

3. Diseño de Controladores en el Dominio de Tiempo Discreto

Hasta aquí hemos considerado el diseño de controladores digitales a partir de controladores analógicos, o sea, el controlador digital es obtenido a partir de la aproximación del controlador analógico utilizando alguno de los métodos que se han desarrollado anteriormente. En esta sección vamos a presentar técnicas de diseño fundamentadas directamente en el dominio de tiempo discreto.

A. Controlador *Deadbeat* o de Respuesta de Tiempo Mínimo

Consideremos el sistema discreto que se muestra en la Figura 20 al cual se le aplica una referencia $r(kT) = 1$ para $k \geq 0$, y por tanto, $R(z) = 1/(1 - z^{-1})$,

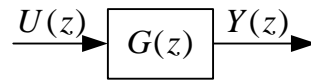


Figura 20 – Sistema discreto a controlar.

La función de transferencia propia del sistema discreto puede ser representada por una relación de polinomios en z como se muestra a continuación,

$$G(z) = \frac{\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} \cdots + \beta_m z^{-m}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} \cdots + \alpha_m z^{-m}}. \quad (49)$$

donde $G(z)$ puede contemplar la ganancia del actuador y del sensor.

El problema consiste en determinar la ley de control $u(kT)$ para el sistema en lazo cerrado de la Figura 21, de modo tal que la salida alcance la referencia (o valor de consigna) en “ m ” pasos o muestras, siendo “ m ” el orden del sistema, y, a partir de la muestra m , se mantenga igual al valor de la referencia en cada instante de muestreo. Esto es, la respuesta en tiempo discreto no puede presentar sobrepaso alguno ni oscilaciones. Para que esto se cumpla, es necesario que la acción de control impuesta sea no limitada. Precisamente, suponiéndose $y(0) = 0$ y siendo que por hipótesis la referencia es unitaria, se desea obtener

$$Y(z) = y(1)z^{-1} + y(2)z^{-2} + \cdots + 1(z^{-m} + z^{-m-1} + \cdots), \quad (50)$$

por tanto, se hace necesario imponer que:

$$u(kT) = u(mT), \text{ para } k \geq m, \quad (51)$$

o sea,

$$U(z) = u(0) + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + \cdots + u(m)(z^{-m} + z^{-m-1} + \cdots). \quad (52)$$

Si dividimos $Y(z)$ por $R(z)$ podremos hallar la función de transferencia en lazo cerrado del sistema en la Figura 21, esto es, $\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{Y(z)(z-1)}{z}$ y, por lo tanto, a partir de la ecuación (50)

podemos escribir:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{y(1) + y(2)z^{-1} + \dots + 1(z^{-m+1} + z^{-m} + \dots) - y(1)z^{-1} - y(2)z^{-2} - \dots - 1(z^{-m} + z^{-m-1} + \dots)}{z}, \quad (53)$$

Agrupando términos se puede escribir la última ecuación de la siguiente forma:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = p_1z^{-1} + p_2z^{-2} + \dots + p_mz^{-m} \triangleq P(z), \quad (54)$$

de la cual comparando con la (53) resulta que,

$$p_1 = y(1), p_2 = y(2) - y(1), \dots, p_m = 1 - y(m-1), \quad (55)$$

Si dividimos ahora $U(z)$ de la ecuación (52) por $R(z)$ obtenemos, operando de forma similar a la (53), la siguiente expresión:

$$\frac{U(z)}{R(z)} = \frac{U(z)(z-1)}{z} = q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2} + \dots + q_mz^{-m} \triangleq Q(z), \quad (56)$$

y de esta última surge que,

$$q_0 = u(0), q_1 = u(1) - u(0), \dots, q_m = u(m) - u(m-1), \quad (57)$$

La estructura resultante del sistema de control de lazo cerrado en tiempo discreto, resulta como se muestra a continuación:

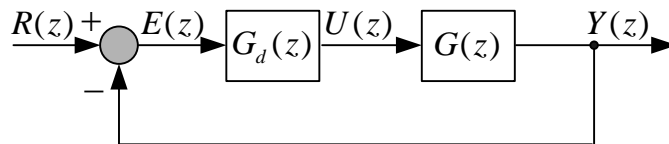


Figura 21 – Estructura resultante del sistema de control de lazo cerrado en tiempo discreto.

De la Figura 21 tenemos que la función de transferencia de lazo cerrado está dada por:

$$G_{lc}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_d(z)G(z)}{1 + G_d(z)G(z)}. \quad (58)$$

También de la Figura 21 se tiene que,

$$U(z) = G_d(z)E(z) = G_d(z)[R(z) - Y(z)]. \quad (59)$$

Adicionalmente, por definición, de (54) y (56), se tiene que

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = P(z) \quad \text{y} \quad \frac{U(z)}{R(z)} = Q(z). \quad (60)$$

Se observa, a partir de las ecuaciones (59) y (60), que si se divide ambos miembros de la (59) por $R(z)$, se obtiene:

$$G_d(z) \frac{R(z) - Y(z)}{R(z)} = Q(z) \rightarrow G_d(z) \left(1 - \frac{Y(z)}{R(z)} \right) = Q(z) \Rightarrow \left[G_d(z) = \frac{Q(z)}{1 - P(z)} \right]. \quad (61)$$

Sustituyéndose $P(z)$ y $Q(z)$, se obtiene la función de transferencia del controlador *deadbeat* en tiempo discreto:

$$G_d(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_m z^{-m}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2} - \dots - p_m z^{-m}}. \quad (62)$$

Por otro lado, de la Figura 21 y de (60), se tiene que,

$$\frac{Y(z)}{R(z)} : \frac{U(z)}{R(z)} = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)} = G(z) \quad (63)$$

y teniéndose en cuenta la (49), (54) y (56), se llega a la siguiente igualdad:

$$G(z) = \frac{\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_m z^{-m}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots + \alpha_m z^{-m}} = \frac{p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_m z^{-m}}{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_m z^{-m}}, \quad (64)$$

o también, dividiéndose el numerador y el denominador de la última relación por q_0 , resulta

$$G(z) = \frac{\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_m z^{-m}}{1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots + \alpha_m z^{-m}} = \frac{(p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_m z^{-m}) / q_0}{1 + (q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2} + \dots + q_m z^{-m}) / q_0}. \quad (65)$$

Nótese de la (55) que

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1, \text{ o sea que, } \frac{p_1}{q_0} + \frac{p_2}{q_0} + \dots + \frac{p_m}{q_0} = \frac{1}{q_0}, \quad (66)$$

y por lo tanto, de (65) se tiene que:

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m = \frac{1}{q_0} \Rightarrow q_0 = \frac{1}{\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m}. \quad (67)$$

En lo que hace a los demás parámetros del controlador, los mismos se obtienen fácilmente por comparación de los numeradores y denominadores de las funciones de transferencia en (65),

$$q_1 = q_0 \alpha_1, \quad q_2 = q_0 \alpha_2, \dots, \quad q_m = q_0 \alpha_m, \quad (68)$$

$$p_1 = q_0 \beta_1, \quad p_2 = q_0 \beta_2, \dots, \quad p_m = q_0 \beta_m. \quad (69)$$

De esta forma quedan definidos todos los parámetros del controlador *deadbeat*. Es importante notar que la función de transferencia en lazo cerrado, a partir de (54) y (58), resulta:

$$G_{lc}(z) = \frac{G_d(z)G(z)}{1 + G_d(z)G(z)} = \frac{Y(z)}{R(z)} = P(z) = p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_m z^{-m}, \quad (70)$$

o también, multiplicando y dividiendo $P(z)$ por z^m , $G_{lc}(z)$ resulta:

$$G_{lc}(z) = \frac{p_1 z^{m-1} + p_2 z^{m-2} + \dots + p_m}{z^m}, \quad (71)$$

o sea, la ecuación característica posee “ m ” polos al origen del plano z . Se puede decir entonces que el controlador *deadbeat* es un controlador por ubicación de polos al origen del plano- z , o también, que es un controlador que reubica m polos al origen del plano- z y así conseguir una respuesta al escalón de tiempo mínimo.

Ejemplo: Sea el sistema a controlar descrito por la siguiente función de transferencia,

$$G(s) = \frac{200}{(s+3)(s+10)^2} \quad (72)$$

Si se traza la respuesta al escalón unitario del proceso en lazo cerrado con realimentación unitaria, dado en la ecuación (72), se obtiene el comportamiento que se observa en la Figura 22, en la cual puede apreciarse que la misma presenta un pequeño sobrepaso de aproximadamente un 3%; un tiempo de asentamiento de 1,04 segundos; un tiempo de subida de 0,4 segundos y además un importante error de régimen estacionario del 60%. Se desea entonces, que la salida digital de este proceso, ante una entrada en escalón unitaria $r(kT) = 1$ para $k \geq 0$, presente una respuesta sin ningún sobrepaso y que alcance el valor de la referencia en el menor tiempo posible.

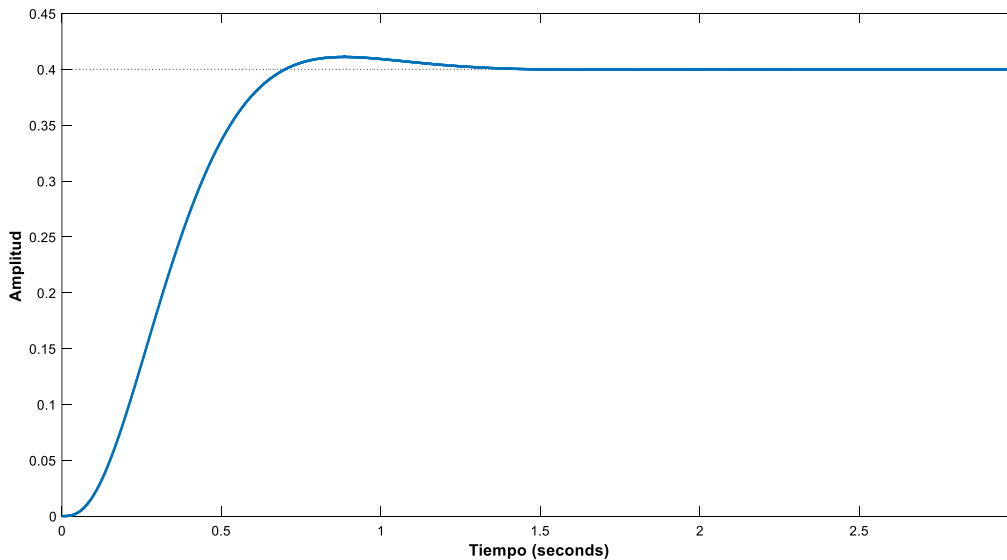


Figura 22 – Respuesta en lazo cerrado del proceso dado por (72) para una entrada en escalón unitario.

Muestreando este proceso con $T = 0,2$ seg., resulta la siguiente función de transferencia:

$$G(z) = \frac{0,091z^2 + 0,125z + 0,009}{z^3 - 0,819z^2 + 0,167z - 0,01} \quad (73)$$

De (67), (68) y (69) obtenemos los parámetros del controlador *deadbeat*, como sigue:

$$q_0 = \frac{1}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} = \frac{1}{0,091 + 0,125 + 0,009} = 4,444, \quad q_1 = q_0\alpha_1 = 4,444 \times (-0,819) = -3,64$$

$$q_2 = q_0\alpha_2 = 4,444 \times 0,167 = 0,742, \quad q_3 = q_0\alpha_3 = 4,444 \times (-0,01) = -0,044,$$

$$p_1 = q_0\beta_1 = 4,444 \times 0,091 = 0,404, \quad p_2 = q_0\beta_2 = 4,444 \times 0,125 = 0,556,$$

$$p_3 = q_0\beta_3 = 4,444 \times 0,009 = 0,04.$$

Obtenidos los parámetros del controlador, la función de transferencia del mismo resulta:

$$G_d(z) = \frac{4,444 - 3,64z^{-1} + 0,742z^{-2} - 0,044z^{-3}}{1 - 0,404z^{-1} - 0,556z^{-2} - 0,04z^{-3}} = \frac{U(z)}{E(z)}. \quad (74)$$

Por lo tanto, efectuando la transformada Z inversa de la función de transferencia (74), se obtiene la ecuación a diferencias que el procesador digital debe efectuar:

$$u(k) = 0,404u(k-1) + 0,554u(k-2) + 0,04u(k-3) + 4,444e(k) - 3,64e(k-1) + 0,742e(k-2) - 0,044e(k-3). \quad (75)$$

En general, la ecuación a diferencias de la acción de control *deadbeat* para un proceso de grado “*m*”, resulta:

$$u(k) = p_1 u(k-1) + p_2 u(k-2) + \dots + p_m u(k-m) + q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) + \dots + q_m e(k-m). \quad (76)$$

En cuanto a la función de transferencia en lazo cerrado del ejemplo presentado, la misma resulta:

$$G_{ic}(z) = P(z) = 0,404z^{-1} + 0,556z^{-2} + 0,04z^{-3}. \quad (77)$$

A continuación, se grafican, utilizando Matlab, la salida $y(k)$ y la señal de control $u(k)$.

A partir de la ecuación (77), se obtienen los siguientes valores de la salida en tiempo discreto, los cuales se muestran graficados en la Figura 23:

$$y(0) = 0; y(1) = 0,404; y(2) = y(1) + 0,556 = 0,96; y(3) = y(2) + 0,04 = 1; y(4) = y(3) + 0 = 1 \dots$$

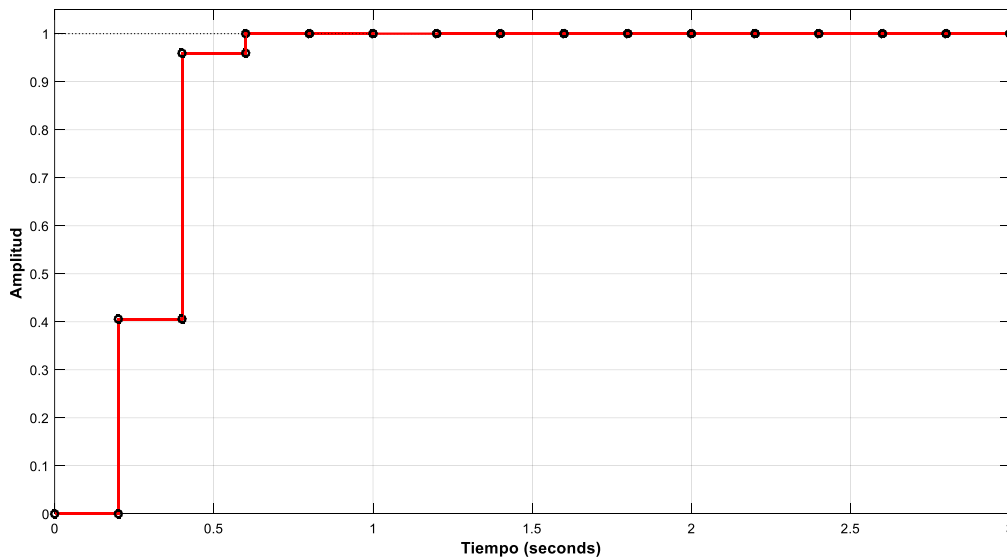


Figura 23 – Señal de Salida $y(kT)$ para una entrada en escalón unitario. $T = 0,2$ seg.

De la ecuación (75) pueden obtenerse los valores numéricos para el trazado de la acción de control aplicada a la planta:

$$u(0) = q_0 = 4,444; u(1) = u(0) + q_1 = 4,444 - 3,64 = 0,804;$$

$$u(2) = u(1) + q_2 = 0,804 + 0,742 = 1,546;$$

$$u(3) = u(2) + q_3 = 1,546 - 0,044 = 1,502$$

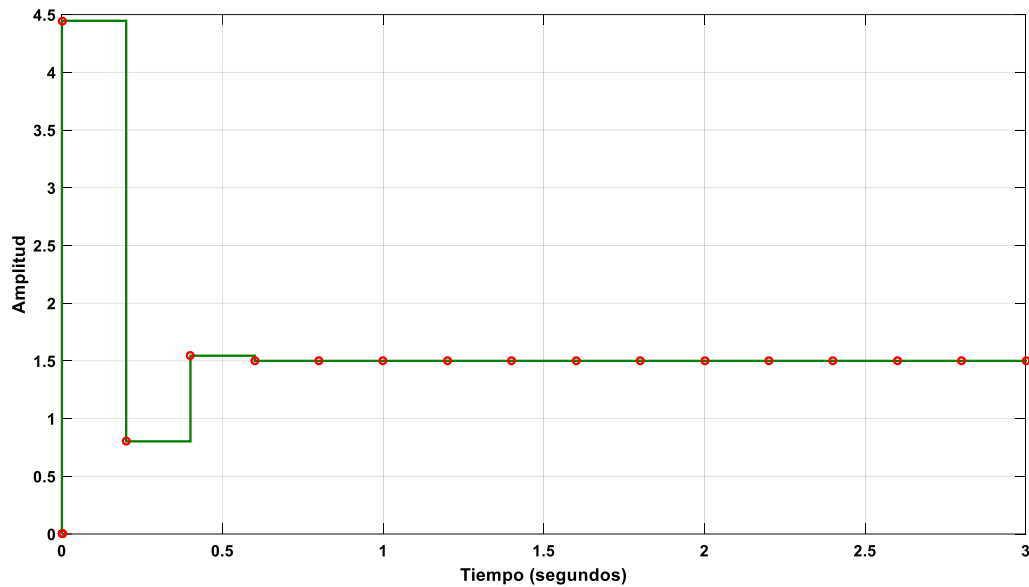


Figura 24 – Señal de control $u(kT)$ para una estrada en escalón unitario. $T = 0,2$ seg.

Siendo la señal de error en tiempo discreto definida como $e(kT) = r(kT) - y(kT)$, se tienen los siguientes valores para el trazado de dicha respuesta, que se muestra en la Figura 25:

$$e(0) = r(0) - y(0) = 1; \quad e(1) = r(1) - y(1) = 1 - 0,404 = 0,596; \quad e(2) = r(2) - y(2) = 1 - 0,96 = 0,04; \\ e(3) = r(3) - y(3) = 1 - 1 = 0; \quad e(4) = r(4) - y(4) = 1 - 1 = 0 \dots$$

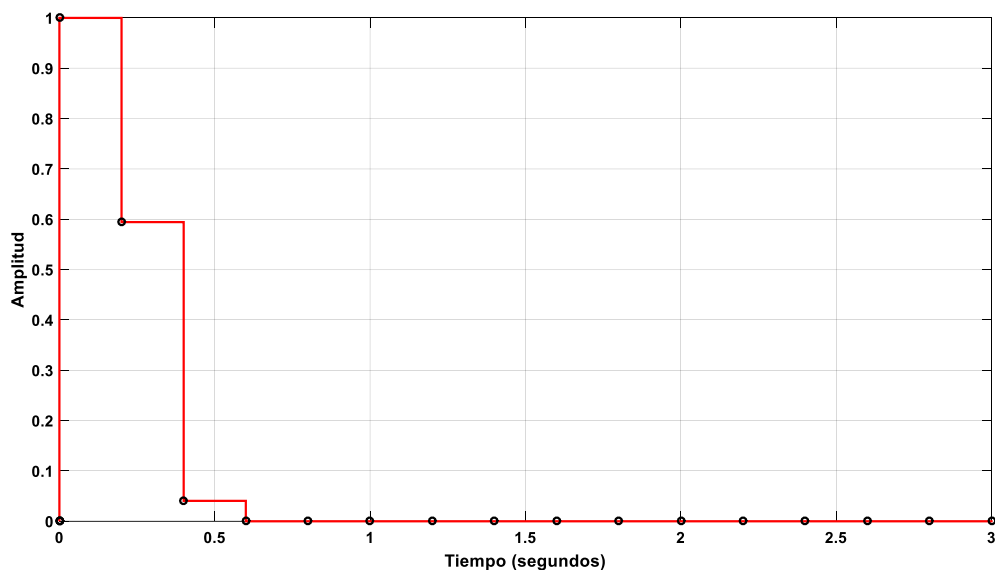


Figura 25 – Señal de error $e(kT)$ para una estrada en escalón unitario. $T = 0,2$ seg.

A continuación, en la Figura 26, se puede observar la comparación de las respuestas temporales para una entrada en escalón, del proceso en lazo cerrado en tiempo continuo, (gráfica en azul) y del mismo proceso en lazo cerrado con un controlador *deadbeat*. Es posible apreciar como para el periodo de muestreo elegido, los tiempos de subida y de asentamiento se redujeron, a 0,3 segundos y 0,5 segundos respectivamente; además de que la respuesta no presenta sobrepaso alguno y el error de régimen estacionario es nulo a partir de la tercera muestra.

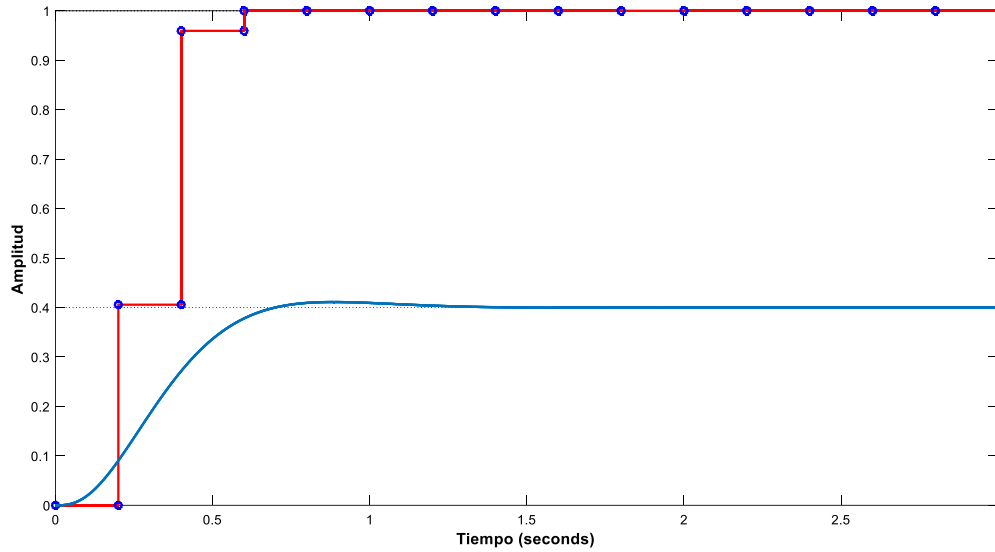


Figura 26 – Comparación de la señal $y(t)$ e $y(kT)$ del proceso dado por (72), en lazo cerrado para una entrada en escalón unitario. $T = 0,2$ seg.

Si ahora muestreamos nuestra función de transferencia con $T = 0,02$ seg., la misma resulta:

$$G(z) = \frac{0,0002379 z^2 + 0,0008488 z + 0,000189}{z^3 - 2,579 z^2 + 2,212 z - 0,6313} \tag{78}$$

lo que da como resultado un parámetro q_0 con un valor elevado, como se muestra a continuación,

$$q_0 = \frac{1}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} = \frac{1}{0,0002379 + 0,0008488 + 0,000189} = 784,$$

y este valor elevado de q_0 retorna valores elevados de q_1 , q_2 y q_3 . Veamos qué sucede con la salida del sistema ante una entrada en escalón unitaria y que pasa con la señal de control.

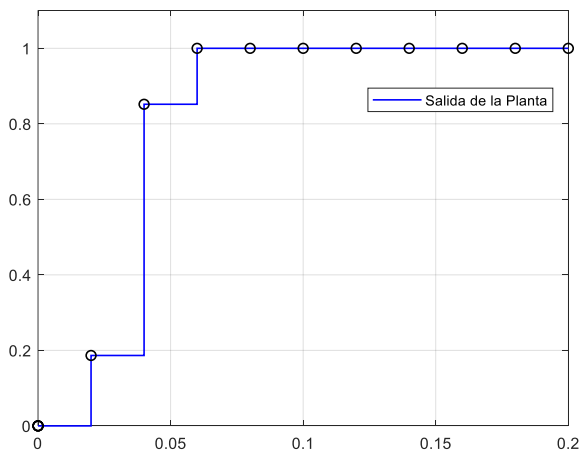


Figura 27 – Señal de Salida $y(kT)$ para una entrada en escalón unitario. $T = 0,02$ seg.

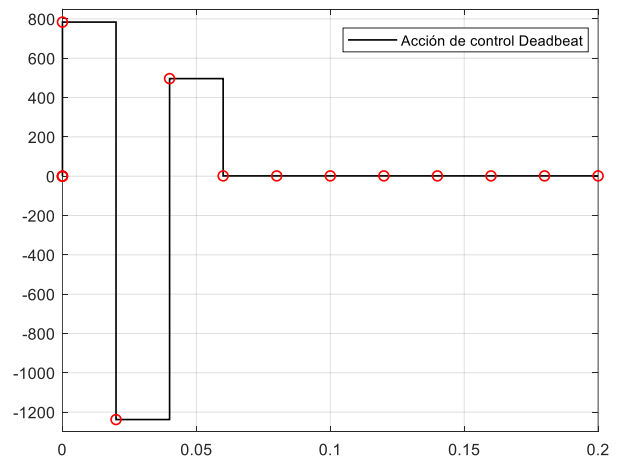


Figura 28 – Señal de control $u(kT)$. $T = 0,02$ seg.

Como se muestra en la Figura 28, se observa que la señal de control, presenta valores iniciales muy elevados, tanto positivos como negativos, y con toda seguridad, habrá una saturación del actuador. De esta situación podemos inferir que, debido a las limitaciones físicas

que posee cualquier sistema real, no se puede imponer cualquier función de transferencia en lazo cerrado. Entonces, como la energía de la señal de control depende básicamente del periodo de muestreo usado en el diseño, el periodo de muestreo para controladores *deadbeat* se puede obtener a través de la siguiente relación [2]: $\frac{T}{T_{95}} \geq 0,2$ donde T_{95} es el tiempo de establecimiento t_s con criterio del 5%. Podemos concluir que esta técnica es fuertemente dependiente de los parámetros de la planta y su ley de control resulta con ganancias elevadas, lo que debe ser tenido en cuenta al momento de efectuar la implementación práctica, para evitar saturación de los actuadores.