que pasa con la señal de control.

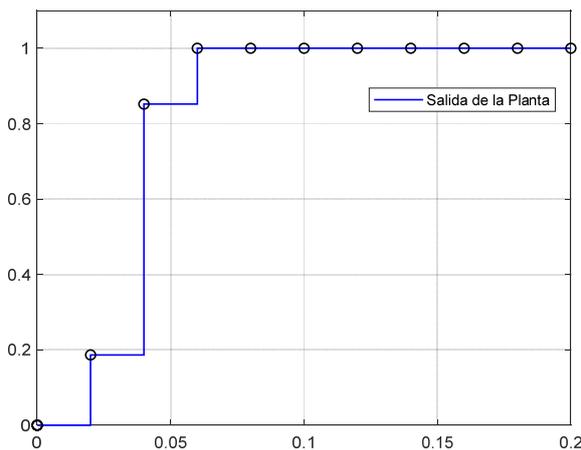


Figura 27 – Señal de Salida $y(kT)$ para una entrada en escalón unitario. $T = 0,02$ seg.

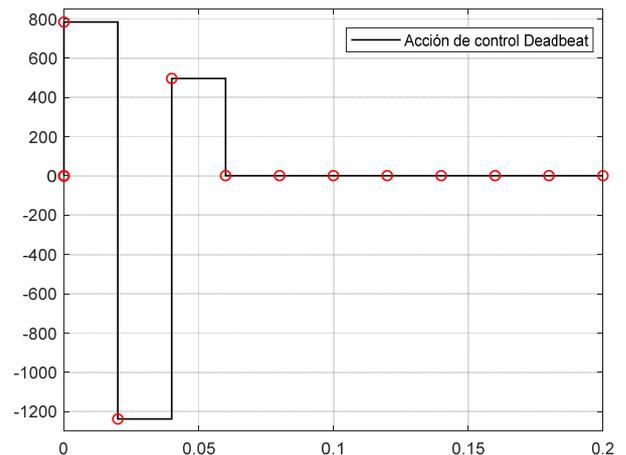


Figura 28 – Señal de control $u(kT)$. $T = 0,02$ seg.

Como se muestra en la Figura 28, se observa que la señal de control, presenta valores iniciales muy elevados, tanto positivos como negativos, y con toda seguridad, habrá una

saturación del actuador. De esta situación podemos inferir que, debido a las limitaciones físicas que posee cualquier sistema real, no se puede imponer cualquier función de transferencia en lazo cerrado. Entonces, como la energía de la señal de control depende básicamente del periodo de muestreo usado en el diseño, el periodo de muestreo para controladores *deadbeat* se puede obtener a través de la siguiente relación [2]: $\frac{T}{T_{95}} \geq 0,2$ donde T_{95} es el tiempo de establecimiento t_s con criterio del 5%. Podemos concluir que esta técnica es fuertemente dependiente de los parámetros de la planta y su ley de control resulta con ganancias elevadas, lo que debe ser tenido en cuenta al momento de efectuar la implementación práctica, para evitar saturación de los actuadores.

B. Controlador OSAP (*One Sampling Ahead Preview*)

El controlador OSAP es otro controlador diseñado en el dominio de tiempo discreto, que, aplicado a un sistema dado, este último presenta una respuesta de tipo *deadbeat*. O sea, la salida del sistema alcanza el valor deseado en un tiempo mínimo, sin sobrepasos ni oscilaciones. Este controlador fue propuesto en [4] y abordado en [6] para ser aplicado a inversores PWM monofásicos utilizados como etapas de salida de fuentes ininterrumpidas de potencia (UPS).

Considérese el circuito electro-electrónico presentado en la Figura 29. El mismo es un convertidor de potencia CC-CA o inversor, utilizado para el control de la tensión de salida de una fuente de alimentación ininterrumpida monofásica, comúnmente denominada UPS (del inglés, *Uninterruptible Power Supply*).

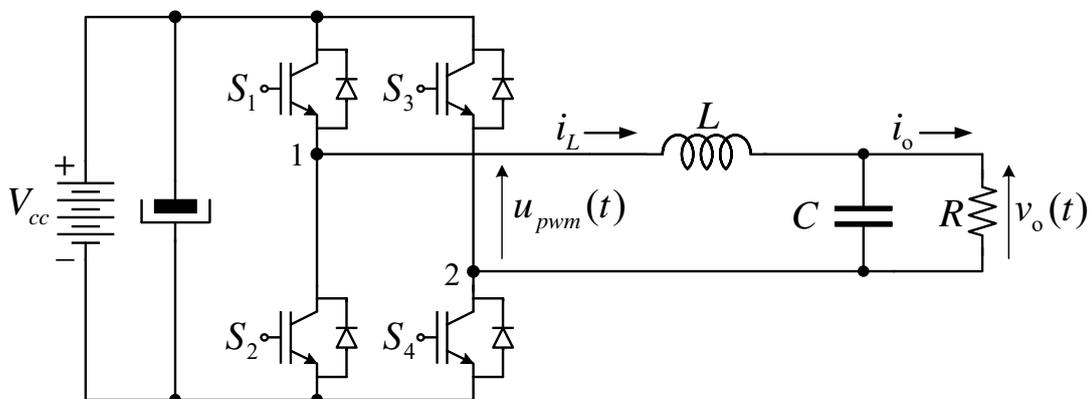


Figura 29 – Inversor monofásico en puente completa. Filtro LC y carga resistiva.

El inversor de la Figura 29 en configuración de puente completo, el filtro pasa bajos LC y la carga forman parte de la planta a ser controlada. En esta planta, el inversor PWM conforma el actuador, el cual tiene característica no lineal debido a que los transistores de potencia operan en modo conmutación, modulándose el tiempo de conducción respecto a un periodo fijo, proceso denominado de modulación de ancho de pulso, o PWM (del inglés, *Pulse-Width Modulation*). El proceso de conmutación mencionado, produce funciones de conmutación S_1 , S_2 , S_3 y S_4 , las cuales son lineales por partes. Pero asumiendo que estos interruptores son ideales y que la amplitud de la tensión de entrada es constante, puede considerarse al inversor como un amplificador de ganancia constante igual a V_{cc} . Además, debido a que la frecuencia a la que operan los semiconductores es mucho mayor que la frecuencia fundamental de la tensión de salida, puede considerarse que la acción de control $u(t)$ en un periodo de conmutación es prácticamente constante y así sustituir la señal pulsante por su valor medio en este periodo.

En base a las consideraciones realizadas, el sistema de la Figura 29 puede ser modelado como un sistema lineal e invariante en el tiempo a partir de su representación entrada-salida, la que resulta en una función de transferencia de segunda orden, dada por la ecuación (79).

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1/LC}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} \quad (79)$$

donde, $Y(s)$ es la transformada de Laplace de la tensión de salida $y(t) = v_o(t)$ y $U(s)$ la transformada de Laplace de la entrada $u(t) = u_{pwm}(t)$. De la ecuación (79) se observa que:

$$2\xi\omega_n = \frac{1}{RC} \quad \text{y} \quad \omega_n^2 = \frac{1}{LC} \quad (80)$$

o sea que el coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia natural no amortiguada de este sistema dependen de los parámetros del filtro y la carga, y son dados por:

$$\xi = \frac{1}{2\omega_n RC} = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{y} \quad \omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (81)$$

Para efectuar el proyecto del controlador en tiempo discreto, se debe primero muestrear la planta con un periodo adecuado. Como ya se vio anteriormente, para plantas cuya salida es oscilatoria puede adoptarse el siguiente criterio [2]:

$$\omega_n T \geq 0,1; \quad \text{de donde } T \geq \frac{0,1}{\omega_n} \quad \text{o también, } f_m = 10 \times f_{max} \quad (82)$$

Así, la discretización de la ecuación (79) usando un ZOH resulta en la siguiente función de transferencia en tiempo discreto:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 + b_2 z^{-1}}{z + a_1 + a_2 z^{-1}} \quad (83)$$

Rescribiéndose la (83) como se muestra a continuación

$$zY(z) + a_1 Y(z) + a_2 z^{-1} Y(z) = b_1 U(z) + b_2 z^{-1} U(z), \quad (84)$$

y aplicándose la transformada \mathcal{Z} inversa a esta última ecuación, se obtiene la siguiente ecuación a diferencias finitas:

$$y(k+1) + a_1 y(k) + a_2 y(k-1) = b_1 u(k) + b_2 u(k-1) \quad (85)$$

Si se admite que la salida $y(k)$ sigue a la señal de referencia $r(k)$ con error nulo a cada instante de muestreo, se puede hacer $y(k+1) = r(k+1)$, y de esta forma la ley de control de tiempo mínimo resulta:

$$u(k) = \frac{r(k+1) + a_1 y(k) + a_2 y(k-1) - b_2 u(k-1)}{b_1} \quad (86)$$

Esta última ecuación muestra que para la obtención de la acción de control actual se necesita conocer la muestra de la tensión de salida en el instante actual y la del instante de

muestreo anterior $y(k)$ e $y(k-1)$, respectivamente; como así también el valor de la acción de control del instante de muestreo anterior $u(k-1)$ y el valor futuro de la referencia un paso adelante. Si a_1, a_2, b_1 y b_2 son conocidos, esta ley de control permite que la tensión de salida sea igual a la de referencia en cada instante de muestreo.

Es importante notar que estos coeficientes son obtenidos de los parámetros de la planta con un periodo de muestreo T determinado. Recordemos que estos parámetros son los valores nominales de la planta, los cuales pueden ser ligeramente diferentes de los valores reales que pueden obtenerse, por ejemplo, mediante ensayos experimentales. Además de esto, los efectos no lineales presentes tales como los tiempos muertos entre llaves de un mismo brazo, los atrasos de tiempo de la entrada y salida de conducción de los semiconductores, las caídas de tensión en estos últimos y la no linealidad del circuito magnético del inductor que puede presentarse según los estados de carga y la temperatura, entre otros, hacen que estos coeficientes sean un poco diferentes de los calculados. Inclusive, las perturbaciones de carga también causan variaciones paramétricas, haciendo que la respuesta del sistema deje de ser de tiempo mínimo, lo que se debe a que el diseño parte de considerar una carga lineal con un valor específico aproximadamente constante.

Haciendo entonces $a_1 = p_1, a_2 = p_2, b_1 = q_1$ y $b_2 = q_2$, la ecuación (86) resulta:

$$u_{OSAP}(k) = (1/q_1)r(k+1) + (p_1/q_1)v_o(k) + (p_2/q_1)v_o(k-1) - (q_2/q_1)u_{OSAP}(k-1) \quad (87)$$

donde p_1, p_2, q_1 y q_2 son ahora los parámetros del controlador OSAP.

Si se obtiene la transformada \mathcal{Z} de (87), se tiene que,

$$(q_1 + q_2z^{-1})U(z) = zR(z) + (p_1 + p_2z^{-1})Y(z) \quad (88)$$

A partir de las ecuaciones (83) y (88) se obtiene el siguiente diagrama de bloques del sistema realimentado:

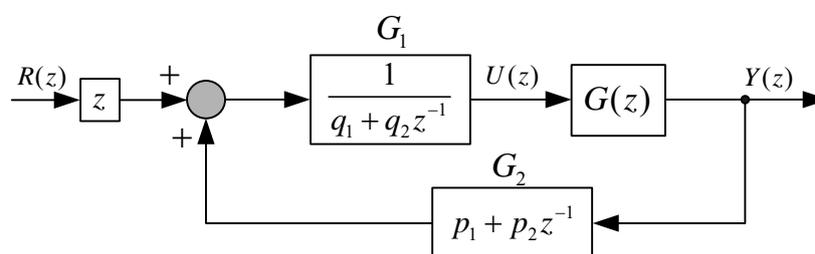


Figura 30 – Sistema realimentado con el controlador OSAP.

La salida de este sistema realimentado con el controlador OSAP está dada por:

$$Y(z) = [zR(z) + G_2 Y(z)]G_1 G(z) \quad (89)$$

Se observa de la última expresión, que la función de transferencia de lazo cerrado, $G_{lc}(z)$, resulta:

$$G_{lc}(z) = \frac{V_o(z)}{R(z)} = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{z G_1(z) G(z)}{1 - G_1(z) G(z) G_2(z)} \quad (90)$$

sustituyendo G_1 y G_2 se obtiene,

$$Y(z) = \frac{(b_1 z + b_2) z^2 R(z)}{(z^2 + a_1 z + a_2)(q_1 z + q_2) - (p_1 z + p_2)(b_1 z + b_2)} \quad (91)$$

$$Y(z) = G_{lc}(z) R(z) \quad (92)$$

donde la función de transferencia de lazo cerrado en función de los coeficientes del controlador OSAP y de los coeficientes de la planta, es dada por:

$$G_{lc}(z) = \frac{(b_1 z + b_2) z^2}{(z^2 + a_1 z + a_2)(q_1 z + q_2) - (p_1 z + p_2)(b_1 z + b_2)} = \frac{Y(z)}{R(z)} \quad (93)$$

o también, reescrita de la siguiente forma,

$$G_{lc}(z) = \frac{b_1 z^3 + b_2 z^2}{z^3 q_1 + z^2(a_1 q_1 - p_1 b_1 + q_2) + z(a_2 q_1 + a_1 q_2 - p_2 b_1 - p_1 b_2) + (a_2 q_2 - p_2 b_2)} \quad (94)$$

factorizando q_1 en el denominador, se obtiene finalmente:

$$G_{lc}(z) = \frac{(b_1 / q_1) z^3 + (b_2 / q_1) z^2}{z^3 + z^2(a_1 q_1 - p_1 b_1 + q_2) / q_1 + z(a_2 q_1 + a_1 q_2 - p_2 b_1 - p_1 b_2) / q_1 + (a_2 q_2 - p_2 b_2) / q_1} \quad (95)$$

Si los parámetros del controlador son iguales a los de la planta, en la última expresión se tiene que los coeficientes del término de primer orden y del término independiente del denominador se anulan, y el coeficiente del término de segundo orden es igual a $q_2 / q_1 = b_2 / b_1$.

Esto resulta:

$$G_{lc}(z) = \frac{z^3 + z^2 (b_2 / b_1)}{z^3 + z^2 (b_2 / b_1)} = \frac{z^2 [z + (b_2 / b_1)]}{z^2 [z + (b_2 / b_1)]} \quad (96)$$

Esta función de transferencia introduce, en el plano z , dos polos al origen y otro polo en $-b_2 / b_1$, que es exactamente donde se ubica el cero de la planta.

Observando la ecuación (96), se concluye que si los parámetros del controlador OSAP están bien sintonizados y prácticamente iguales a los de la planta, entonces se tiene:

$$Y(z) = R(z) \quad (97)$$

Si existe una variación paramétrica en la planta luego de que los parámetros del controlador son diseñados, los polos de (91) sufrirán un desplazamiento respecto al valor deseado y ya no se conseguirá la respuesta de tiempo mínimo deseada. Por lo tanto, este controlador resulta útil para reducir el error en régimen permanente cuando se considera a la salida del filtro LC, una carga lineal conocida.

Ejemplo. Considérense los siguientes valores para los parámetros de la planta: $L = 1 \text{ mH}$, $C = 25 \mu\text{F}$, $R = 12 \Omega$. La frecuencia fundamental de la tensión deseada de salida $f_1 = 50 \text{ Hz}$. Con estos parámetros, la función de transferencia de la planta en tiempo continuo dada en (79) resulta,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{4 \times 10^7}{s^2 + 3333s + 4 \times 10^7} \quad (98)$$

y de las expresiones dadas en (81) se tiene que:

$$\xi = 0,2635 \quad \text{y} \quad \omega_n = 6325 \text{ rad/seg} \Rightarrow f_c = \omega_n / 2\pi = 1 \text{ kHz} \quad (99)$$

donde f_c es la frecuencia de corte del filtro pasa bajos LC.

De la ecuación (82) se obtiene la frecuencia de muestreo utilizándose $f_m = 10 \times f_{max}$, donde en este caso, $f_{max} = f_c$ por lo que el período de muestreo resulta:

$$f_m = 10 \times f_c = 10 \text{ kHz} \quad \text{y} \quad T = \frac{1}{f_m} = 100 \mu\text{seg}, \quad (100)$$

entonces, muestreando la expresión (98) con un ZOH, se obtiene la siguiente función de transferencia de la planta en tiempo discreto:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,1737 + 0,1553 z^{-1}}{z - 1,388 + 0,7165 z^{-1}} \quad (101)$$

donde: $a_1 = -1,388$; $a_2 = 0,7165$; $b_1 = 0,1737$; $b_2 = 0,1553$ y por lo tanto, los parámetros del controlador OSAP resultan: $p_1 = -1,388$; $p_2 = 0,7165$; $q_1 = 0,1737$; $q_2 = 0,1553$. La ley de control resultante a ser implementada en el procesador digital tiene la siguiente ecuación a diferencias:

$$u_{OSAP}(k) = 5,7571r(k+1) - 7,9908y(k) + 4,1249y(k-1) - 0,8941u_{OSAP}(k-1) \quad (102)$$

Así, la función de transferencia de lazo cerrado cuando los parámetros del controlador OSAP son iguales a los de la planta, se muestra a continuación:

$$G_{lc}(z) = \frac{z^3 + 0,8941z^2}{z^3 + 0,8941z^2}. \quad (103)$$

Los mapas de polos y ceros de la planta y del sistema en lazo cerrado se muestran en la Figura 31 y Figura 32, respectivamente.

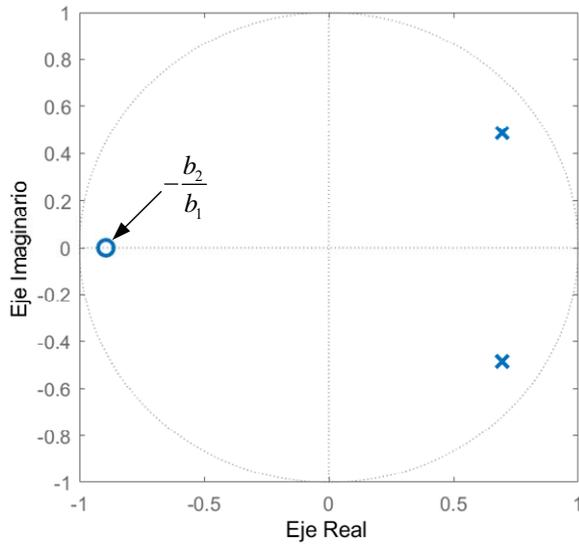


Figura 31 – Mapa de polos y ceros de la planta en tiempo discreto. $T = 100 \mu\text{seg}$.

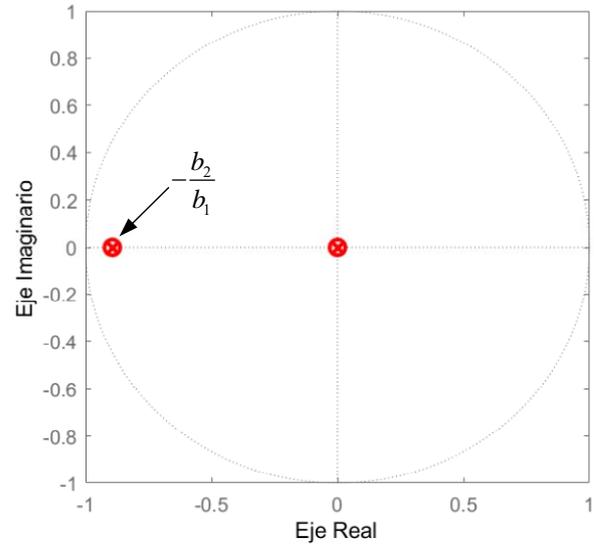


Figura 32 – Mapa de polos y ceros de $G_c(z)$. $T = 100 \mu\text{seg}$.

Si se traza la respuesta al escalón de este sistema en lazo cerrado, la misma resulta como se muestra en la Figura 33:

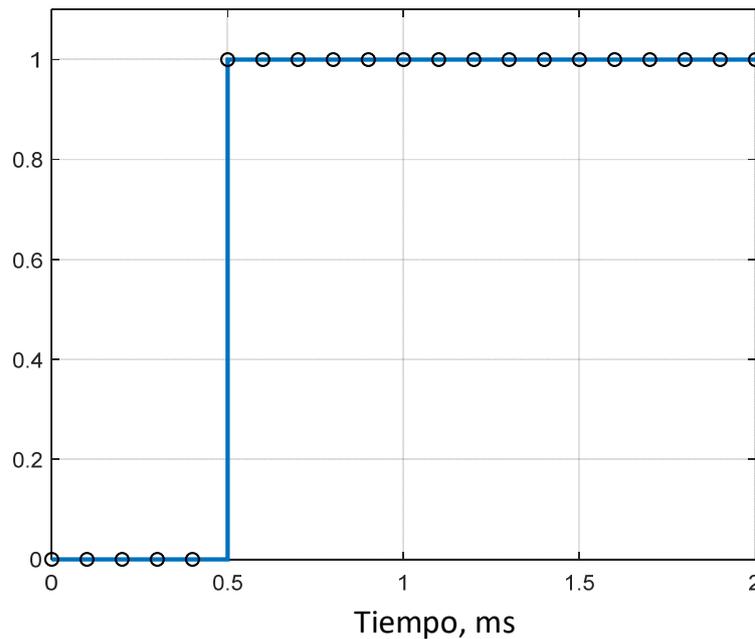


Figura 33 – Respuesta al escalón unitario de la planta en lazo cerrado con el controlador OSAP. $T = 100 \mu\text{seg}$.

Se observa en la respuesta al escalón unitario de $G_c(z)$, Figura 33, que el sistema responde en un tiempo mínimo de una muestra, tal como esperado, presentando error de régimen permanente nulo a cada instante de muestreo. Si se produce una variación paramétrica, los parámetros del controlador dejan de ser iguales a los de la planta. Esta variación paramétrica de

la planta, se simuló variando el capacitor del filtro LC y la carga, manteniéndose invariantes los coeficientes del controlador obtenidos con la planta nominal a $T = 100 \mu\text{s}$.

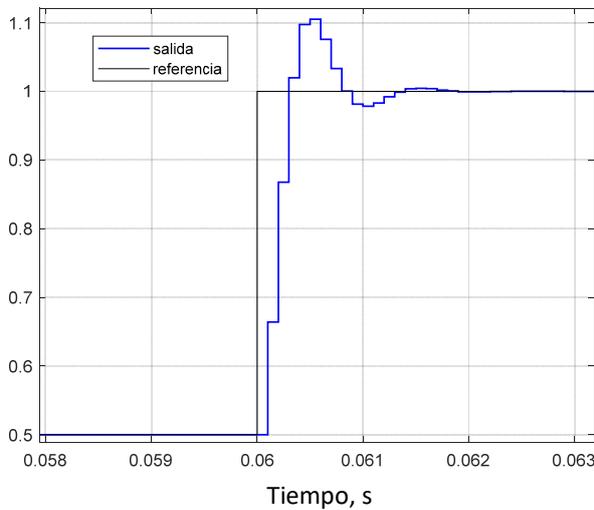


Figura 34 – Respuesta al escalón unitario de la planta muestreada en $T = 100 \mu\text{s}$ con variación paramétrica.

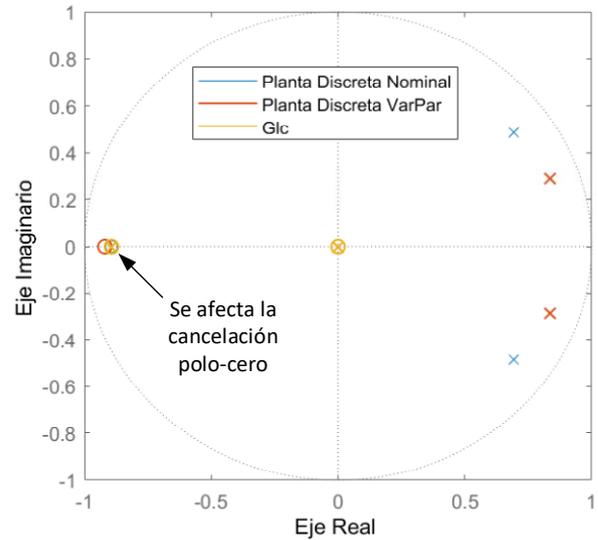


Figura 35 – Mapa de polos de $G_{lc}(z)$, planta nominal y planta con variación paramétrica. $T = 100 \mu\text{s}$.

Se observa en la Figura 35 que uno de los polos de lazo cerrado ya no se encuentra sobre la posición del cero de la planta, debido a la variación de parámetros. Por otro lado, la respuesta al escalón para este sistema resulta como se muestra en la Figura 34. En esta se observa que el desempeño transitorio se ve afectado debido a esta variación paramétrica, perdiéndose la característica de respuesta *deadbeat*.

Para apreciar más resultados con el controlador OSAP, ejecutar y analizar el script de Matlab “Controlador_OSAP_apunte.m”, en el cual se puede elegir variar los parámetros de la planta para observar como estos afectan la respuesta de este controlador.

C. Controlador OSAP Modificado

El controlador OSAP presentado en la sección anterior, impone una limitación al ancho del pulso PWM sintetizado por el actuador. Esta limitación es una reducción del ancho del pulso disponible debido al tiempo finito requerido para realizar la adquisición y conversión de la tensión de salida y para el cálculo de la acción de control dada por (102). Por tanto, el cálculo del ancho del pulso comienza después de este tiempo que llamamos T_d . En consecuencia, como el ancho de pulso necesario no puede obtenerse durante la ejecución del algoritmo, este resulta menor al ancho de pulso máximo disponible. Este efecto puede visualizarse en la Figura 36, en la

cual el máximo ancho de pulso, considerando que el pulso no es centrado en el intervalo de muestreo, es $d = T - T_d$.

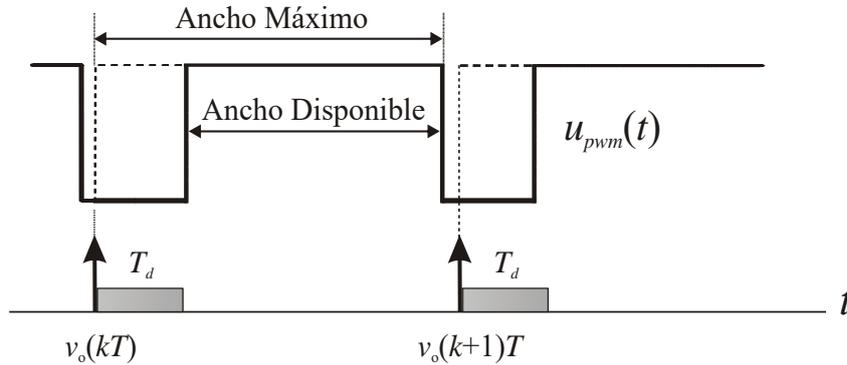


Figura 36 – Señal PWM producida por el actuador. Control OSAP.

Cuando la carga conectada a la salida del inversor drena una corriente con elevada di/dt y un alto factor de cresta, como lo es el caso del rectificador a diodos con filtro capacitivo, esta corriente produce una caída de tensión significativa sobre el filtro LC, debido a la impedancia que este presenta. Se hace por tanto necesario en este caso, aplicar a la planta el máximo ancho de pulso disponible para poder compensar esta caída de tensión y no incrementar la distorsión armónica total de la tensión de salida del inversor. Por tanto, la pérdida de ancho de pulso representada en la Figura 36, no permite aprovechar totalmente la fuente de tensión V_{cc} haciendo que la tensión de salida presente una muesca en el instante en que la corriente del rectificador comienza a aumentar, deformando la onda de la tensión de salida del inversor.

Para dar una solución a este problema, en [5] se propone una modificación al controlador OSAP convencional visto anteriormente. En este OSAP modificado, el ancho del pulso para el instante de muestreo actual kT se calcula utilizando el valor de la tensión de salida del instante de muestreo anterior $(k - 1)T$. De esta forma, el cálculo del ancho del pulso actual se efectúa en el periodo de muestreo anterior, y este valor calculado se puede extender a todo el intervalo de muestreo siguiente. Esto se muestra en la Figura 37. En este caso el máximo ancho de pulso teórico es $d = T$.

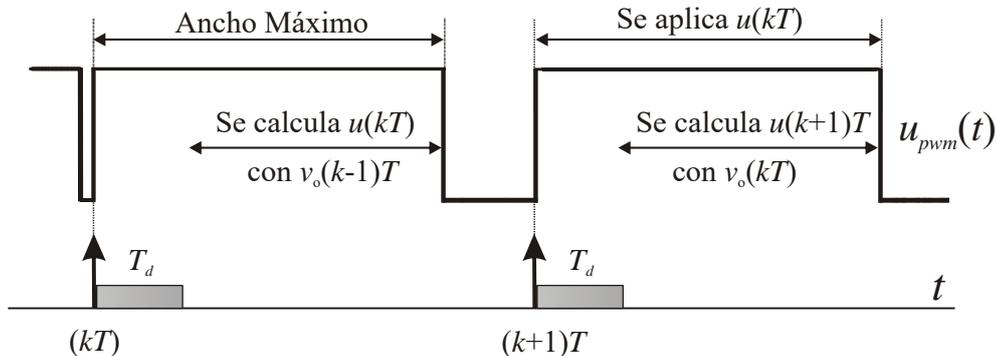


Figura 37 – Señal PWM producida por el actuador. Control OSAP modificado.

Estructura del controlador OSAP modificado: La ecuación (83) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z b_1 + b_2}{z^2 + z a_1 + a_2} \quad (104)$$

Rescribiéndose la (104) como se muestra a continuación

$$z^2 Y(z) + a_1 z Y(z) + a_2 Y(z) = z b_1 U(z) + b_2 U(z), \quad (105)$$

y aplicándose la transformada \mathcal{Z} inversa a esta última ecuación, se obtiene la siguiente ecuación a diferencias finitas:

$$y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_2 y(k) = b_1 u(k+1) + b_2 u(k) \quad (106)$$

Decrementando k en 2 muestras para que la acción de control no dependa de los valores futuros, se obtiene que:

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) \quad (107)$$

y la salida resulta finalmente dependiendo únicamente de los valores de las muestras pasadas, tanto de la acción de control como de la tensión de salida:

$$v_o(k) = b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) - a_1 v_o(k-1) - a_2 v_o(k-2) \quad (108)$$

Sustituyéndose la (108) en la ecuación (87) y agrupando términos se obtiene la siguiente expresión para la ley de control OSAP modificada:

$$u(k) = \left(\frac{1}{q_1} \right) r(k+1) + \left(\frac{p_2 - a_1 p_1}{q_1} \right) v_o(k-1) + \left(-\frac{p_1 a_2}{q_1} \right) v_o(k-2) + \left(\frac{p_1 b_1 - q_2}{q_1} \right) u(k-1) + \left(\frac{p_1 b_2}{q_1} \right) u(k-2) \quad (109)$$

De la ecuación (109) se definen los siguientes parámetros de este controlador OSAP modificado:

$$p_{1m} = \frac{p_2 - a_1 p_1}{q_1}; \quad p_{2m} = -\frac{p_1 a_2}{q_1}; \quad q_{1m} = \frac{1}{q_1}; \quad q_{2m} = \frac{p_1 b_1 - q_2}{q_1}; \quad q_{3m} = \frac{p_1 b_2}{q_1} \quad (110)$$

De esta forma la ley de control OSAP modificada resulta:

$$u_{OM}(k) = q_{1m} r(k+1) + p_{1m} v_o(k-1) + p_{2m} v_o(k-2) + q_{2m} u_{OM}(k-1) + q_{3m} u_{OM}(k-2) \quad (111)$$

Se observa que para el cálculo de esta ley de control, las variables necesarias son las muestras de la tensión de salida en los instantes $t = (k-1)T$ y $t = (k-2)T$, los valores de la acción de control también en los instantes de muestreo pasados $t = (k-1)T$ y $t = (k-2)T$ y el valor de la referencia del instante de muestreo futuro $t = (k+1)T$. Por tanto, como este controlador no necesita del valor de la tensión $v_o(k)$ en el instante de muestreo actual, el cálculo del ancho de pulso para el k -ésimo intervalo de muestreo puede ser realizado durante los intervalos previos.

A continuación, se aplica la transformada \mathcal{Z} de la (111), y se obtiene:

$$U(z)[1 - q_{2m} z^{-1} - q_{3m} z^{-2}] = q_{1m} z R(z) + (p_{1m} z^{-1} + p_{2m} z^{-2})Y(z) \quad (112)$$

A partir de esta última resulta el diagrama de bloques del sistema realimentado con el controlador OSAP modificado que se muestra en la Figura 38.

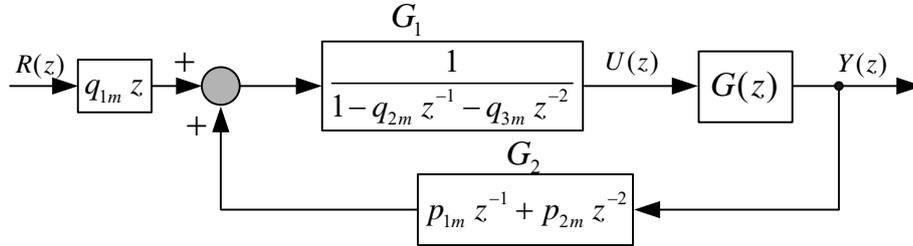


Figura 38 – Sistema realimentado con el controlador OSAP modificado.

La salida de este sistema realimentado con el controlador OSAP modificado es dada por la siguiente expresión:

$$Y(z) = [z q_{1m} R(z) + G_2 Y(z)] G_1 G(z) \quad (113)$$

Se observa de la última expresión, que la función de transferencia de lazo cerrado, $G_{lc}(z)$, resulta:

$$G_{lc}(z) = \frac{V_o(z)}{R(z)} = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{z q_{1m} G_1(z) G(z)}{1 - G_1(z) G(z) G_2(z)} \quad (114)$$

Sustituyéndose G_1 y G_2 por sus expresiones en el diagrama de bloques, se obtiene,

$$Y(z) = \frac{(b_1 q_{1m} z + b_2 q_{1m}) z^3 R(z)}{z^4 + (a_1 - q_{2m}) z^3 + (a_2 - p_{1m} b_1 - q_{3m} - q_{2m} a_1) z^2 + (-q_{3m} a_1 - q_{2m} q_2 - p_{1m} b_2 - p_{2m} b_1) z - (p_{2m} b_2 + q_{3m} a_2)} \quad (115)$$

Esta última implica que:

$$Y(z) = G_{lc}(z) R(z) \quad (116)$$

donde la función de transferencia de lazo cerrado resulta dada por:

$$G_{lc}(z) = \frac{(b_1 q_{1m} z + b_2 q_{1m}) z^3}{z^4 + (a_1 - q_{2m}) z^3 + (a_2 - p_{1m} b_1 - q_{3m} - q_{2m} a_1) z^2 + (-q_{3m} a_1 - q_{2m} q_2 - p_{1m} b_2 - p_{2m} b_1) z - (p_{2m} b_2 + q_{3m} a_2)} \quad (117)$$

Si los parámetros del controlador son iguales a los de la planta, en la última expresión se tiene que los coeficientes del término de segundo y primer orden y del término independiente del polinomio característico se anulan, y el coeficiente del término de tercer orden resulta igual a $q_2/q_1 = b_2/b_1$. Esto da por resultado la siguiente función de transferencia de lazo cerrado:

$$G_{lc}(z) = \frac{z^4 + z^3 (b_2/b_1)}{z^4 + z^3 (b_2/b_1)} \quad (118)$$

Esta función de transferencia introduce, en el plano z , tres polos al origen y un polo en $-b_2/b_1$, donde se ubica también el cero de la planta.

A partir de la ecuación (118) y (116) se concluye que si los parámetros del controlador OSAP están bien sintonizados y son iguales a los de la planta, entonces se tiene finalmente que

$$Y(z) = R(z). \quad (119)$$

La (119) nos dice que el sistema en lazo cerrado con el controlador OSAP modificado presentará respuesta de tiempo mínimo siempre y cuando los parámetros en (110) estén bien sintonizados. O sea, la salida de la planta será igual a la referencia de entrada a cada instante de muestreo. No obstante, frente a una variación paramétrica los polos de (115) sufrirán un desplazamiento en el plano z respecto a los de la planta y por tanto el comportamiento de tiempo mínimo no podrá ser satisfecho; de la misma forma a lo presentado para el controlador OSAP.

Se utiliza el ejemplo de la sección anterior para calcular los parámetros del controlador OSAP modificado: $p_{1m} = -6,951$; $p_{2m} = 5,72$; $q_{1m} = 5,747$; $q_{2m} = -2,279$; $q_{3m} = -1,236$.

La ley de control resultante a ser implementada en el procesador digital es la siguiente:

$$u_{om}(k) = 5,747 r(k+1) - 6,951 v_o(k-1) + 5,72 v_o(k-2) - 2,279 u_{om}(k-1) - 1,236 u_{om}(k-2) \quad (120)$$

La función de transferencia de lazo cerrado resulta:

$$G_{lc}(z) = \frac{z^4 + 0,894 z^3}{z^4 + 0,894 z^3}. \quad (121)$$

Para apreciar los resultados con el controlador OSAP modificado, ejecutar y analizar el script de Matlab “Inversor_monofasico_OSAP_modificado.m”. En este programa puede analizarse el desempeño con perturbación de carga periódica (carga no lineal) y perturbación no periódica (entrada y salida de carga lineal), además se incluye el actuador PWM pudiéndose observar el efecto de la modulación sobre las variables controladas.

D. Controlador PID Predictivo

Como ya es bien conocido, el controlador PID es muy utilizado debido a su estructura simple, a la robustez que presenta ante las incertidumbres en el modelo de la planta y a la flexibilidad para su actualización cuando se lo implementa en forma digital.

Las expresiones a diferencias finitas de controladores PID digitales presentadas en las ecuaciones (20) y (26) no tienen en cuenta el atraso de transporte resultante de la implementación digital, porque necesitan del valor del error en el periodo de muestreo actual. Esto puede generar problemas como ser la limitación en el valor máximo de la señal aplicada por el actuador, como ya fue descrito en el caso del controlador OSAP.

Una forma de solucionar este problema es utilizando una predicción de la señal de error. Esta estrategia tiene ventajas cuando se implementa el PID en microcontroladores de baja velocidad de procesamiento.

La ecuación en el dominio del tiempo del controlador PID es dada por:

$$u_{PID}(t) = K_p e(t) + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{de(t)}{dt}. \quad (122)$$

Utilizando las aproximaciones presentadas anteriormente, podemos obtener la ecuación en tiempo discreto de este controlador. Usamos para la derivada del error la aproximación por el método de Euler *backward difference* y para la integral del error la integración rectangular por el método de *backward*. Esto es: para la derivada del error,

$$\frac{de(t)}{dt} = \frac{e(kT) - e[(k-1)T]}{T}, \quad (123)$$

y para la integral del error, a partir de la Figura 39, donde la altura del rectángulo viene dada por la amplitud de la muestra en el instante actual, o sea $e(kT)$.

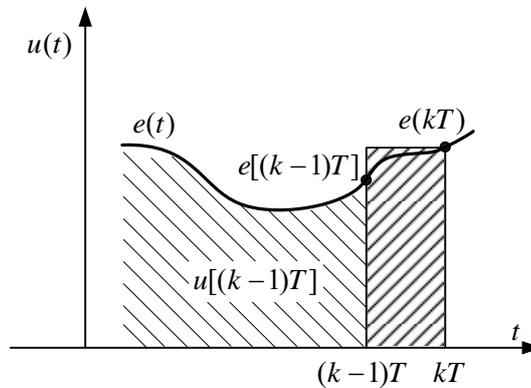


Figura 39 – Método *backward* de integración rectangular.

$$u(kT) = u[(k-1)T] + Te(kT). \quad (124)$$

Tomando la transformada \mathcal{Z} a ambos miembros de la (123) y (124) obtenemos:

$$\mathcal{Z} \left[\frac{de(t)}{dt} \right]_{t=kT} = \frac{1}{T} [E(z) - z^{-1}E(z)] = \frac{1}{T} [1 - z^{-1}] E(z), \quad (125)$$

y la función de transferencia del término derivativo resulta:

$$G_d(z) = \frac{K_d}{T} \frac{z-1}{z}; \quad (126)$$

Para la integral del error tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} [u(kT)]_{t=kT} - \mathcal{Z} [u(k-1)T] &= \mathcal{Z} [Te(kT)] \\ U(z) - z^{-1}U(z) &= TE(z) \Rightarrow \frac{U(z)}{E(z)} = T \frac{1}{1-z^{-1}} \end{aligned} \quad (127)$$

y la función de transferencia del término integral queda de la siguiente forma:

$$G_i(z) = K_i T \frac{z}{z-1}; \quad (128)$$

La ecuación en tiempo discreto de la acción de control PID, se escribe ahora como sigue:

$$U_{PID}(z) = \left[K_p + K_i T \frac{z}{z-1} + \frac{K_d}{T} \frac{z-1}{z} \right] E(z). \quad (129)$$

Aplicando la transformada \mathcal{Z} inversa a esta última ecuación, obtenemos la expresión a diferencias para la implementación digital:

$$u_{PID}(k) = K_p e(k) + K_i T \sum_{n=1}^k e(n) + \frac{K_d}{T} [e(k) - e(k-1)]. \quad (130)$$

Como esta ecuación depende de $e(k)$, si el tiempo necesario para calcular el controlador fuese significativo, del orden del periodo de muestreo T , la utilización de una predicción del error trae beneficios en la implementación. Un algoritmo de predicción lineal, propuesto en [7] es dado por la siguiente ecuación:

$$e(k) = e(k-1) + [e(k-1) - e(k-2)]. \quad (131)$$

En esta predicción, el error actual $e(k)$ se obtiene a partir de sus dos últimos valores.

Sustituyéndose esta última expresión del error en la (130), la ecuación a diferencias del controlador PID predictivo se transforma en la siguiente:

$$u_{PID_P}(k) = K_1 e(k-1) + K_2 e(k-2) + K_3 e_s(k-1). \quad (132)$$

donde,

$$e_s(k-1) = \sum_{n=1}^{k-1} e(n). \quad (133)$$

y,

$$\begin{aligned} K_1 &= 2K_p + 2K_i T + \frac{K_d}{T} \\ K_2 &= -(K_p + K_i T + \frac{K_d}{T}). \\ K_3 &= K_i T \end{aligned} \quad (134)$$

Ejemplo. Supongamos el caso de un filtro LC de salida de un inversor monofásico PWM, cuya función de transferencia muestreada está dada por la siguiente expresión:

$$G_p(z) = \frac{b_1 + b_2 z^{-1}}{z + a_1 + a_2 z^{-1}}. \quad (135)$$

Se desea proyectar un compensador PD predictivo para mejorar el desempeño transitorio de este sistema frente a variaciones de referencia en escalón. Siendo $K_i = 0$, de (132) y (134) se tiene que:

$$u_{PD_P}(k) = K_1 e(k-1) + K_2 e(k-2), \text{ y} \quad (136)$$

$$K_1 = 2K_p + \frac{K_d}{T}$$

$$K_2 = -(K_p + \frac{K_d}{T})$$
(137)

La estructura del sistema de control en lazo cerrado se muestra a continuación:

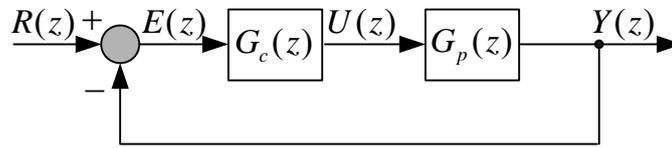


Figura 40 – Estructura del sistema de control discreto con PD predictivo.

De la Figura 40 se deduce que la función de transferencia de lazo cerrado está dada por:

$$G_{lc}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)G_p(z)}{1 + G_c(z)G_p(z)},$$
(138)

por tanto,

$$G_{lc}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{b_1K_1z^2 + (b_1K_2 + b_2K_1)z + b_2K_2}{z^4 + a_1z^3 + (a_2 + b_1K_1)z^2 + (b_1K_2 + b_2K_1)z + b_2K_2},$$
(139)

Para efectuar el diseño de las ganancias K_1 y K_2 , podemos utilizar el criterio de dominancia, por el cual aproximamos la dinámica de un sistema de orden elevado (como lo es el de la ecuación (139)) por la dinámica de un sistema de orden reducido, caracterizado por los polos dominantes en lazo cerrado. Podemos entonces obtener las ganancias K_1 y K_2 , por ejemplo, ubicando los polos dominantes en lazo cerrado en posiciones determinadas del plano z que satisfacen alguna especificación de desempeño en régimen transitorio. A partir de estas especificaciones, la ecuación característica deseada resulta:

$$\alpha_c(z) = (z - p_{nd1})(z - p_{nd2})(z - p_d)(z - \bar{p}_d),$$
(140)

donde,

$$p_d = e^{s_1T} \quad \text{y} \quad \bar{p}_d = e^{s_2T},$$
(141)

y $s_{1,2}$ son los polos dominantes de lazo cerrado o lo que es igual, las raíces de la ecuación característica del sistema de orden reducido de segundo orden, o sea:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2},$$
(142)

esto es, las raíces de $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$.

La ecuación característica del sistema real en lazo cerrado está dada por el denominador de (139), o sea:

$$P_c(z) = z^4 + a_1z^3 + (a_2 + b_1K_1)z^2 + (b_1K_2 + b_2K_1)z + b_2K_2.$$
(143)

Para la obtención de K_1 y K_2 por ubicación de polos, deben igualarse los coeficientes de igual potencia de la (143) y la (140), obteniéndose así un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas el cual, una vez solucionado, proporciona los valores de K_1 y K_2 y la localización de los polos no dominantes, p_{nd1} y p_{nd2} .

Las especificaciones de desempeño en régimen transitorio que se imponen, son:

$$M_p \leq 2\% \text{ y } t_s = 2 \text{ ms} \quad (144)$$

Siendo que,

$$M_p = 100 e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \text{ y } t_s = \frac{4}{\xi\omega_n} \text{ (criterio 2\%)}. \quad (145)$$

De la ecuación del sobrepaso máximo obtenemos el valor de ξ , o sea,

$$\xi = \frac{-\ln(M_p)}{\sqrt{[\ln(M_p)]^2 + \pi^2}} \quad (146)$$

y con el valor de ξ de la última ecuación y el tiempo de establecimiento, obtenemos el valor de ω_n de los polos de lazo cerrado, o sea:

$$\omega_n = \frac{4}{\xi t_s}. \quad (147)$$

Los valores de inductancia, capacitancia y resistencia de la planta en cuestión son los siguientes $L=1\text{mH}$, $C=25\mu\text{F}$, $R=48,4\Omega$. A partir de las especificaciones dadas y utilizándose las expresiones (146) y (147), obtenemos $\xi=0,78$ y $\omega_n=2565\text{rad/seg}$. Con estos parámetros podemos calcular las raíces de la ecuación característica reducida de segundo orden a partir de la (142), esto es:

$$s_{1,2} = -2000 \pm j1606. \quad (148)$$

El periodo de muestreo seleccionado para la implementación digital de este controlador es de $125\mu\text{s}$, lo que da una frecuencia de muestreo de 8kHz . Utilizándose la ecuación (141) obtenemos los polos dominantes deseados del sistema reducido de segundo orden en el plano- z , o sea:

$$z_{1,2} = e^{s_{1,2}T} = 0,7632 \pm j0,1553. \quad (149)$$

Una vez solucionando el sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas mencionado más arriba, los valores de las ganancias del controlador resultan: $K_1 = -0,68435$ y $K_2 = -0,05836$ y los polos no dominantes de lazo cerrado adoptan los siguientes valores: $p_{nd1} = -0,05115$ y $p_{nd2} = 0,23293$. Se aprecia que los polos no dominantes se encuentran ambos muy próximos al origen del plano- z , por lo que su efecto en la respuesta transitoria es despreciable.

Con las ganancias calculadas, la función de transferencia del controlador PD predictivo aplicándose la transformada Z inversa a la ecuación (136), resulta:

$$G_c(z) = K_1 \frac{z + z_c}{z^2}; \text{ con } z_c = \frac{K_2}{K_1}, \quad (150)$$

y reemplazando valores numéricos, se tiene que

$$G_c(z) = -0,68435 \frac{z + 0,08528}{z^2} \quad (151)$$

A continuación, se presentan los resultados de simulación para este ejemplo. En la Figura 43 se muestra la respuesta en frecuencia de lazo cerrado del sistema de control diseñado anteriormente. Se observa que la introducción de este compensador, por las características dinámicas que posee la planta y las especificaciones de desempeño impuestas, el sistema de control en lazo cerrado presenta una fase de 180° en las frecuencias bajas y de 165° en la frecuencia fundamental de 50 Hz. Además, en las frecuencias bajas y medias, el sistema en lazo cerrado resulta con una ganancia un poco mayor 9 dB, lo que da como resultado una amplificación por arriba del valor de régimen, pero con signo contrario al de la referencia debido a la contrafase mencionada. Esto se puede apreciar en la Figura 44 donde la salida de la planta, ante la aplicación de una referencia de entrada en escalón, parte de cero, y luego de superado el transitorio, tiende a un valor de régimen estacionario de aproximadamente 2,88; valor que corresponde a los 9,18 dB antes indicados.

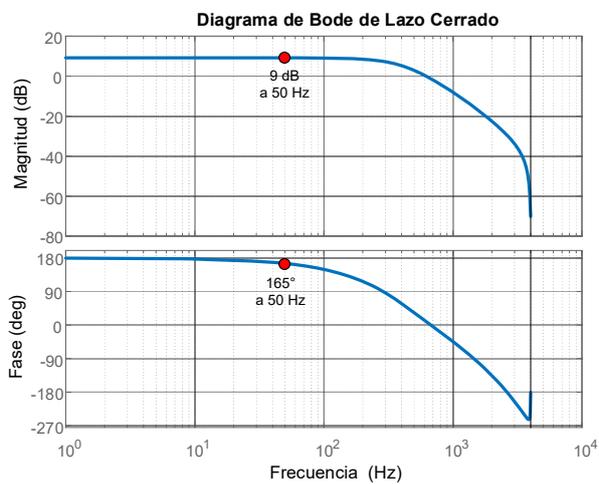


Figura 41 – Respuesta en frecuencia de lazo cerrado del sistema de la Figura 40 con PD predictivo. $T = 125 \mu\text{s}$.

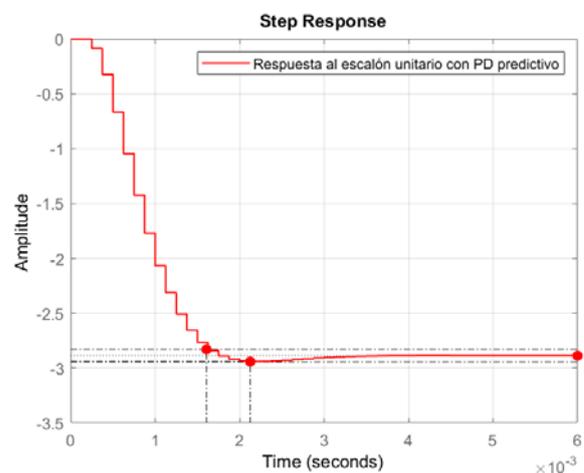


Figura 42 – Respuesta al escalón unitario de lazo cerrado del sistema de la Figura 40 con PD predictivo. $T = 125 \mu\text{s}$.

Además, se observa que la respuesta cumple con las especificaciones impuestas, dando un sobrepaso de 1,84 % y un tiempo de asentamiento de 1,6 ms.

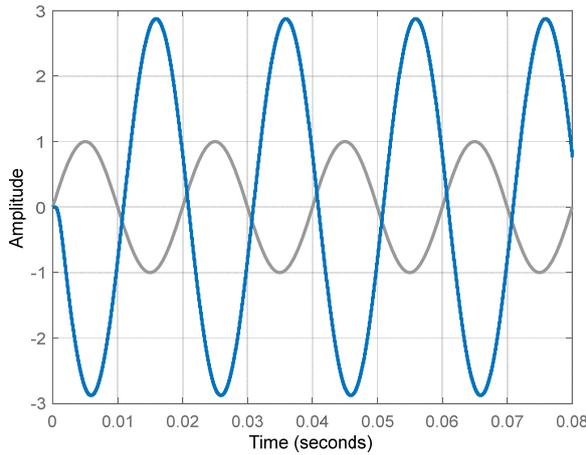


Figura 43 – Respuesta a una entrada sinusoidal en lazo cerrado del sistema de la Figura 40 con PD predictivo. $T = 125 \mu s$.

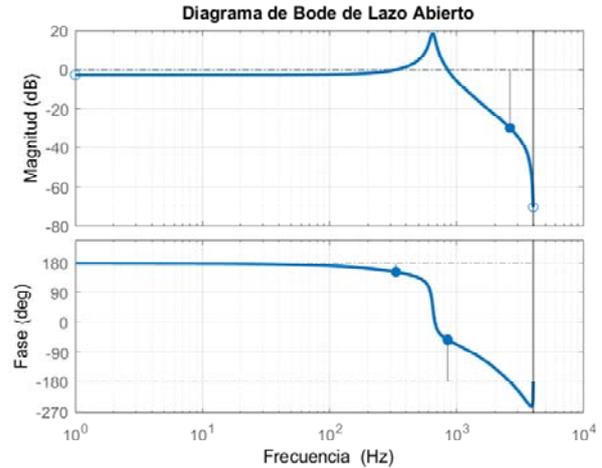


Figura 44 – Respuesta en frecuencia de lazo abierto del sistema de la Figura 40 con PD predictivo. $T = 125 \mu s$.

La Figura 45 muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado para una señal de referencia sinusoidal de amplitud uno y frecuencia fundamental 50 Hz. Puede apreciarse el desfasaje y la amplificación, resultantes de la compensación que realiza el PD predictivo, según se indicó en la respuesta en frecuencia de la Figura 41. Mientras que en la Figura 44 se aprecia la respuesta en frecuencia de lazo abierto en la cual, el margen de fase de mayor valor que se da en el segundo cruce de ganancia en la región de las altas frecuencias, es de 129° y un margen de ganancia de 29,8 dB.

Para solucionar el problema de la fase en la señal controlada y por ende, del error en régimen permanente, al sistema de la Figura 40, a la acción del compensador PD predictivo se le suma la referencia de entrada, lo que se conoce como acción *feedforward*. De esta forma, el sistema de control resulta como se muestra en la Figura 45. Dicha acción puede atenuarse incorporándose una ganancia menor a 1 para no deteriorar la respuesta ante variaciones en escalón de la referencia o ante entradas y salidas de perturbaciones exógenas.

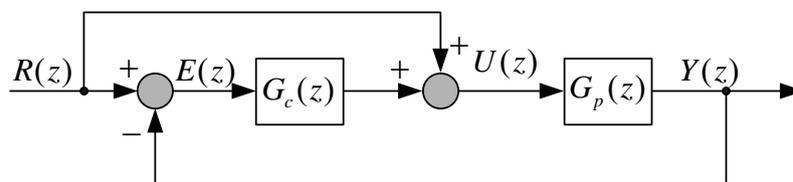


Figura 45 – Sistema de control discreto con PD predictivo más *feedforward* de la referencia.

La función de transferencia de lazo cerrado de la Figura 45 puede obtenerse como sigue:

$$Y(z) = G_p [R(z) + U(z)] = G_p [R(z) + G_c E(z)] \tag{152}$$

$$Y(z) = G_p \{ R(z) + G_c [R(z) - Y(z)] \} \tag{153}$$

y finalmente,

$$G_{lc_feed}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_p(z)[1 + G_c(z)]}{1 + G_c(z)G_p(z)}, \tag{154}$$

O también, reemplazando las expresiones de $G_p(z)$ y de $G_c(z)$, la FTLC con acción *feedforward* es la que se muestra a continuación:

$$G_{lc_feed}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{b_1 z^3 + (b_1 K_1 + b_2) z^2 + (b_1 K_2 + b_2 K_1) z + b_2 K_2}{z^4 + a_1 z^3 + (a_2 + b_1 K_1) z^2 + (b_1 K_2 + b_2 K_1) z + b_2 K_2}, \tag{155}$$

Las respuestas para una entrada en escalón y una entrada sinusoidal para el sistema de control de la Figura 45 se muestran a continuación:

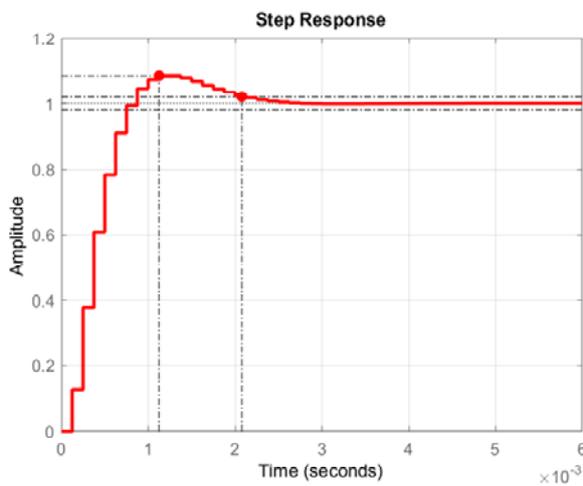


Figura 46 – Respuesta a una entrada en escalón del sistema de la Figura 45 con PD predictivo más acción *feedforward* de la referencia.

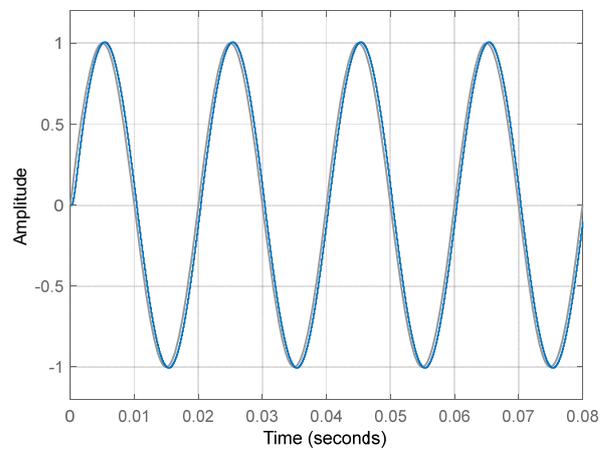


Figura 47 – Respuesta a una entrada sinusoidal del sistema de la Figura 45 con PD predictivo más acción *feedforward* de la referencia.

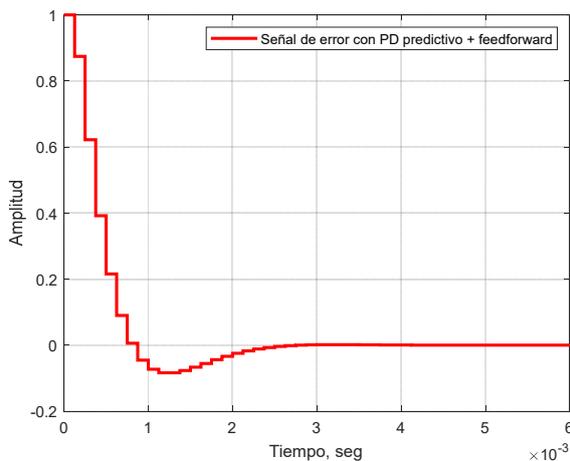


Figura 48 – Señal de error correspondiente al sistema en LC de la Figura 45 para entrada en escalón unitario.

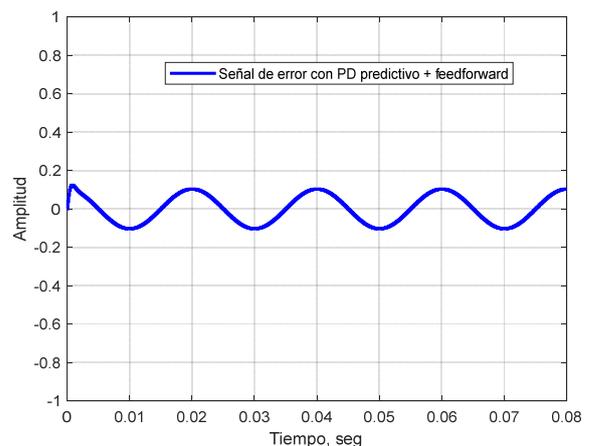


Figura 49 – Señal de error correspondiente al sistema en LC de la Figura 45 para entrada sinusoidal.

Se observa en la respuesta al escalón de la Figura 46, que el sobrepaso resultante es mayor al exigido, el cual resulta en un valor de 8,36 % y el tiempo de asentamiento es de 2,08 ms. Esto muestra como la acción *feedforward* de la referencia afecta el estado transitorio de la señal de salida. No obstante, el error de régimen estacionario de posición se hace cero como se aprecia en la Figura 48.

Para el caso de una entrada sinusoidal de amplitud de pico igual a uno y frecuencia fundamental de 50 Hz, el resultado se muestra en la Figura 47 y la señal de error de seguimiento, en la Figura 49. Se observa que el error no es cero y oscila para este diseño, entre $\pm 0,1$ debido al desfase existente entre la referencia y la señal de salida. Si se analiza la respuesta en frecuencia de lazo cerrado del sistema de la Figura 45, se mide un desfase en la frecuencia fundamental de 50 Hz de casi 6° mientras que la amplificación es muy leve, de apenas 0,055 dB (1,0064).

En los resultados que siguen se muestran las acciones de control para el sistema en LC de la Figura 45, para entrada en escalón unitario, Figura 50, y para entrada sinusoidal de amplitud de pico igual a 1 y frecuencia fundamental de 50 Hz, Figura 51. Para el caso de la referencia en escalón, el controlador PD predictivo actúa durante la etapa transitoria y la acción total se mantiene en el valor unitario correspondiente al efecto de la referencia. Igual comentario puede hacerse de la acción de control para la referencia sinusoidal. La acción que impone el PD predictivo es sinusoidal debido a la variación sinusoidal del error (curva en rojo), y la aplicada a la planta es la suma de la anterior más la acción de la referencia (curva en azul).

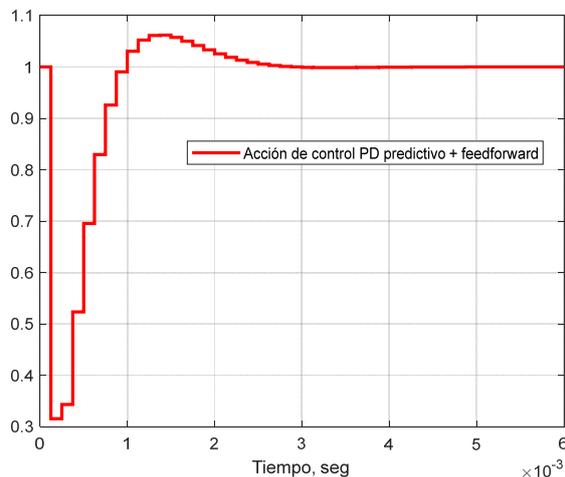


Figura 50 – Acción de control para entrada en escalón unitario del sistema de la Figura 45.

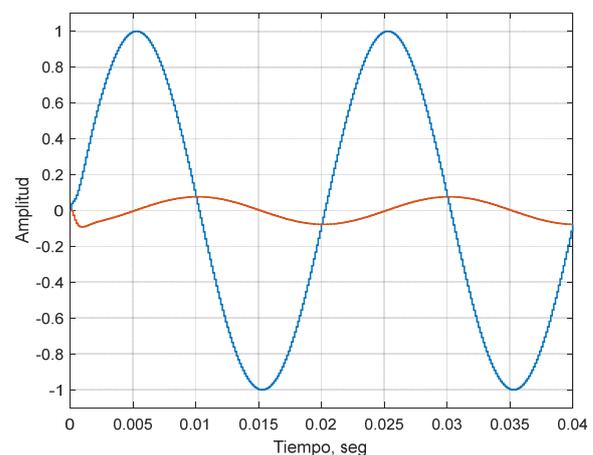


Figura 51 – Acción de control para entrada sinusoidal del sistema de la Figura 45. Acción del PD (—) y acción del PD + referencia (—).

Finalmente, para hacer que se cumplan las especificaciones de régimen transitorio, se realizó un ajuste de la ganancia del compensador PD predictivo usando la herramienta “sisotool” de Matlab, con la cual se obtuvo el siguiente compensador:

$$G_c(z) = -0,73507 \frac{z + 0,08528}{z^2} \quad (156)$$

Sin variar la posición del cero del PD y variando la ganancia K_1 , se obtuvo una respuesta transitoria con un sobrepaso de menos del 2% y un tiempo de asentamiento de 0,96 ms, como se muestra en la Figura 52. La respuesta de salida para referencia sinusoidal no se muestra dado que no varía en nada respecto al caso anterior mostrado en la Figura 47.

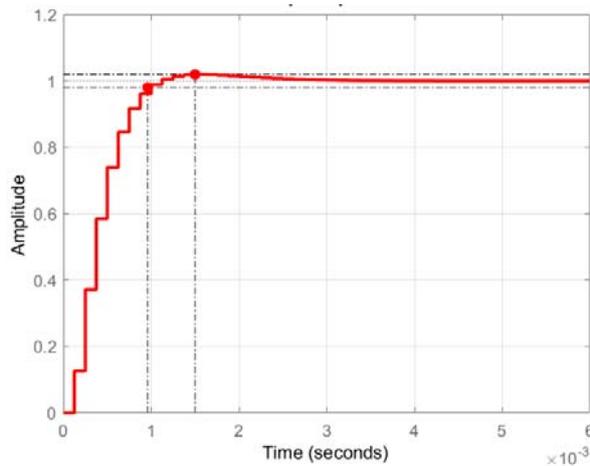


Figura 52 – Respuesta a una entrada en escalón del sistema de la Figura 45 con PD predictivo ajustado por sisotool.

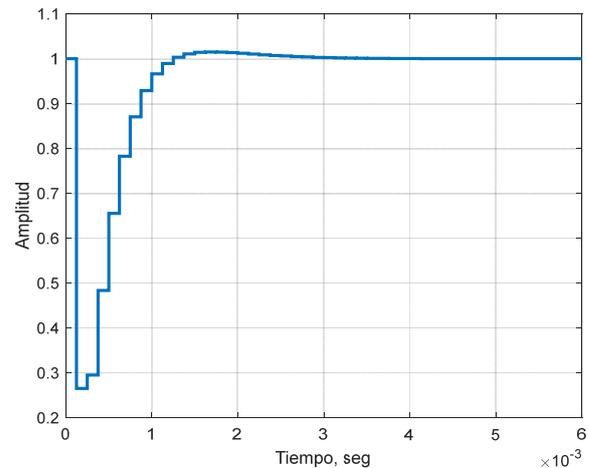


Figura 53 – Acción de control para entrada en escalón unitario del sistema de la Figura 45 con PD predictivo ajustado por sisotool.

Para finalizar, se presenta a continuación la ecuación recursiva a diferencias finitas necesaria para la implementación digital, del PD predictivo ajustado por sisotool más la acción *feedforward* de la referencia:

$$u_{PD_PF}(k) = -0,7351e(k-1) - 0,0627e(k-2) + r(k). \quad (157)$$

Se observa en la última ecuación, que, si se utiliza un dispositivo programable con aritmética de punto fijo con ancho de palabra de 16 bits, pueden implementarse los coeficientes con formato de punto fijo Q_{15} aprovechándose así la máxima resolución del formato para la parte decimal. Los detalles del diseño y las simulaciones hasta aquí presentadas sobre este controlador predictivo, los pueden encontrar en el siguiente script de Matlab “pd_predictivo_apunte.m”. El diseño de las ganancias, se realizó mediante un script de Mathcad denominado “Diseño_PD_Predictivo_Ubicacion_polos.xmcd”.

Para más detalles y análisis sobre este controlador y su aplicación a inversores monofásicos PWM, ejecutar el script “Inversor_monofasico_PD_predictivo.m”

Referencias Bibliográficas

- [1] Charles L. Phillips and H.Troy Nagle, “Digital Control Systems Analysis and Design”, Third Edition, Prentice Hall, 1995.
- [2] Kart J. Aström and Björn Wittenmark, “Computer Controlled Systems, Theory and Design”, Third Edition, Prentice Hall, 1997.
- [3] Benjamín, C. Kuo, “Sistemas de Control Digital”, Segunda edición en Ingles, Primera edición en español, CECSA, 1997.
- [4] Kawamura, A., Haneyoshi, T., Hoft, R. G., “Deadbeat Controlled PWM Inverter with Parameter Estimation Using Only Voltage Sensor”, *IEEE Trans. on Power Electronics*, vol. 3, n. 2, pp. 118 – 125, Apr. 1988.
- [5] Nishida, Y., Haneyoshi, T., “Predictive Instantaneous Value Controlled PWM Inverter for UPS”, *IEEE Power Electronics Specialist Conference*, pp. 776 – 783, 1992;
- [6] C. Rech, H. Pinheiro, H. A. Gründling, H. L. Hey and J. R. Pinheiro, “Comparison of digital control techniques with repetitive integral action for low cost PWM inverters”, *IEEE Trans. on Power Electronics*, vol. 18, pp. 401-410, Jan. 2003.
- [7] J. H. Aylor, R. L. Ramey and G. Cook, “Design and application of a microprocessor PID predictor controller”, *IEEE Trans. on Industrial Electronics and Control Instrumentation*, vol. 27, n. 3, pp. 133 – 137, Aug. 1980.