



Universidad Nacional de Misiones



---

# SISTEMAS DE CONTROL 2

---

Profesor: Fernando Botterón

Ingeniería Electrónica

Facultad de Ingeniería - U.Na.M

## Temas de la Unidad 4

### Tema 4: Diseño de Controladores en el Dominio de Tiempo Discreto

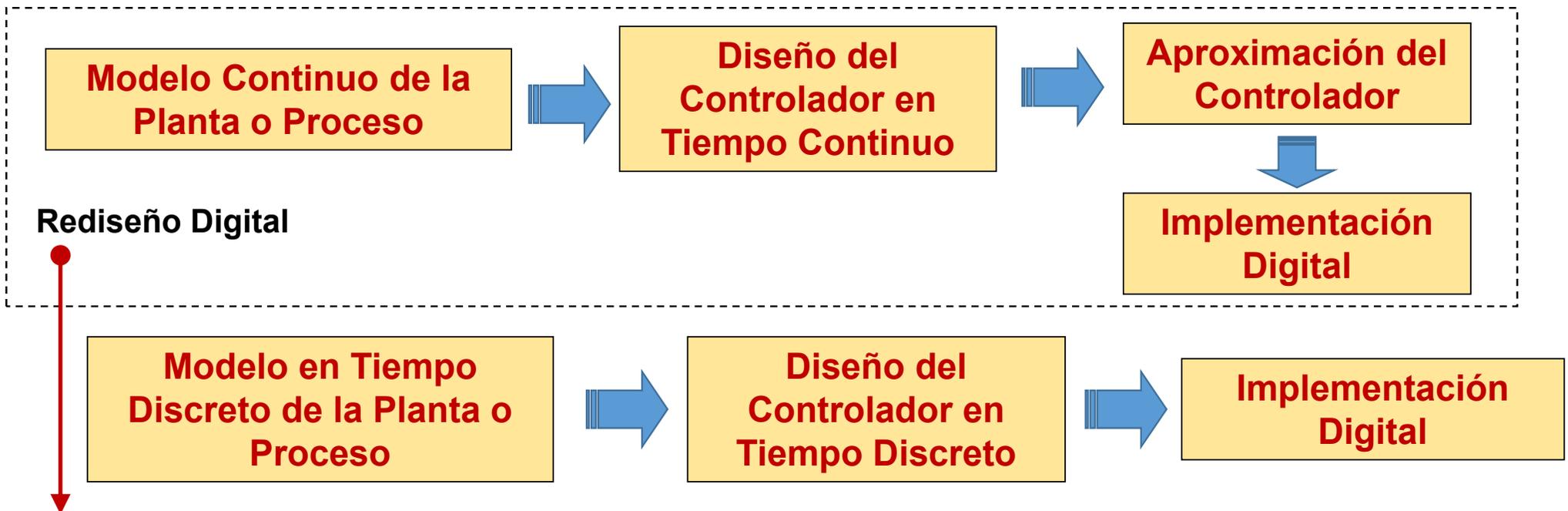
- ✓ Aspectos del Diseño de Controladores en Tiempo Discreto.
- ✓ Rediseño Digital.
- ✓ Diseño de Controladores Discretos por el Método del LGR.
- ✓ Técnica de Compensación del Retenedor de Orden Cero (ZOH)
- ✓ Ejemplos de Diseño en cada caso.
- ✓ Aspectos de la implementación digital de controladores.
- ✓ Errores de régimen estacionario para diferentes tipos de entrada.

# Aspectos del Diseño de Controladores en Tiempo Discreto

*Obtención del Modelo Nominal de la Planta o Proceso*

MODELOS EN TIEMPO CONTINUO

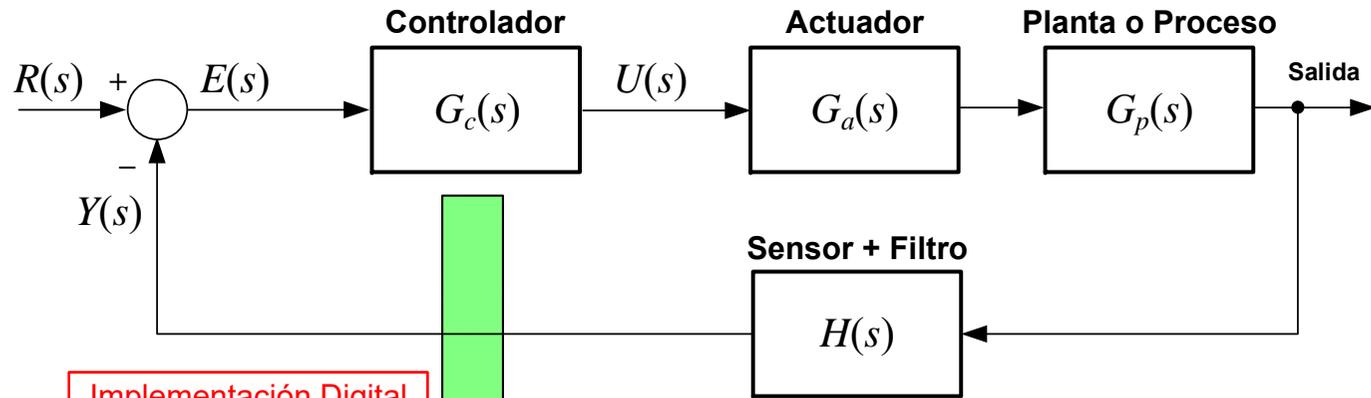
MODELOS EN TIEMPO DISCRETO



DESVENTAJA: El diseño del controlador no permite incluir el atraso de transporte " $T_d$ " ocasionado por la digitalización de la salida de la planta y el cálculo de la acción de control.

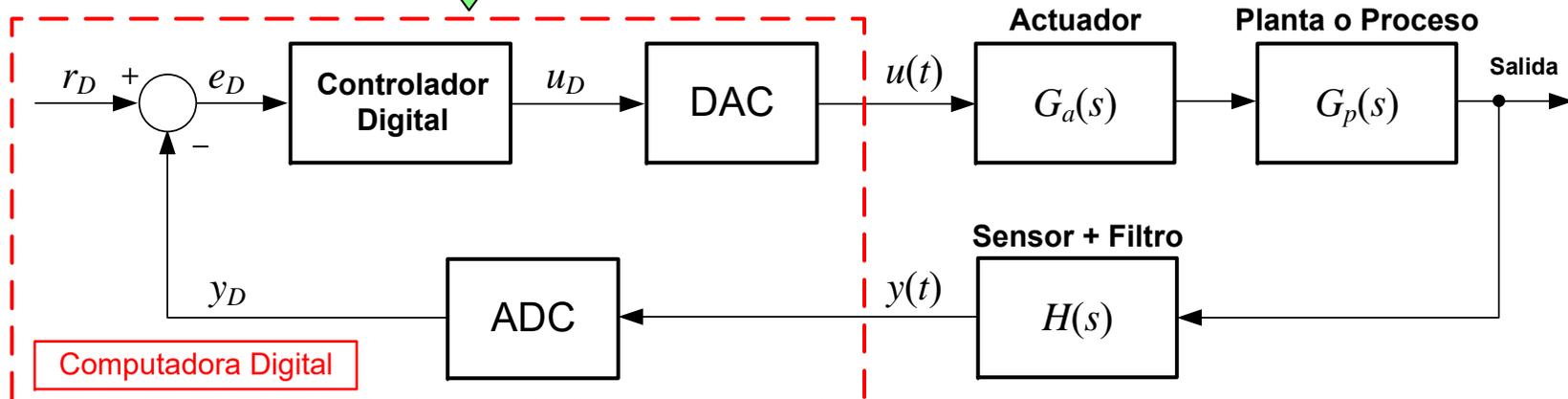
# Controladores de Tiempo Continuo Discretizados o Aproximados

**VENTAJA:** Es más fácil seleccionar el periodo de muestreo necesario para la implementación digital.



Implementación Digital

**DESVENTAJA:** No incluye el atraso de transporte de la implementación digital



Computadora Digital

## Rediseño Digital

✓ **Planta o Proceso en Tiempo Continuo**

✓ **Controladores de Tiempo Continuo:**

⇒ Proporcional (P);

⇒ Proporcional + Integral (PI);

⇒ Proporcional + Derivativo (PD) y

⇒ Proporcional + Integral + Derivativo (PID)

⇒ Redes de Atraso o de Adelanto y de Atraso-Adelanto de Fase

*Aproximación de la Función de Transferencia del Controlador en Tiempo Continuo*

- Aproximaciones de Euler: *Forward o Backward*
- Aproximación invariante al escalón (ZOH)
- Transformación Bilineal o de *Tustin*.

# Aproximación en Tiempo Discreto de Controladores Clásicos

La FT de los controladores continuos se puede aproximar haciendo:  $G_c(s) \approx G_c(z)|_{s=\text{aprox.}}$

## PD:

$$G_c(s) = K_p + K_d s$$

Backward:

$$s \approx (z-1)/(zT)$$

Forward:

$$s \approx (z-1)/T$$

FT en Z:

$$G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K \frac{(z-a)}{z}$$

$$G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K(z+a)$$

Ecuaciones Recursivas:

$$u(k) = K e(k) - aK e(k-1)$$

$$u(k) = K e(k+1) + aK e(k)$$

$$K = (K_d + K_p T) / T \quad a = K_d / (K T)$$

**NO CAUSAL:** La salida depende de un valor futuro de la entrada.

## PI:

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

Backward:

$$s \approx (z-1)/(zT)$$

Forward:

$$s \approx (z-1)/T$$

FT en Z:

$$G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K \frac{(z-a)}{(z-1)}$$

$$G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K \frac{(z-a)}{(z-1)}$$

Ecuaciones Recursivas:

$$u(k) = u(k-1) + K e(k) - aK e(k-1)$$

$$u(k) = u(k-1) + K e(k) - aK e(k-1)$$

$$K = (K_p + K_i T) \quad a = K_p / K$$

$$K = K_p \quad a = (K_p - K_i T) / K$$

## PID:

$$G_c(s) = (1 + K_d) \left( K_p + \frac{K_i}{s} \right)$$

Parte "PD" – Backward:

$$s \approx (z-1)/(zT)$$

Parte "PI" – Tustin:

$$s \approx (2/T) \times [(z-1)/(z+1)]$$

FT en Z:

$$G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K \frac{(z-a)(z-b)}{z(z-1)}$$

Ecuaciones Recursivas:

$$u(k) = u(k-1) + K e(k) - (a+b)K e(k-1) + abK e(k-2)$$

$$K = (2K_p + K_i T)(K_d + 1) / (2T) \quad a = K_d / (K_d + T)$$

$$b = (2K_p - K_i T) / (2K_p + K_i T)$$

## Ad. y At. de Fase:

$$G_c(s) = K_1 \frac{(s+a_1)}{(s+b_1)} \quad \begin{array}{l} \text{si } |a_1| < |b_1| \Rightarrow \text{Ad.F} \\ \text{si } |a_1| > |b_1| \Rightarrow \text{At.F} \end{array}$$

Backward:

$$s \approx \frac{(z-1)}{(zT)}$$

FT en Z:

$$G_c(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K \frac{(z-a)}{(z-b)}$$

Ecuaciones Recursivas:

$$u(k) = bu(k-1) + K e(k) - aK e(k-1)$$

$$K = K_1(1+a_1T) / (1+b_1T)$$

$$a = (1+a_1T) \quad b = (1+b_1T)$$

## Ejemplo de Diseño

### Ejemplo 1: Rediseño Digital

$$G_p(s) = \frac{1080}{s(s+6)(s+18)}$$

Sea la planta  $G_p(s)$ , representada por su FT, la cual incorpora la ganancia del actuador. Mediante el **Rediseño Digital**, obtener la **FT aproximada por Backward** de un controlador PD diseñado en tiempo continuo y, a continuación, **la ecuación recursiva a diferencias finitas** para su implementación digital.

Las especificaciones de diseño para la respuesta al escalón en LC son:  $e_{ssp} = 0$ ,  $M_p \leq 10\%$  y  $t_s \leq 1s$ .

#### ❖ Diseño del controlador en tiempo continuo:

Aplicando el método del LGR se obtiene el siguiente controlador PD:

$$G_c(s) = K_p + K_d s = 0,6593 + 0,1s$$

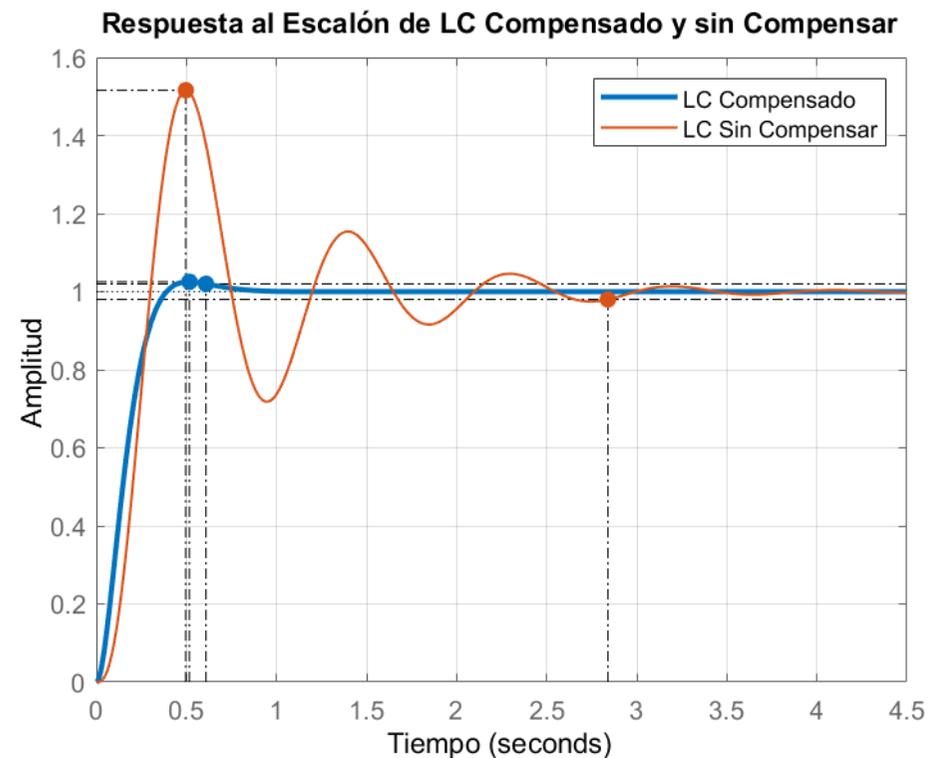
La respuesta del sistema a LC con el controlador PD se muestra en la figura y presenta las siguientes especificaciones:

$$t_s = 0,609s$$

$$t_r = 0,24s$$

$$M_p = 2,52\%$$

$$e_{ssp} = 0$$



## Ejemplo de Diseño

### Ejemplo 1: Rediseño Digital

#### ❖ Determinación y verificación del periodo de muestreo:

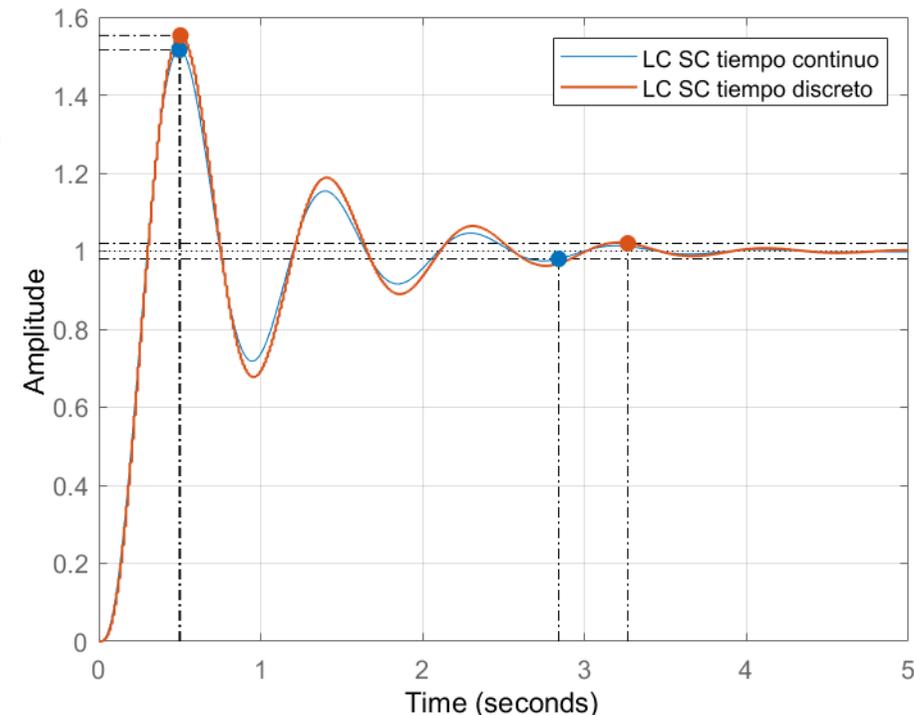
De la respuesta a LC compensada se tiene que el tiempo de subida es de 0,24 segundos, por lo que considerando un número de muestras igual a 20, dado que la planta tiene muy poca estabilidad relativa, se tiene que el periodo de muestreo resulta:

$$T = \frac{t_r}{N_r} \quad \text{o sea, } T = \frac{0,24 \text{ s}}{20} = 12 \text{ ms} \Rightarrow f_m = \frac{1}{T} = 83,3333 \text{ Hz}$$

A modo de verificación, utilizándose la aproximación invariante al escalón se obtiene la FT de la planta en tiempo discreto:

$$G_{pd}(z) = \frac{0,00028966(z + 3,476)(z + 0,2491)}{(z - 1)(z - 0,9305)(z - 0,8057)}$$

Para verificar si el periodo  $T$  seleccionado es adecuado, se grafica la respuesta al escalón para ambos sistemas a LC sin la compensación, que es el peor caso:



Como se aprecia, la respuesta del sistema muestreado "sigue con buena aproximación" a la respuesta del sistema en tiempo continuo. Por lo cual el valor del periodo  $T$  resulta adecuado.

# Ejemplo de Diseño

## Ejemplo 1: Rediseño Digital

### ❖ Aproximación del controlador:

El controlador PD obtenido a través de la aproximación *Backward* posee la siguiente estructura:

$$G_{cd}(z) = K_c \frac{(z - z_{PD})}{z}; \quad K_c = \frac{(K_p T + K_d)}{T} \quad z_{PD} = \frac{K_d}{(K_p T + K_d)}$$

Considerando los valores de  $K_p$ ,  $K_d$  y  $T$ , el controlador aproximado resulta:

$$K_c = 8,9926$$

$$z_{PD} = 0,9267 \text{ r/s}$$

$$G_{cd}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{8,9926(z - 0,9267)}{z}$$

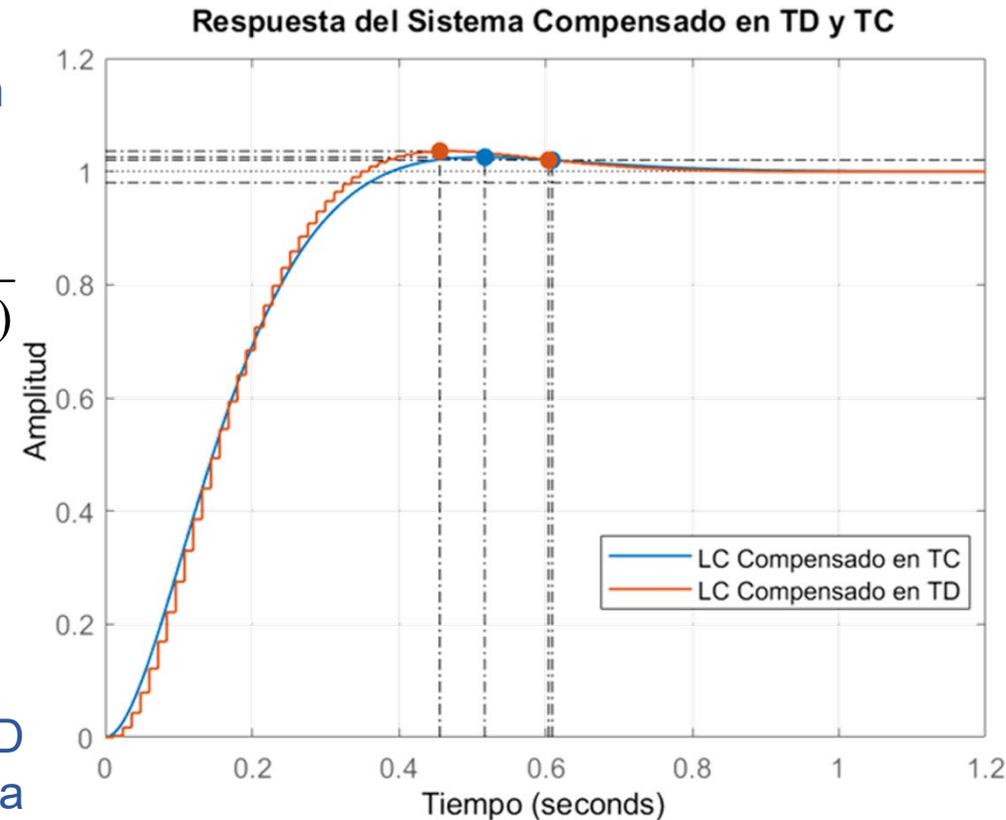
La respuesta del sistema a LC con el controlador PD aproximado en tiempo discreto y la correlativa respuesta en tiempo continuo, se muestran en la figura y presenta las siguientes especificaciones:

$$t_r = 0,218 \text{ s}$$

$$t_s = 0,604 \text{ s}$$

$$M_p = 3,6\%$$

$$e_{ssp} = 0$$

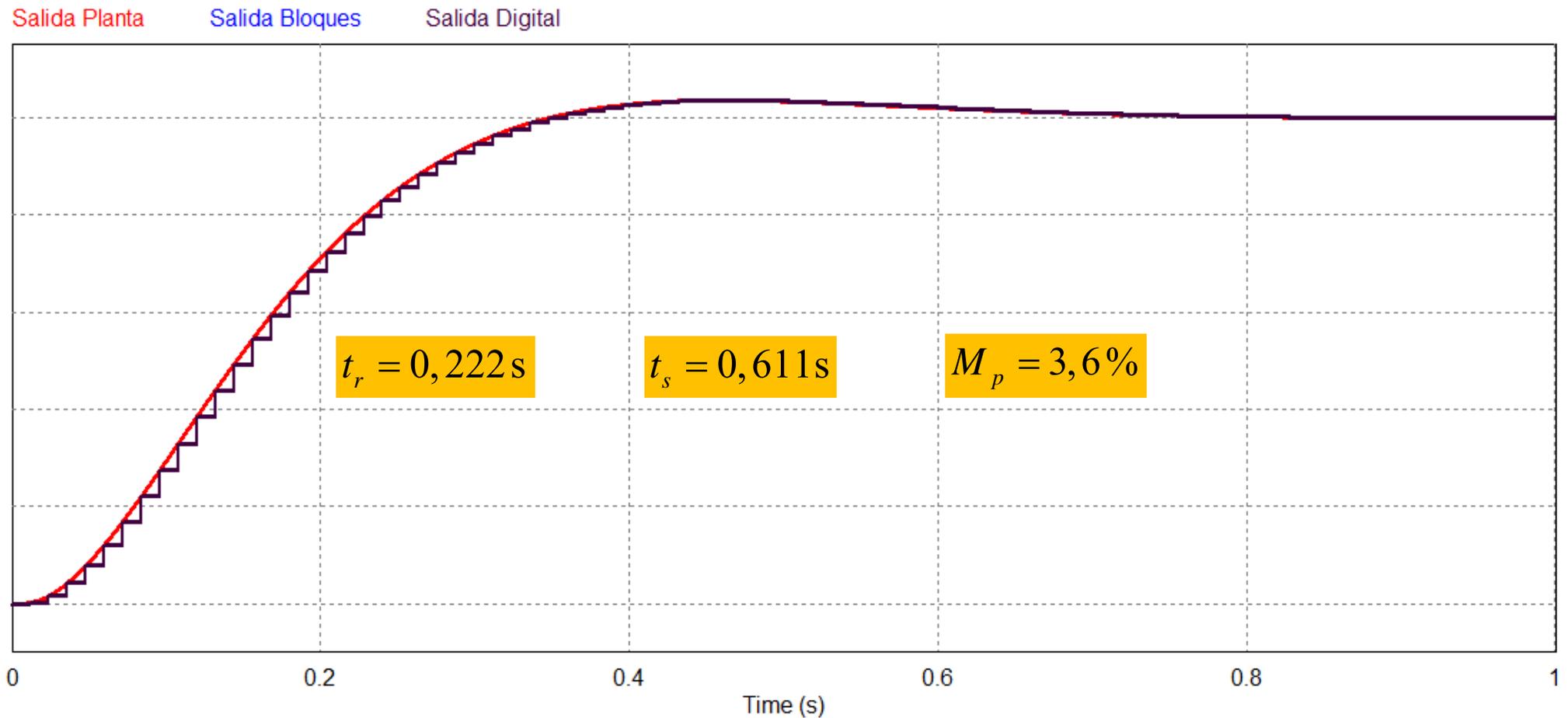


Debido a la presencia del ZOH se mejoran los tiempos de subida y de asentamiento, pero aumenta el sobrepaso.

# Ejemplo de Diseño

## Ejemplo 1: Rediseño Digital

Validación del diseño realizado en PSIM. Respuesta al escalón obtenida con la implementación digital mediante bloque DLL y mediante el diagrama de bloques de control.

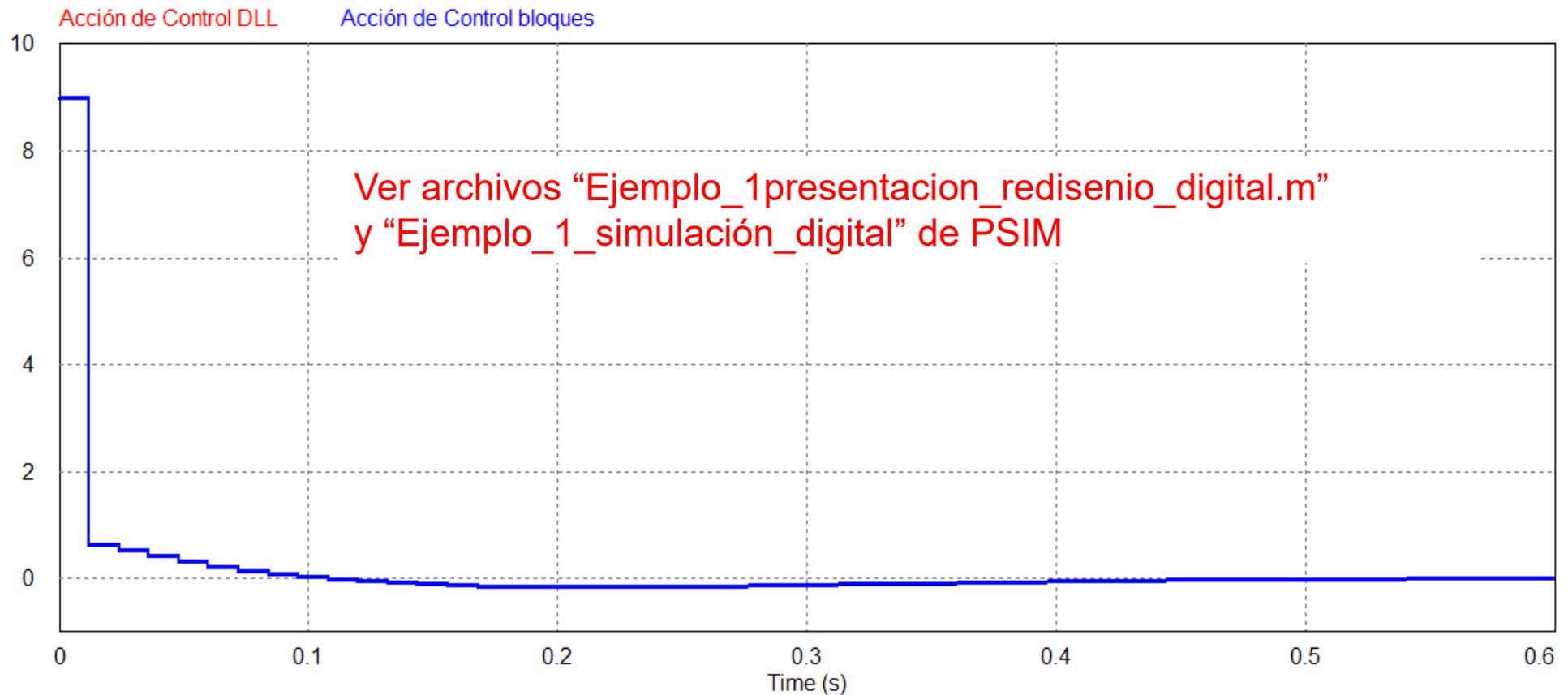


## Ejemplo de Diseño

### Ejemplo 1: Rediseño Digital

A partir de la FT aproximada del controlador, la ecuación recursiva del controlador para su implementación digital, se obtiene aplicándose la transformada Z inversa.

$$u_{PD}(k) = K_c e(k) - z_{PD} K_c e(k-1) \Rightarrow u(k) = 8,9926 e(k) - 8,3333 e(k-1)$$



# Diseño de Controladores con el Modelo en Tiempo Discreto

*El Modelo en Tiempo Discreto puede estar dado por*

**Modelo Muestreado Representado por su Función de Transferencia**

$$G_p(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 + b_2 z^{-1}}{z + a_1 + a_2 z^{-1}}$$

**Modelo Muestreado Representado en el Espacio de Estado**

$$\begin{bmatrix} v_o(k+1) \\ i_L(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_o(k) \\ i_L(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} i_o(k)$$

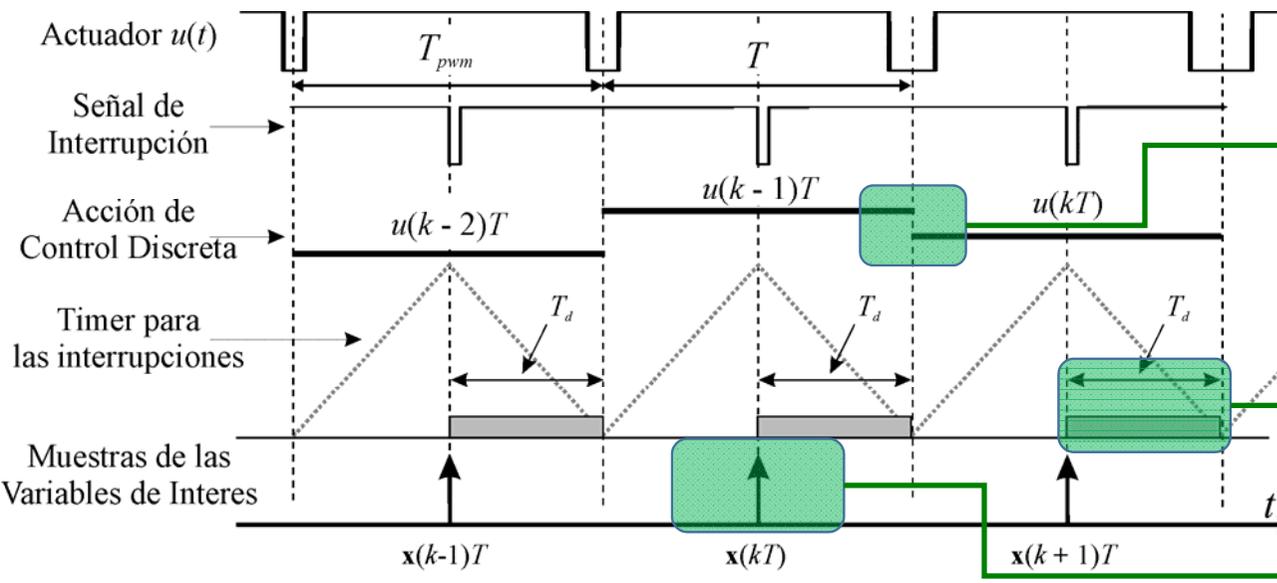
**DESVENTAJA que Presenta**

No siempre la frecuencia de muestreo seleccionada es la adecuada para cumplir con las exigencias que han sido oportunamente indicadas.

# Diseño de Controladores con el Modelo en Tiempo Discreto

## VENTAJAS EN EL USO DEL MODELO de TIEMPO DISCRETO

- Permite incorporar de diferentes formas el atraso de la implementación digital, y en función de esto...
- El controlador modelado resulta en la forma y orden adecuados para su implementación.
- Resulta fácil la implementación de sistemas con múltiples lazos y diferentes frecuencias de muestreo
- Puede modelarse el controlador en función de cómo se realizará la actualización de la acción de control.



Instante en el cual se realiza la actualización de la acción de control

Se incorporan tiempo de atraso de la implementación digital

Se obtiene el controlador según el instante y estrategia de muestro de las variables a controlar.

## Controladores que pueden implementarse a partir del modelo en Tiempo Discreto

- ⇒ Proporcional (P);
  - ⇒ Proporcional + Integral (PI);
  - ⇒ Proporcional + Derivativo (PD);
  - ⇒ Proporcional + Integral + Derivativo (PID);
- Con Acción Predictiva**
- ⇒ Con Respuesta de Tiempo Mínimo *Deadbeat* (por FT o en Espacio de Estados);
  - ⇒ Regulador Lineal Cuadrático Discreto (Energía Mínima) (Espacio de Estados);
  - ⇒ Servo Controlador con Realimentación de Estados;
  - ⇒ Principio del Modelo Interno (por F.T o en Espacio de Estados);
  - ⇒ Controladores Adaptativos con o sin Identificación Paramétrica;
  - ⇒ Observadores de Estados (de Orden Completa u Orden Reducida);
  - ⇒ Sistemas de control con múltiples lazos y diferentes frecuencias de muestreo.

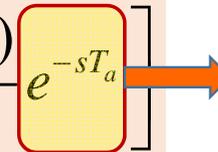
# Diseño de Controladores con el Modelo en Tiempo Discreto

$$G_p(z) = \frac{(z - a)}{z(z^3 - bz^2 - cz - d)}$$

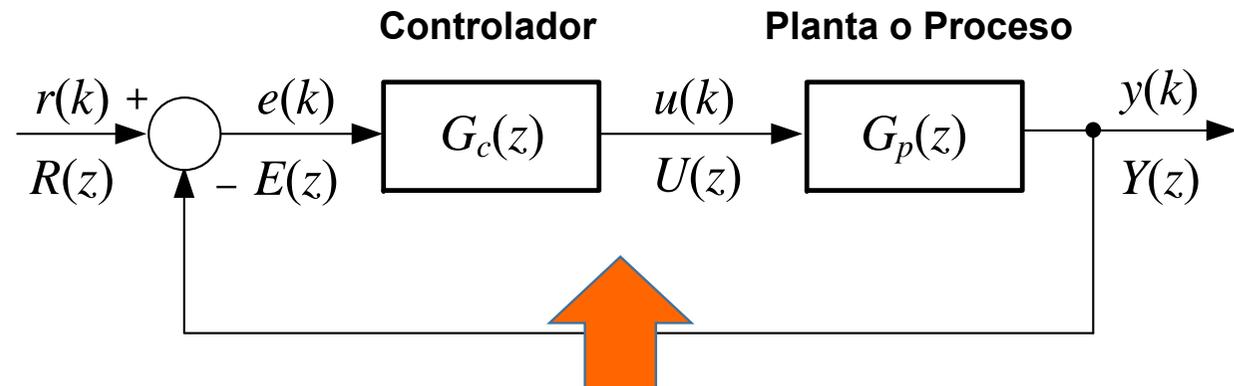


Se incorpora un periodo  $T$  de atraso que tiene en cuenta el tiempo de implementación  $T_a$

$$G_p(z) = \frac{(1 - z^{-1})}{T} Z \left[ \frac{G_p(s)}{s} e^{-sT_a} \right]$$



Puede modelarse un tiempo de atraso de implementación  $T_a$  para que no sea necesariamente un periodo entero de muestreo.



Se lleva todo el diseño y el análisis del sistema de control al dominio del tiempo discreto en el plano-z

# Diseño de Controladores en el Dominio de Tiempo Discreto

- ❖ Cancelación Polo-Cero: Uno de los ceros del controlador puede cancelar el polo dominante de la planta. Siendo este polo aquel que se encuentre más próximo al círculo unitario en el eje real positivo.
- ❖ Método de Reubicación de Polos: Ídem sistemas de control continuo, pero en el plano-z.
- ❖ Método del Lugar Geométrico de las Raíces: Ídem sistemas de control continuo, pero en el plano-z.

Sea el polinomio característico de la FTLC discreta, con una FTLA propia:

$$P(z) = 1 + G_{la}(z) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{Kq(z+z_1)(z+z_2)\cdots(z+z_m)}{(z+p_1)(z+p_2)\cdots(z+p_n)} = 0$$

Si el punto “ $z_0$ ” pertenece al LGR, la expresión anterior resulta:

$$\frac{q(z_0+z_1)(z_0+z_2)\cdots(z_0+z_m)}{(z_0+p_1)(z_0+p_2)\cdots(z_0+p_n)} = -\frac{1}{K}$$

Condición de Magnitud (CM)

Condición de Fase (CF)

A partir de la anterior, en forma general las condiciones de Fase y Magnitud quedan:

$$\frac{|q| \cdot \prod_m |\overline{Vz_j}|}{\prod_n |\overline{Vp_k}|} = \left| -\frac{1}{K} \right|$$

$$\angle q + \sum_m \theta_j - \sum_n \phi_k = \begin{cases} \pm \pi(2i+1) & \text{si } K > 0 \\ \pm \pi(2i) & \text{si } K < 0 \end{cases}$$

con  $i = 0, 1, 2, \dots$

- ❑ Los valores de “ $z$ ” que satisfacen las condiciones de Fase y Magnitud, son los polos de la FTLC del sistema.
- ❑ A partir de la CF se ubican los polos o ceros del controlador, mientras que a partir de la CM se determina el valor de la ganancia  $K$  requerida para cumplir con las especificaciones de desempeño deseadas.

## Ejemplo de Diseño

### Ejemplo 2: Método del Lugar Geométrico de las Raíces

A partir de la planta  $G_p(s)$ , diseñar el controlador  $G_{cd}(z)$  a través del método del LGR para que la respuesta al escalón del sistema controlado cumpla con:  $e_{ssp} = 0$ ,  $M_p \leq 16\%$ ,  $t_s \leq 2s$  y se reduzca el error de velocidad. Obtener el periodo de muestreo  $T$  a partir de la frecuencia  $\omega_d$  deseada. Incluir el atraso de transporte debido al cálculo de la acción de control en la computadora digital, considerando  $T_a = T$ .

$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

❖ Determinación y verificación del periodo de muestreo:

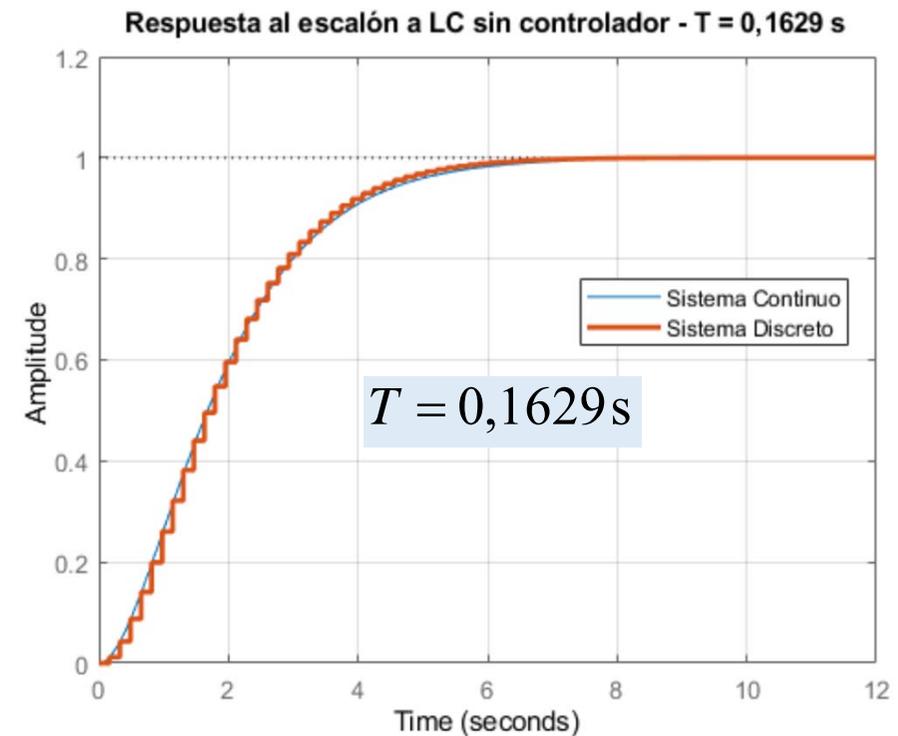
A partir de las especificaciones de desempeño deseadas:

$$t_s = \frac{4,5}{\sigma} \Rightarrow \sigma = 2,25 \text{ rad/s} \quad M_p = e^{-\frac{\pi\sigma}{\omega_d}} \Rightarrow \omega_d \cong 3,8572 \text{ rad/s}$$

Considerando un N° de muestras  $N_d = 10$ , se obtiene:

$$T_d = 1,629 \text{ s}; \quad T = \frac{T_d}{N_d} \Rightarrow T = 0,1629 \text{ s} \Rightarrow f_s = 6,1389 \text{ Hz}$$

Como se aprecia, la respuesta del sistema muestreado "sigue" apropiadamente a la respuesta del sistema continuo. Por lo cual el valor del periodo se considera adecuado.



# Ejemplo de Diseño

## Ejemplo 2: Método del LGR

### ❖ Diseño del controlador en el dominio del tiempo discreto:

Considerando el atraso de la implementación digital y utilizando la aprox. invariante al escalón, la FT discreta de la planta para  $T = 0,1629$  s queda:

$$G_{pda}(z) = \frac{G_{pd}(z)}{z} \Rightarrow G_{pda}(z) = \frac{0,011937 (z + 0,8972)}{z (z - 1) (z - 0,722)}$$

A partir de la transformación conforme  $z = e^{sT}$ , los polos dominantes a LC en el plano Z son:

$$s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d \Rightarrow pz_{1,2} = e^{(-\sigma \pm j\omega_d)T} = 0,5608 \pm j0,4074$$

Se propone diseñar un controlador de adelanto de fase:

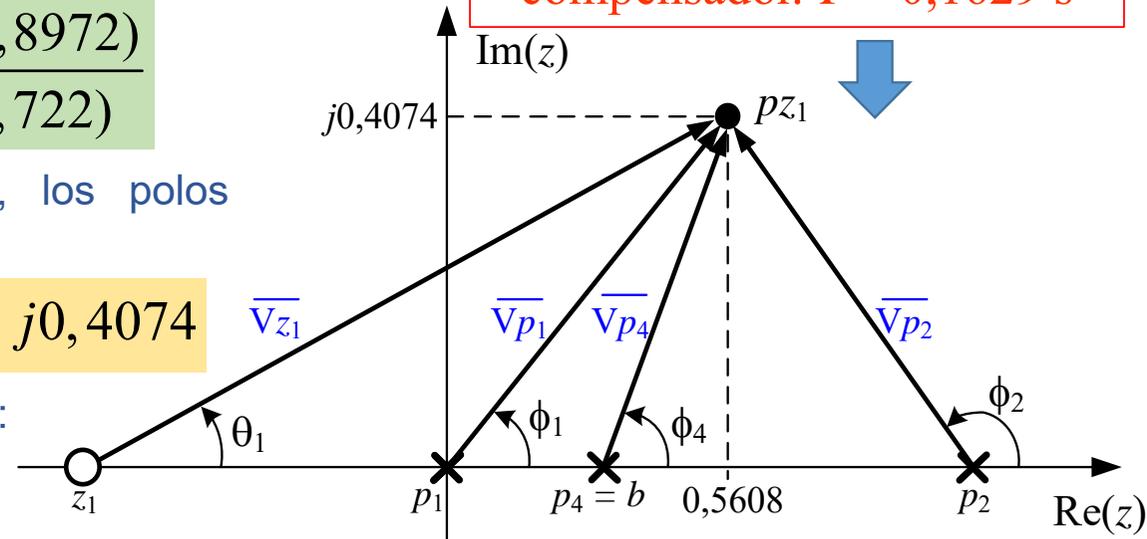
$$G_{cd}(z) = K_c \frac{(z - a)}{(z - b)}$$

La FT de LA en tiempo discreto para el diseño resulta:  $G_{LAd}(z) = G_{cd}(z)G_{pda}(z) = \frac{K_c (z - a)}{(z - b)} \frac{0,011937 (z + 0,8972)}{z (z - 1) (z - 0,722)}$

Como parte del diseño, se cancela el polo dominante de  $G_{pda}(z)$  con  $a = 0,722$  rad/s, y el polo  $b$  se diseña mediante la condición de fase del LGR

$$G_{LAd}(z) = \frac{K_c}{(z - b)} \frac{0,011937 (z + 0,8972)}{z (z - 1)}$$

Constelación de polos y ceros de  $G_{la}(z)$  con una posible posición del polo  $b$  del compensador.  $T = 0,1629$  s



# Ejemplo de Diseño

## Ejemplo 2: Método del LGR

### ❖ Diseño del controlador en el dominio del tiempo discreto:

La condición de fase resulta:  $\theta_1 - \phi_1 - \phi_2 - \phi_3 = \pm 180^\circ$

La deficiencia de fase es:  $\text{Def\_fase} = \theta_1 - \phi_1 - \phi_2 = -157,54^\circ$

Dado que la deficiencia de fase es (-):  $\angle(-1/K) = -180^\circ$

$\text{Def\_fase} - \phi_3 = -180^\circ \Rightarrow \phi_3 = \text{Def\_fase} + 180^\circ$

$$\phi_3 = 22,46^\circ$$

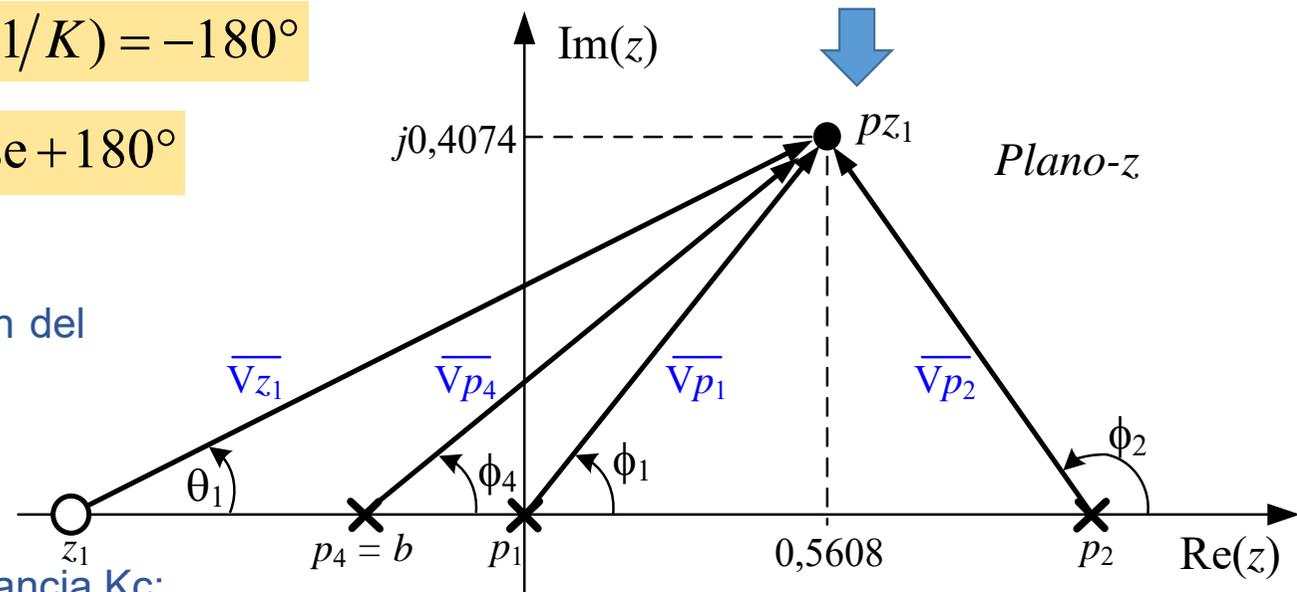
De la constelación de polos de LA, la posición del polo  $b$  se calcula de la siguiente forma:

$$b = \frac{\text{Im}(pz_1)}{\text{tg}(\phi_3)} - \text{Re}(pz_1) = 0,4247 \text{ rad/s}$$

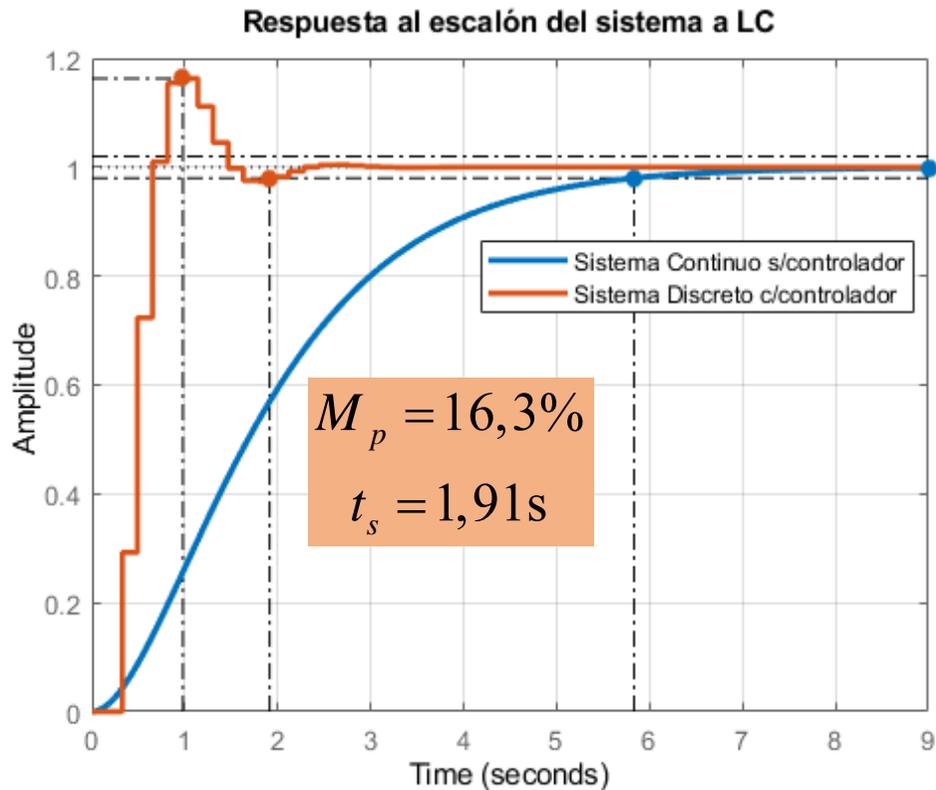
De la condición de magnitud se calcula la ganancia  $K_c$ :

$$K_c = \frac{|V_{p1}| \times |V_{p2}| \times |V_{p3}|}{K_{planta} \times |V_{z1}|} = 24,5065 \Rightarrow G_{cd}(z) = 24,5065 \frac{(z - 0,722)}{(z + 0,4247)} \Rightarrow G_{LAd}(z) = \frac{0,29253 (z + 0,8972)}{z (z - 1)(z + 0,4247)}$$

Constelación de polos y ceros de  $G_{la}(z)$  resultante luego del diseño del polo  $b$  del compensador para  $T = 0,1629$  s

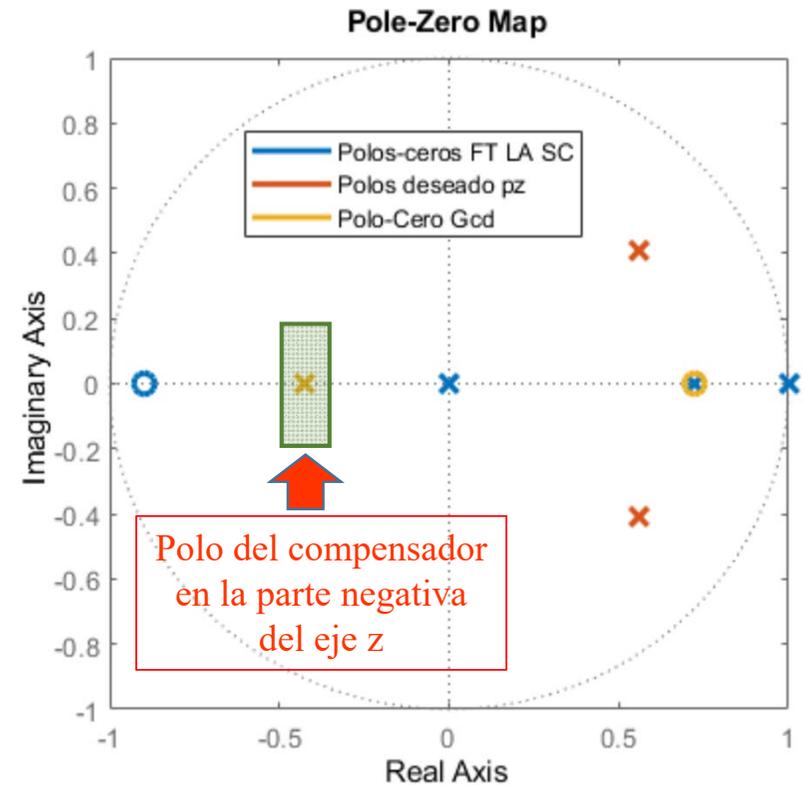


❖ Análisis del desempeño del sistema compensado en el dominio del tiempo discreto:



**CUMPLE con el desempeño**

$$N_d = 10; T = 0,1629 \text{ s} \rightarrow G_{cd}(z) = 24,506 \frac{(z - 0,722)}{z + 0,4247}$$



$$G_{LCd}(z) = \frac{0,29253 (z + 0,8972)}{(z + 0,5463)(z^2 - 1,122 z + 0,4804)}$$

## Ejemplo de Diseño

### Ejemplo 2: Método del LGR

Incrementando el número de muestra a 20, el periodo de muestreo resulta:

$$T_d = 1,629 \text{ s}; \quad T = \frac{T_d}{N_d} \Rightarrow T = 0,0814 \text{ s} \Rightarrow f_s = 12,2778 \text{ Hz}$$

$$G_{pda}(z) = \frac{G_{pd}(z)}{z} \Rightarrow G_{pda}(z) = \frac{0,0031439 (z + 0,9472)}{z (z - 1) (z - 0,8497)}$$

En este caso, se cancela el polo de  $G_{pda}(z)$  con  $a = 0,8497 \text{ rad/s}$



$$G_{LAd}(z) = \frac{K_c}{(z - b)} \frac{0,0031439 (z + 0,9472)}{z (z - 1)}$$

Los polos dominantes a LC en el plano Z son lo siguientes:

$$pz_{1,2} = e^{(-\sigma \pm j\omega_d)T} = 0,7918 \pm j0,2573$$

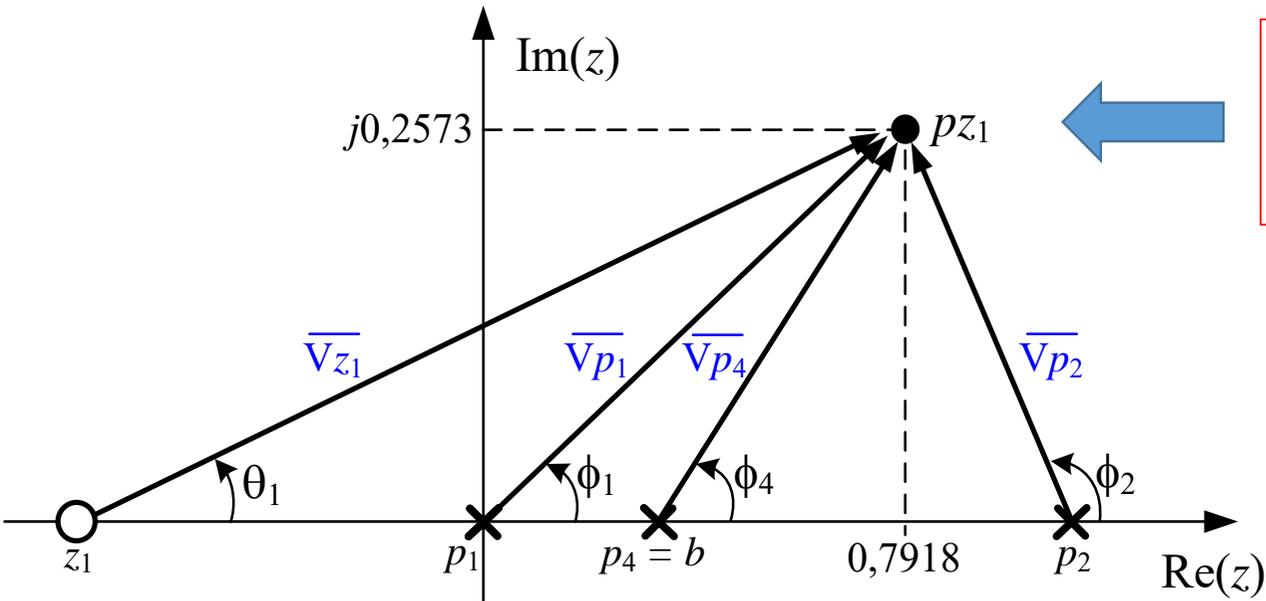
La deficiencia de fase es:  $\text{Def\_fase} = \theta_1 - \phi_1 - \phi_2 = -138,56^\circ$

Dado que  $K_{LA} > 0$  y la deficiencia de fase es (-):  $\angle(-1/K_{LA}) = -180^\circ$

$$\text{Def\_fase} - \phi_4 = -180^\circ \Rightarrow \phi_4 = \text{Def\_fase} + 180^\circ \quad \phi_4 = 41,43^\circ$$

## Ejemplo de Diseño

### Ejemplo 2: Método del LGR



Constelación de polos y ceros de  $G_{la}(z)$  resultante luego del diseño del polo  $b$  del compensador para  $T = 0,0814$  s

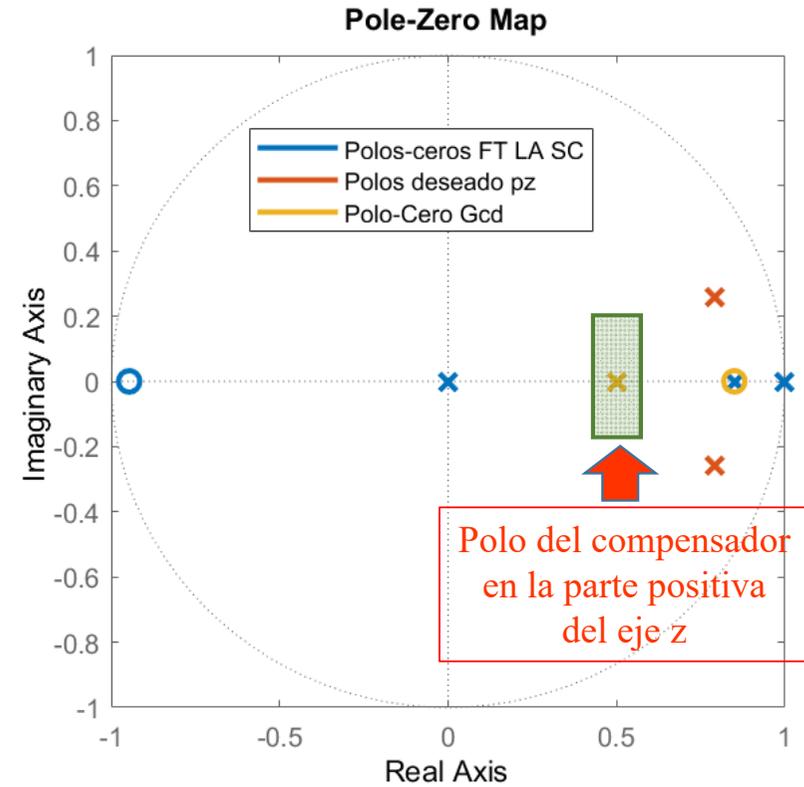
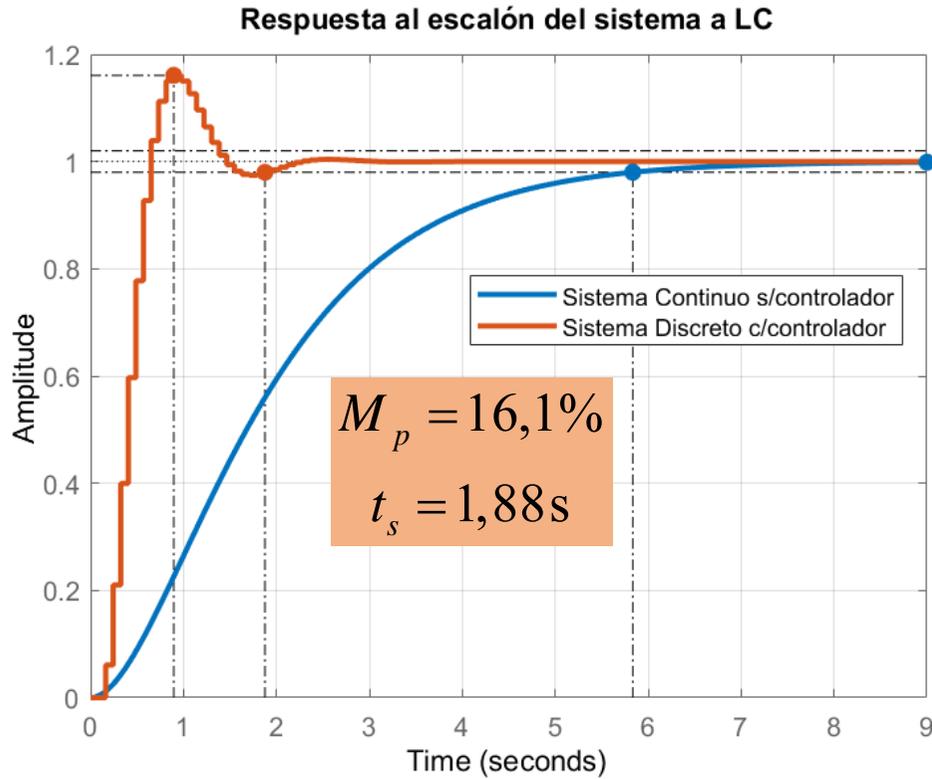
De la constelación de polos de LA, la posición del polo  $b$  se calcula de la siguiente forma:

$$b = \text{Re}(pz_1) - \frac{\text{Im}(pz_1)}{\text{tg}(\phi_3)} = 0,5003 \text{ rad/s}$$

De la condición de magnitud se calcula la ganancia  $K_c$ :

$$K_c = \frac{|V_{p1}| \times |V_{p2}| \times |V_{p3}|}{K_{planta} \times |V_{z1}|} = 19,3829 \Rightarrow G_{cd}(z) = 19,383 \frac{(z - 0,8497)}{(z - 0,5003)} \Rightarrow G_{LAd}(z) = \frac{0,060938 (z + 0,9472)}{z (z - 1)(z - 0,5003)}$$

## ❖ Resultados para $N_d = 20$ muestras



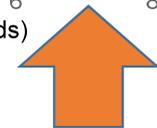
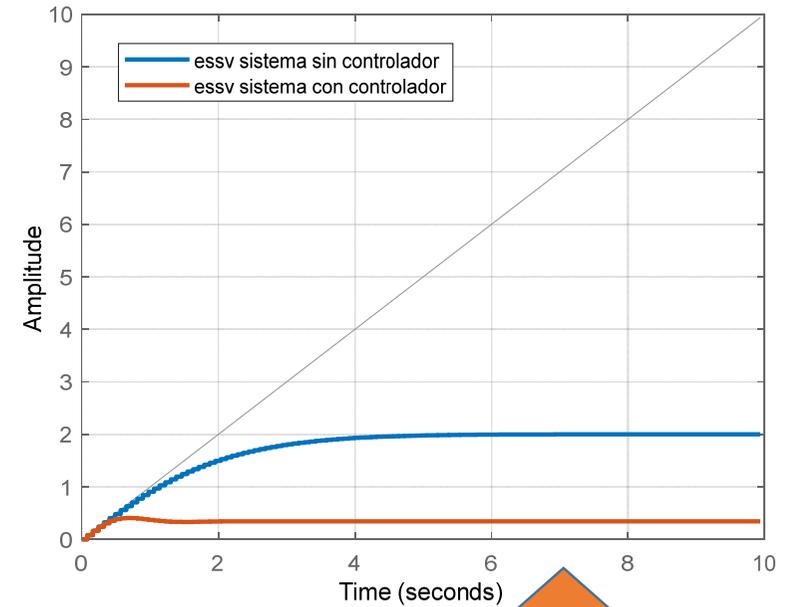
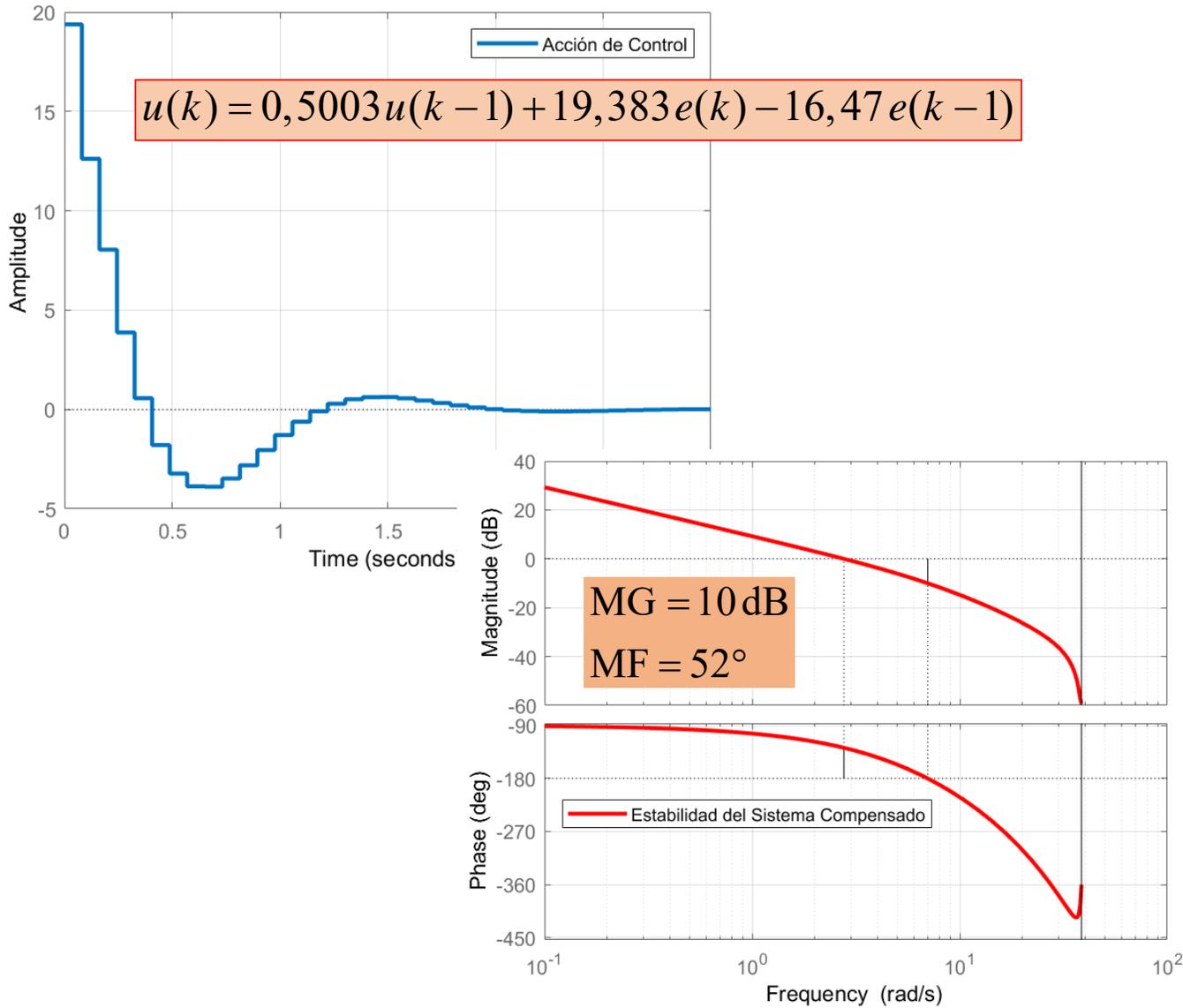
$$G_{cd}(z) = 19,383 \frac{(z - 0,8497)}{(z - 0,5003)} = \frac{U(z)}{E(z)}$$



## ❖ Ecuación recursiva del controlador:

$$u(k) = bu(k-1) + K_c e(k) - K_c a e(k-1)$$

## ❖ Resultados para $N_d = 20$ muestras: Acción de control, estabilidad relativa y error de velocidad



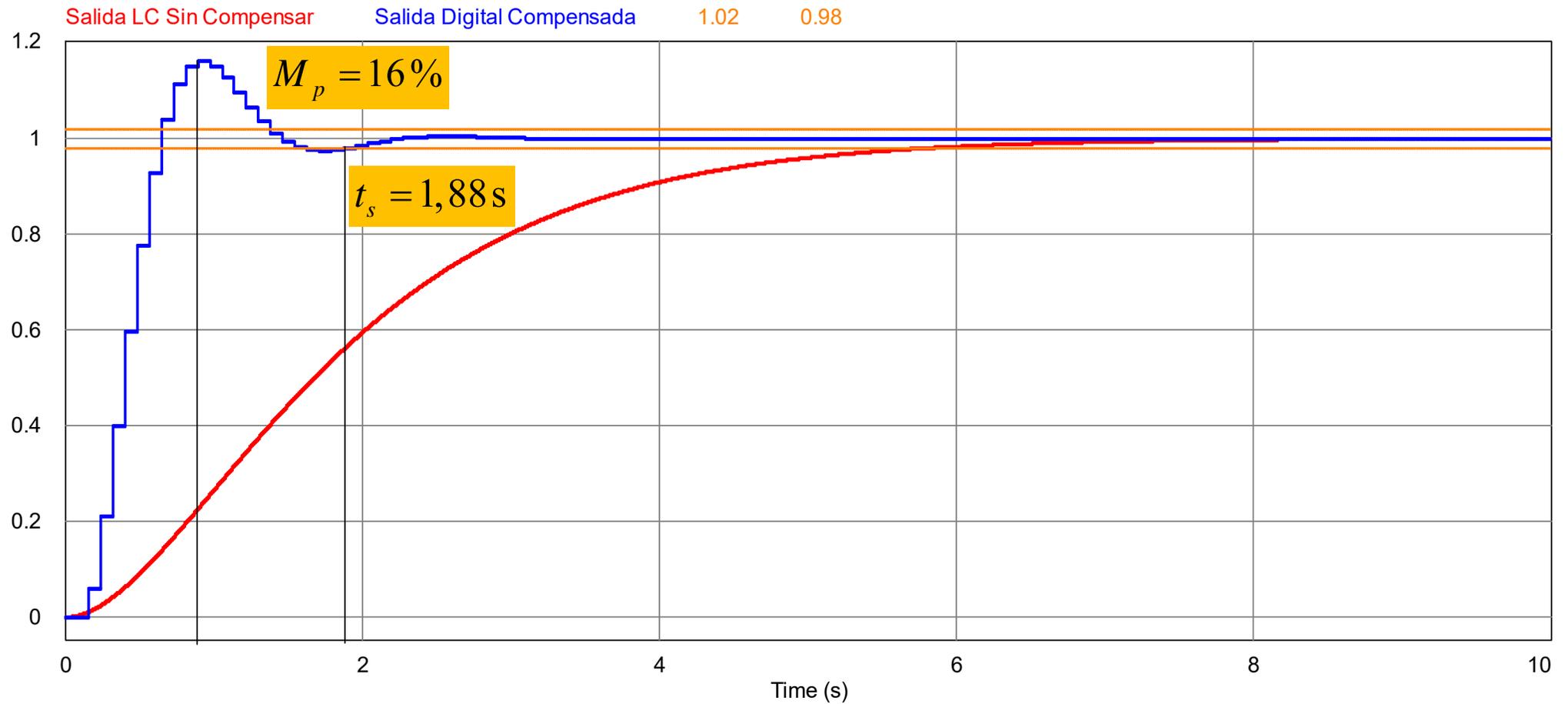
El error de velocidad se reduce significativamente respecto del sistema en LC sin controlador, de un 200% a un 34%, que es lo que se busca con este diseño.

# Ejemplo de Diseño

## Ejemplo 2: Método del LGR

Validación del diseño realizado en PSIM. Respuesta al escalón obtenida con la implementación digital.

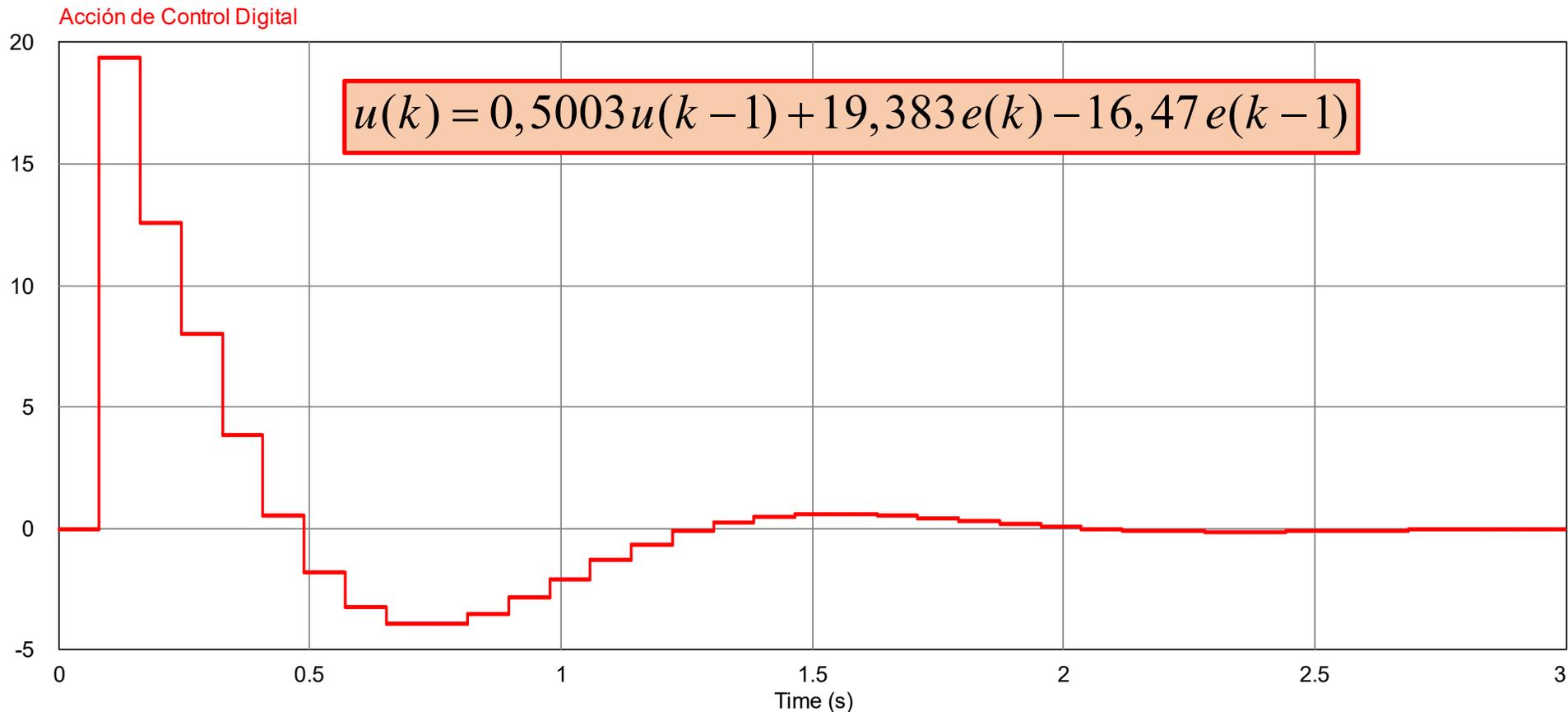
❖ **Resultados para  $N_d = 20$  muestras.  $T_m = 0,08144$  s**



## Ejemplo de Diseño

### Ejemplo 2: Método del LGR

A partir de la FT del controlador diseñado, la ecuación recursiva del controlador para su implementación digital, se obtiene aplicándose la transformada Z inversa.

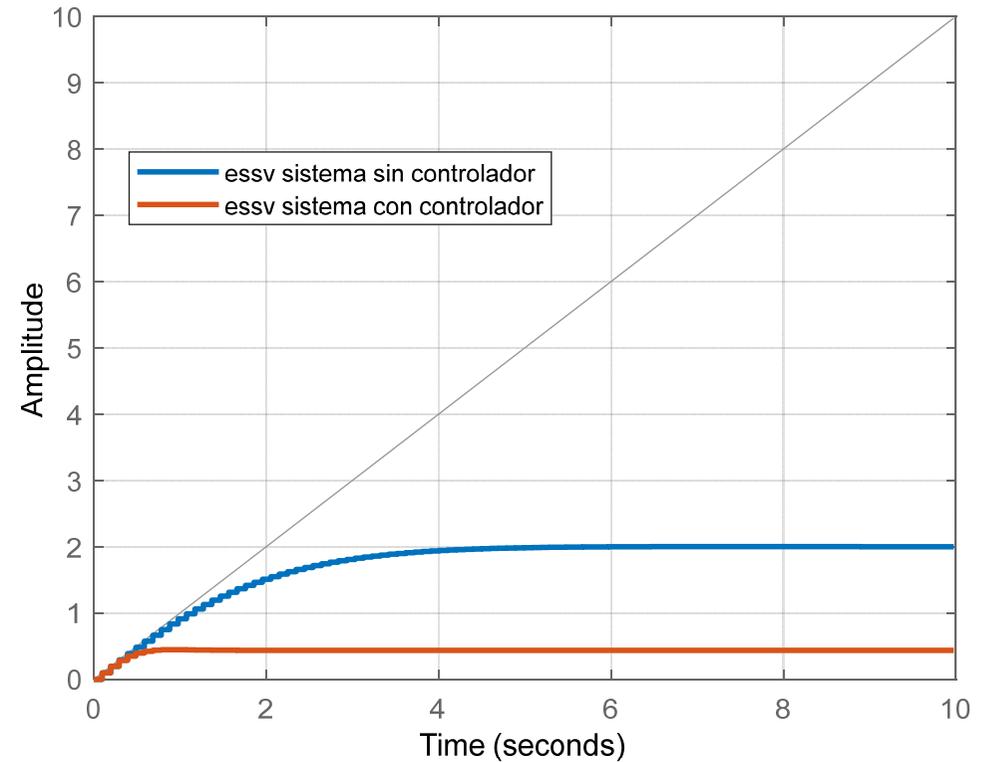
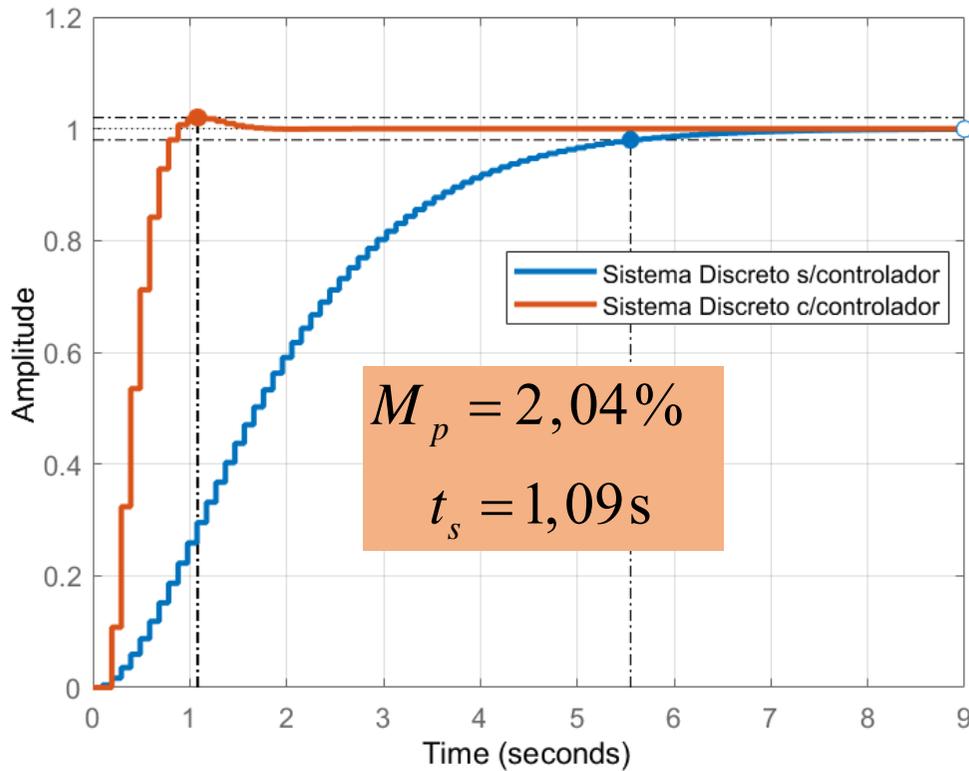


Ver “Ejemplo\_2\_Lugar\_de\_Raices.m” y carpeta “Ejemplo\_DLL\_CAD\_Lugar\_Raices\_2023” de PSIM

Con el objetivo de mejorar un poco el desempeño transitorio, se impone un sobrepaso del 2%, imponiendo un factor de amortiguamiento  $\sigma$  mayor al deseado de 4 rad/s. El periodo de muestreo y los polos deseados resultan:

$$T_d = 1,9560 \text{ s}; \Rightarrow T = 0,0978 \text{ s} \quad pz_{1,2} = e^{(-\sigma \pm j\omega_d)T} = 0,6431 \pm j0,2090$$

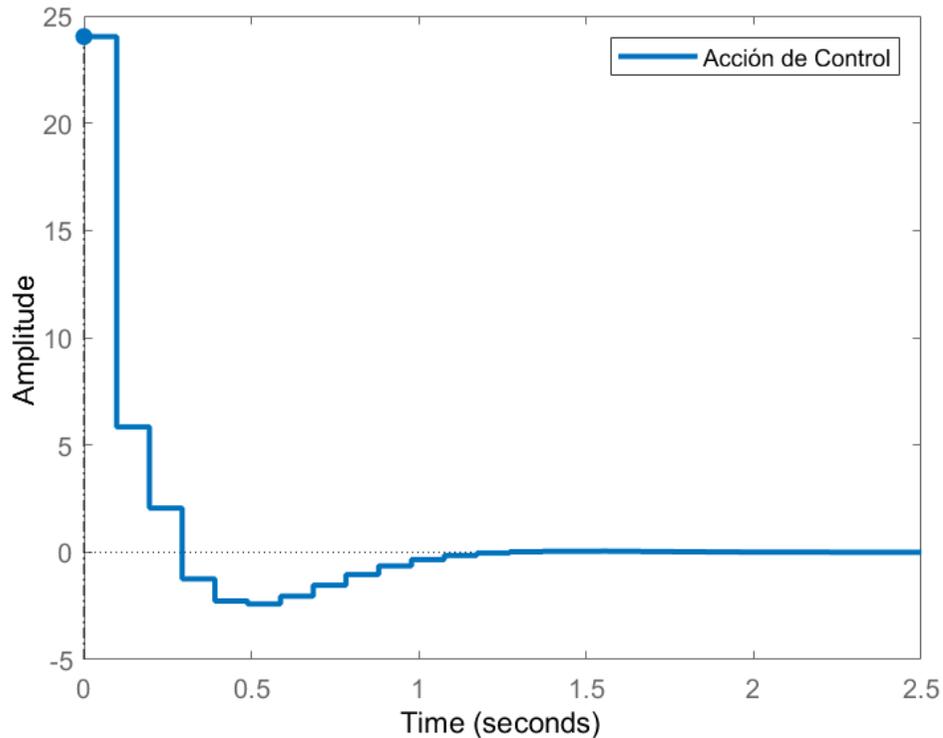
Respuesta al escalón del sistema a LC



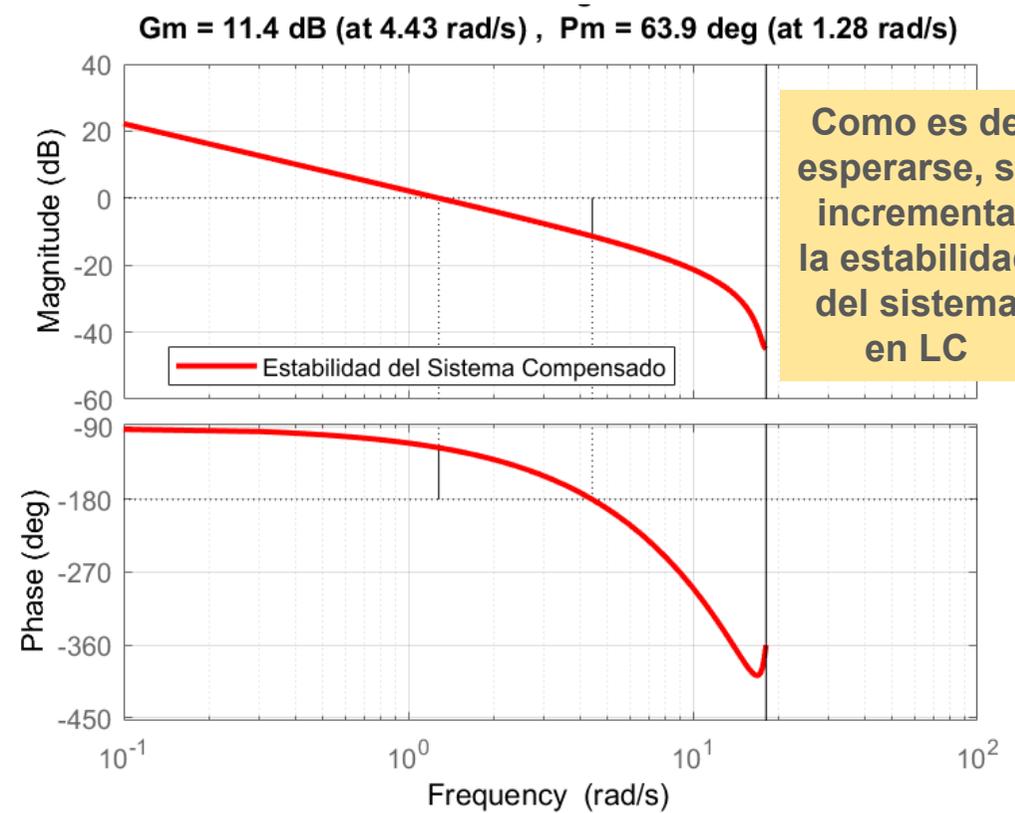
$$G_{cd}(z) = 24,032 \frac{(z - 0,8223)}{(z - 0,06546)}$$

El error de velocidad se reduce significativamente respecto del sistema en LC sin controlador, de un 200% a un 44% manteniéndose un muy buen desempeño transitorio para entradas en escalón.

❖ Resultados para  $M_p = 2\%$ ;  $N_d = 20$  muestras y  $T = 0,0978$  s



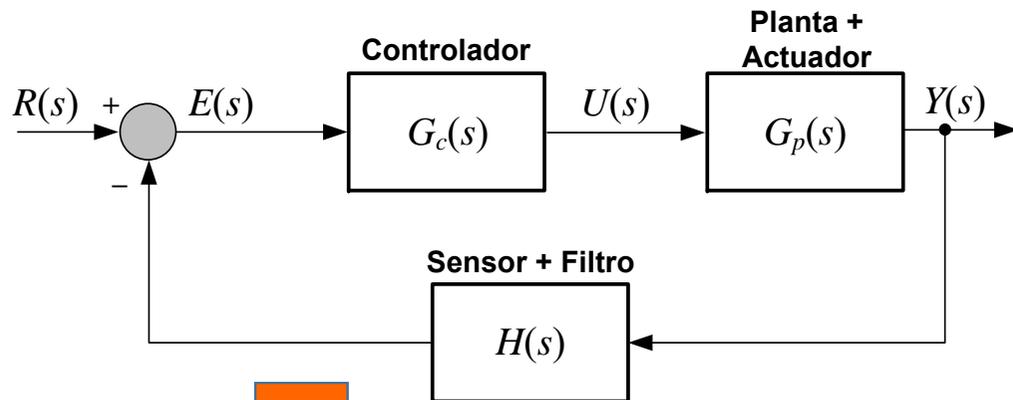
Para conseguir este desempeño, aumenta un poco el pico inicial de la acción de control en la aplicación de un escalón, lo cual puede ser favorable ante la presencia de perturbaciones pero debe tenerse en cuenta en la limitación del actuador.



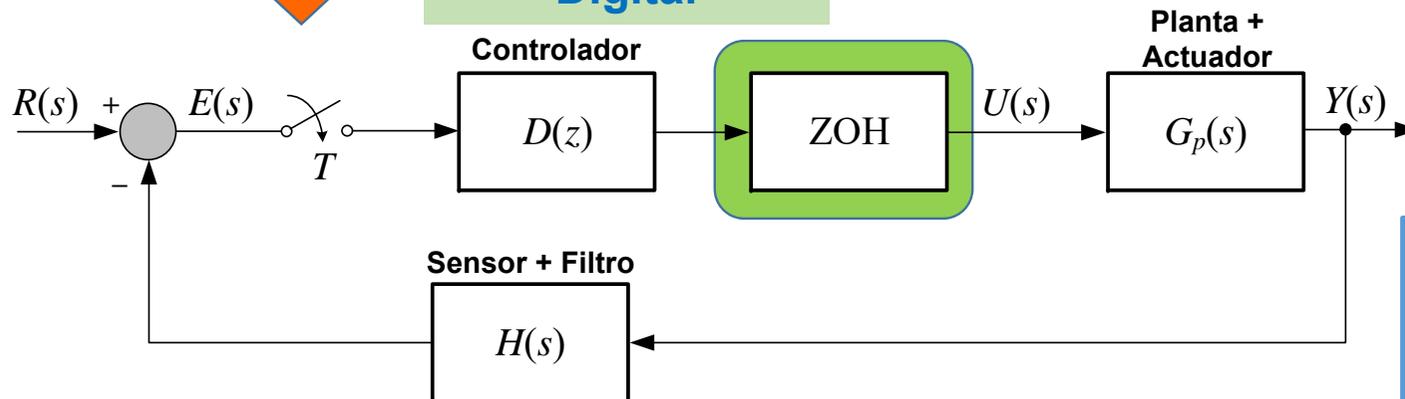
❖ Ecuación recursiva del controlador:

$$u(k) = 24,03e(k) - 19,76e(k-1) + 0,06546u(k-1)$$

# Técnica de Compensación del Atraso del ZOH



## Implementación Digital



## Inconvenientes

- A frecuencias de muestreo relativamente bajas el ZOH puede degradar el desempeño de lazo cerrado.
- Esto puede llevar en algunos casos, a la inestabilidad del sistema en lazo cerrado de tiempo discreto.

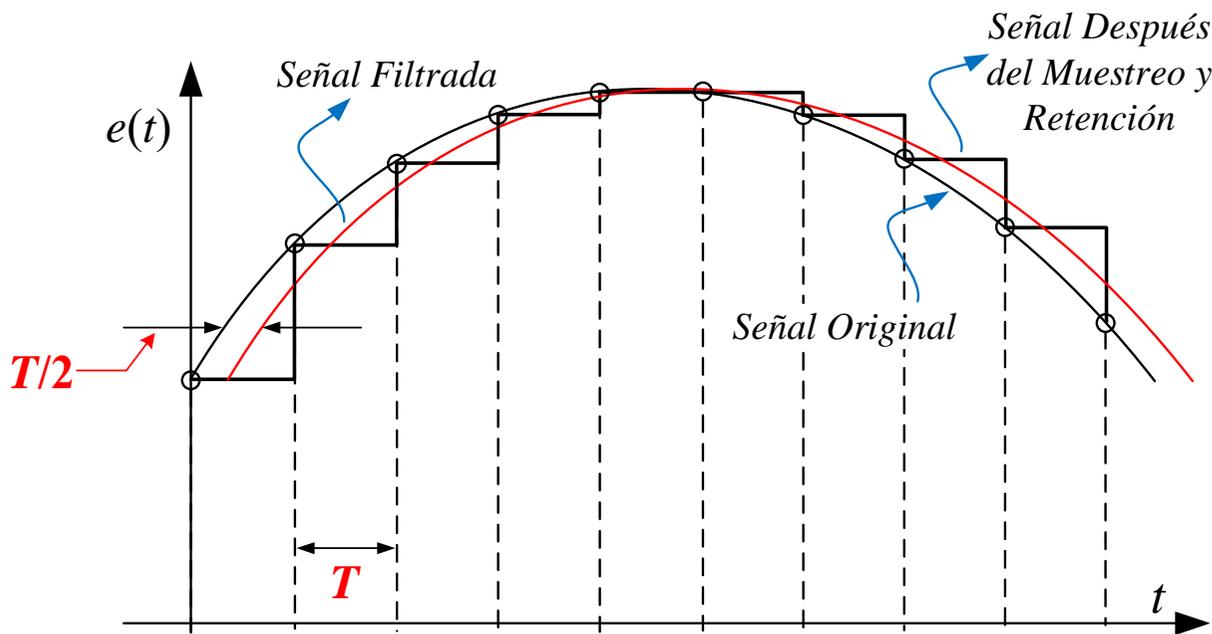
## Solución

En la aproximación del controlador en tiempo continuo a tiempo discreto, debe incorporarse la compensación del ZOH.

# Técnica de Compensación del Atraso del ZOH

## Método de Compensación

Se basa en agregar un par polo-cero en el plano- $z$  a la función de transferencia del controlador en tiempo discreto aproximada por algunos de los métodos analizados.



Con esta compensación se propone solucionar el atraso de medio periodo de muestreo  $T/2$ .

## Compensación Propuesta

$$C(z) = \frac{2z}{z+1}$$

Presenta un cero al origen y un polo en  $z = -1$ , o sea en  $\omega_s/2$ .

# Técnica de Compensación del Atraso del ZOH

## Método de Compensación

Esta compensación cancela exactamente la respuesta de fase del ZOH obtenida de

$$G_{\text{ZOH}}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

$$C(z) = \frac{2z}{z+1}$$



Esta expresión, es la inversa de la transformación de Tustin de la aproximación de Padé de 1° orden del ZOH:

La aproximación de Padé de 1° orden del ZOH



$$\frac{1 - e^{-sT}}{sT} \approx \frac{1}{1 + \frac{sT}{2}}$$

Aplicándose la aproximación de Tustin



$$\left. \frac{1}{1 + \frac{sT}{2}} \right|_{s = \frac{2z-1}{Tz+1}} = \frac{z+1}{2z}$$

# Técnica de Compensación del Atraso del ZOH

Método de Compensación

$$C(z) = \frac{2z}{z+1}$$

**Importante:** El método no garantiza un sistema de lazo cerrado estable, dado que es independiente del método de discretización y del periodo de muestreo

**Condición necesaria para la utilización del método:** Que el polinomio característico del sistema en tiempo discreto a lazo cerrado posea todas las raíces dentro del círculo unitario:

$$1 + \left( \frac{2z}{z+1} \right) D(z)(1 - z^{-1}) Z \left[ \frac{G_p(s)}{s} \right] = 0$$

**Si la compensación propuesta causa inestabilidad debe modificarse levemente la configuración del par polo-cero introducido:**

$$C'(z) = \frac{2(z - \varepsilon)}{z + 1 - 2\varepsilon}$$

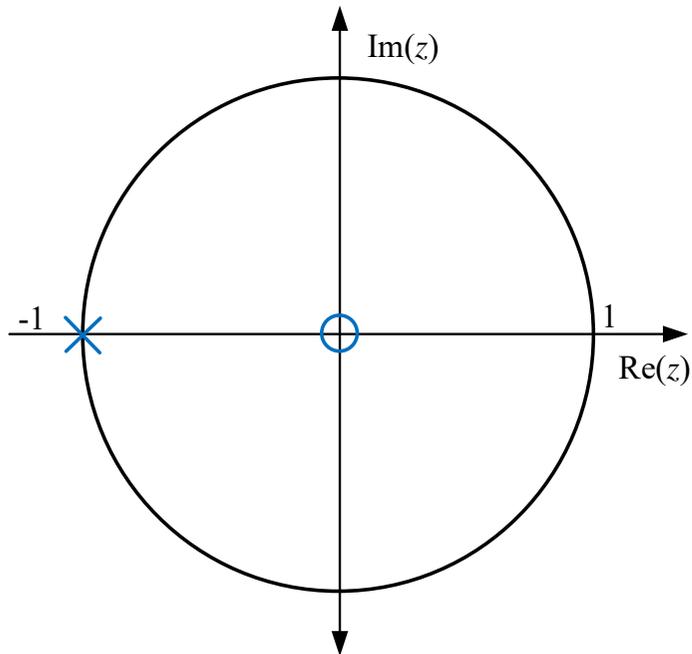
Siendo  $\varepsilon$  una pequeña constante positiva

# Técnica de Compensación del Atraso del ZOH

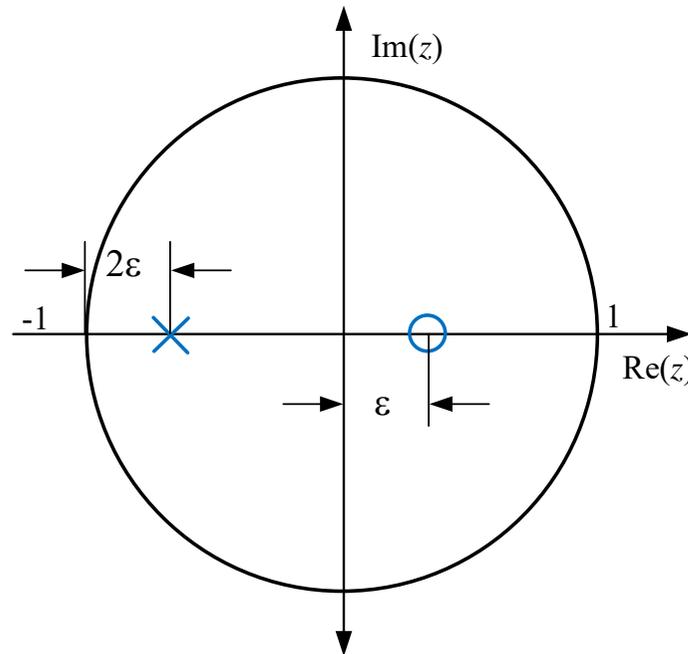
## Compensación Modificada

$$C'(z) = \frac{2(z - \varepsilon)}{z + 1 - 2\varepsilon}$$

**Importante:** Esta compensación modificada preserva la ganancia de continua del controlador.



**Compensación  
 $C(z)$**



**Compensación  
 $C'(z)$**

# Técnica de Compensación del Atraso del ZOH

## Procedimiento de diseño

1. Seleccionar una aproximación para el controlador  $G_c(s)$  y el periodo de muestreo adecuado para obtener  $D(z)$ .
2. Multiplicar  $D(z)$  por  $C(z)$ .
3. Igualar la ganancia CC de lazo abierto del sistema de control digital con el del sistema analógico.
4. Verificar la estabilidad de lazo cerrado en el plano-z. Si es estable, verificar el desempeño en régimen transitorio y permanente de acuerdo a las especificaciones impuestas en tiempo continuo.
5. Si en el paso anterior el sistema resulta inestable, utilice la compensación modificada  $C'(z)$  con un pequeño valor de épsilon " $\varepsilon > 0$ ". El valor de  $\varepsilon$  debe ser lo más pequeño posible para poder garantizar un buen desempeño en las altas frecuencias.
6. Repetir los pasos 3 y 4.
7. Si el sistema aún continúa inestable, este método de compensación no es útil para el proceso en análisis.

## Ejemplo de Diseño

### Ejemplo 3: Compensación del efecto del ZOH

$$G_p(s) = \frac{1080}{s(s+6)(s+18)}$$

Sea la planta  $G_p(s)$ , representada por su FT, la cual incorpora la ganancia del actuador. Mediante el **Rediseño Digital**, obtener la **FT aproximada por Tustin** de un controlador de adelanto de fase diseñado en tiempo continuo. Las especificaciones de diseño para la respuesta al escalón en LC son:  $e_{ssp} = 0$ ,  $M_p$  menor al 1% y  $t_s$  menor a 1s.

#### ❖ Diseño del controlador en tiempo continuo:

Aplicando el método del LGR se obtiene el siguiente controlador de adelanto de fase:

$$G_c(s) = \frac{0,58857(s+4,931)}{(s+10)}$$

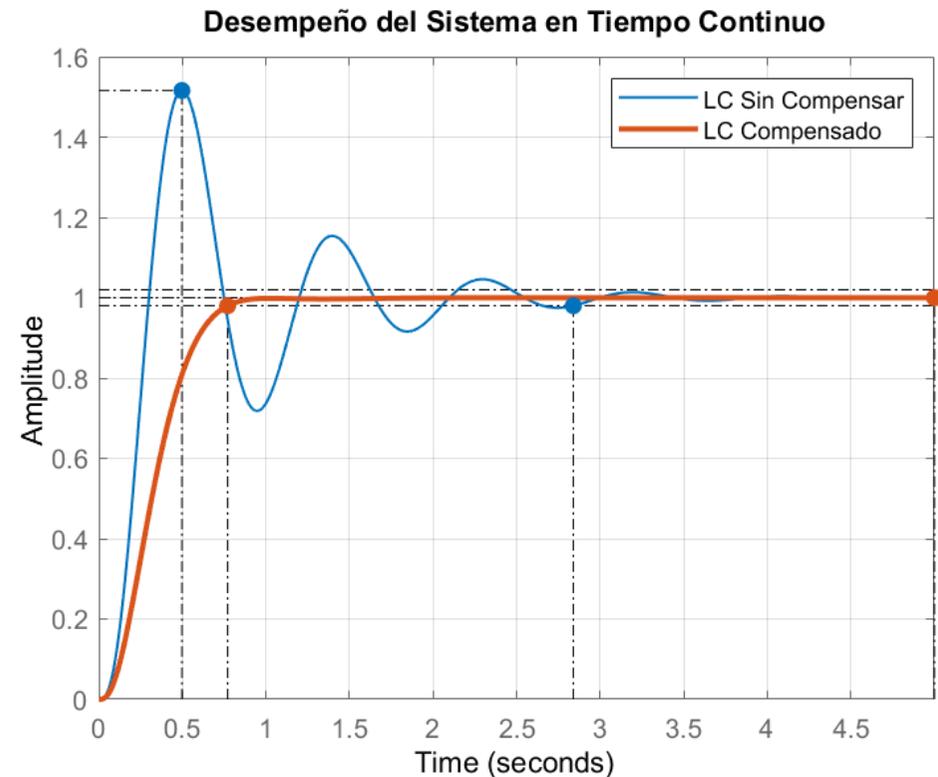
La respuesta del sistema a LC con el controlador se muestra en la figura y presenta las siguientes especificaciones:

$$t_s = 0,77 \text{ s}$$

$$t_r = 0,46 \text{ s}$$

$$M_p = 0$$

$$e_{ssp} = 0$$



## Ejemplo de Diseño

### Ejemplo 3: Compensación del efecto del ZOH

#### ❖ Determinación del periodo de muestreo para rediseño digital:

Se determina el periodo de muestreo a partir de la frecuencia de ancho de banda del sistema a LC compensado.

$$\omega BW_{sc} = \text{bandwidth}[G_{LC}(s)] = 4,73 \text{ rad/s}$$

$$fBW_{sc} = \frac{\omega BW_{sc}}{2\pi} = 0,753 \text{ Hz}$$

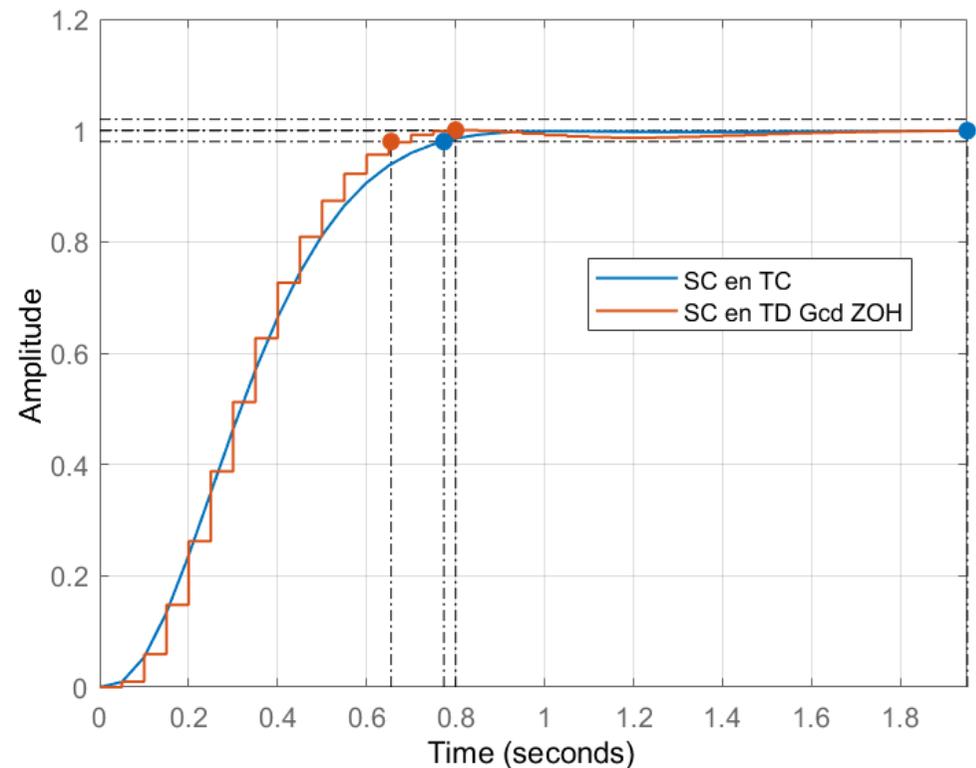
$$f_m = 30 \times fBW_{sc} = 22,587 \text{ Hz}$$

$$T = \frac{1}{f_m} = 0,044 \text{ s} \Rightarrow \text{Se adopta } T = 0,05 \text{ s}$$

A modo de verificación, utilizándose un ZOH se obtiene la FT de la planta y del controlador en tiempo discreto:

$$G_{pd}(z) = \frac{0,016887(z + 2,809)(z + 0,1955)}{(z - 1)(z - 0,7408)(z - 0,4066)}$$

$$G_{cdZOH}(z) = \frac{0,58857(z - 0,806)}{(z - 0,6065)}$$



## Ejemplo de Diseño

### Ejemplo 3: Compensación del efecto del ZOH

#### ❖ Diseño de la compensación para eliminar el retardo debido al ZOH:

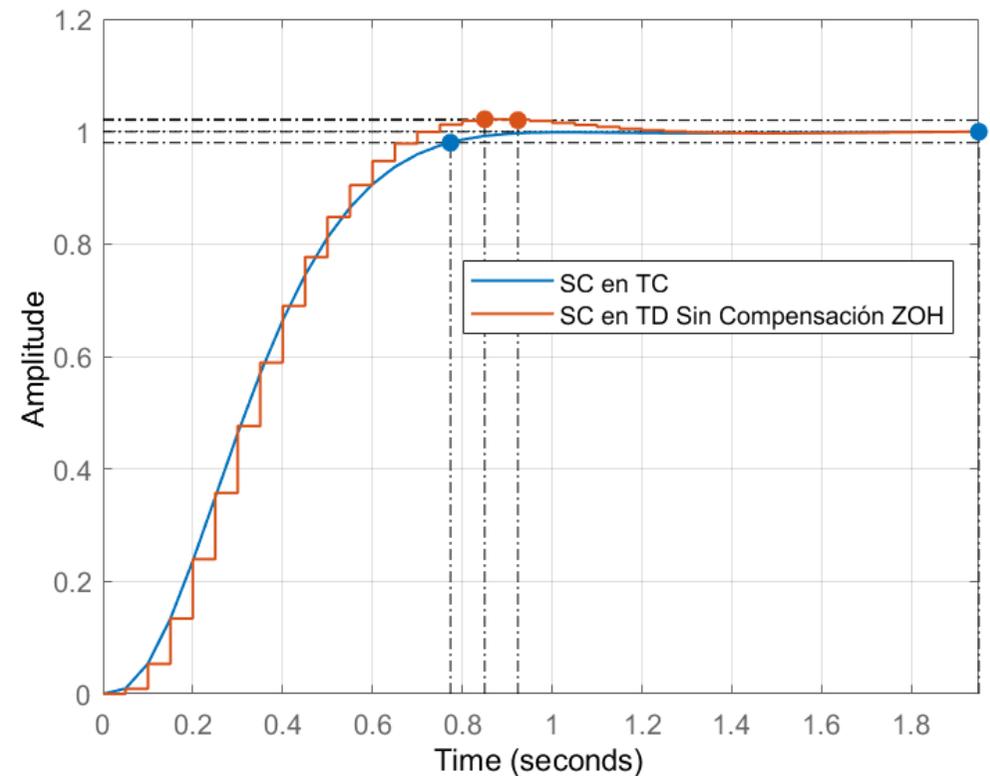
Se obtiene la FT muestreada del controlador de adelanto de fase utilizando la aproximación de Tustin:

$$G_{cdTustin}(z) = \frac{0,5289(z - 0,7805)}{(z - 0,6)}$$

- Se observa un aumento en el sobrepaso, dando un valor por encima del 2% y un tiempo de asentamiento próximo a 1 s.
- Además, se aprecia el retardo ocasionado por el retenedor de orden cero.

A continuación se verifica el desempeño con este controlador:

Compensador Aproximado por Tustin



## Ejemplo de Diseño

### Ejemplo 3: Compensación del efecto del ZOH

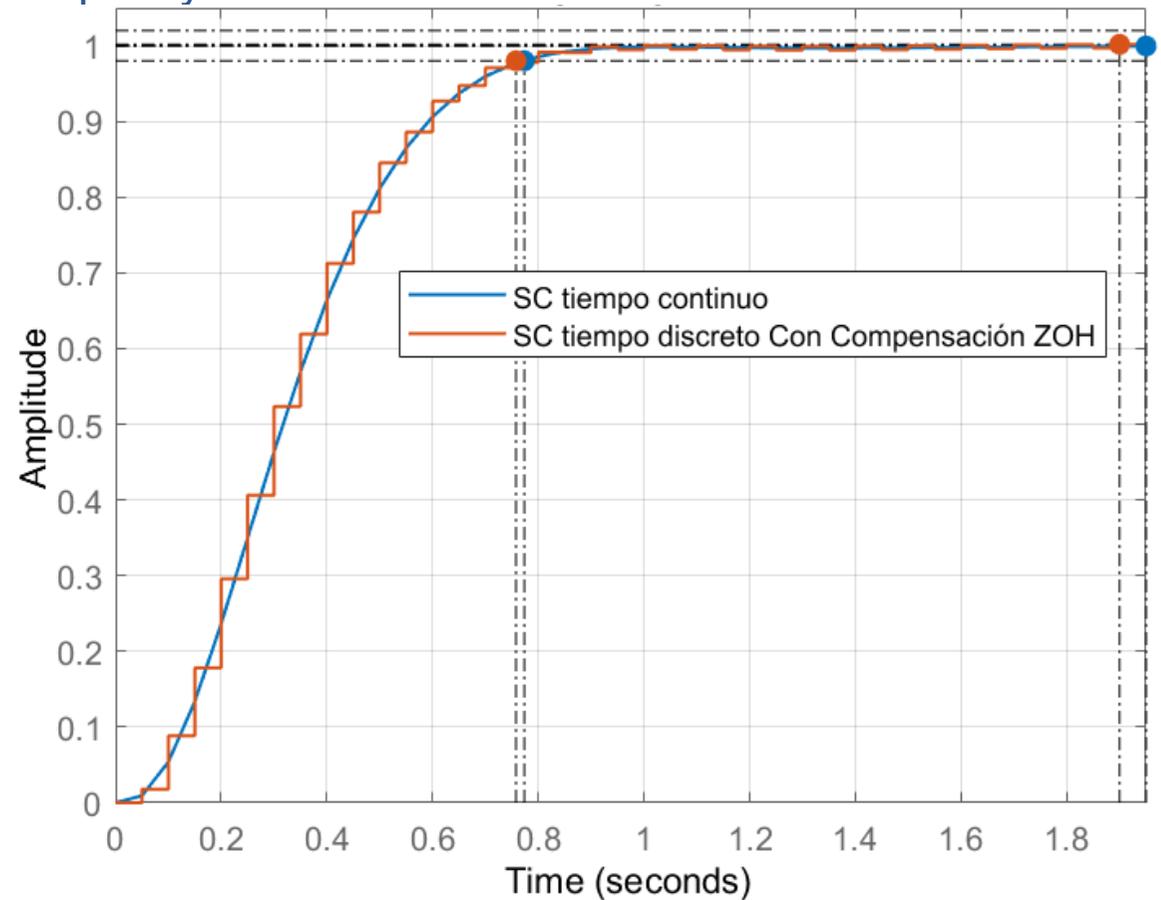
Para ejemplificar este tema ver el script de Matlab: “compensacion\_zoh\_ejemplo\_clase.m”

Se propone adicionar en serie al compensador de adelanto de fase aproximado por Tustin la compensación polo-cero, sin desplazamiento del polo y del cero:

$$D_{ZOH}(z) = \frac{0,5289(z - 0,7805)}{(z - 0,6)} \times \frac{2z}{(z + 1)}$$

$$D_{ZOH}(z) = \frac{1,0578 z (z - 0,7805)}{(z + 1)(z - 0,6)}$$

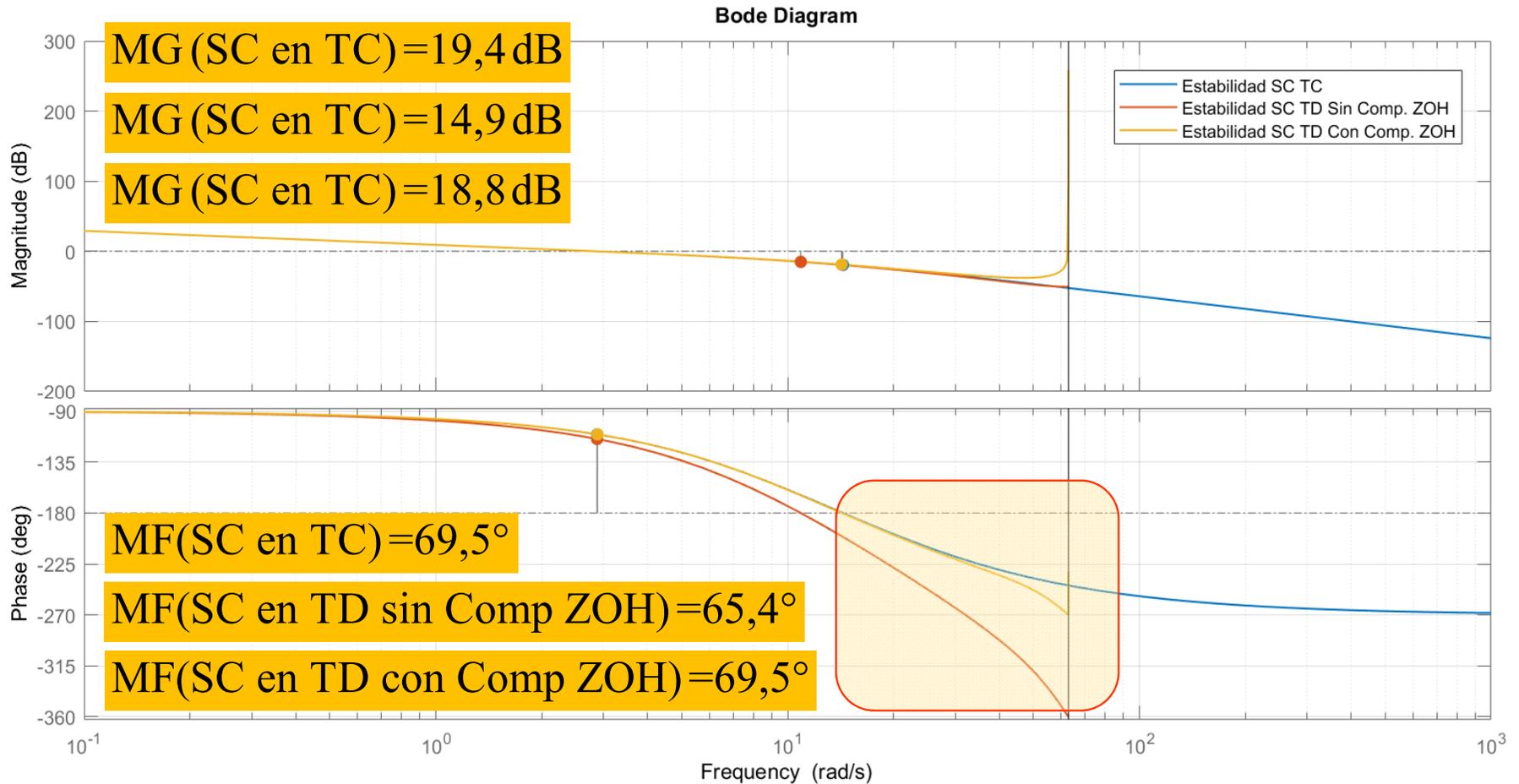
- Los sobrepasos de ambas respuestas son iguales cero y los tiempos de asentamiento prácticamente iguales.
- Se aprecia la eliminación del retardo ocasionado por el ZOH, dado que la curva de TD sigue en promedio a la curva de TC.



# Ejemplo de Diseño

## Ejemplo 3: Compensación del efecto del ZOH

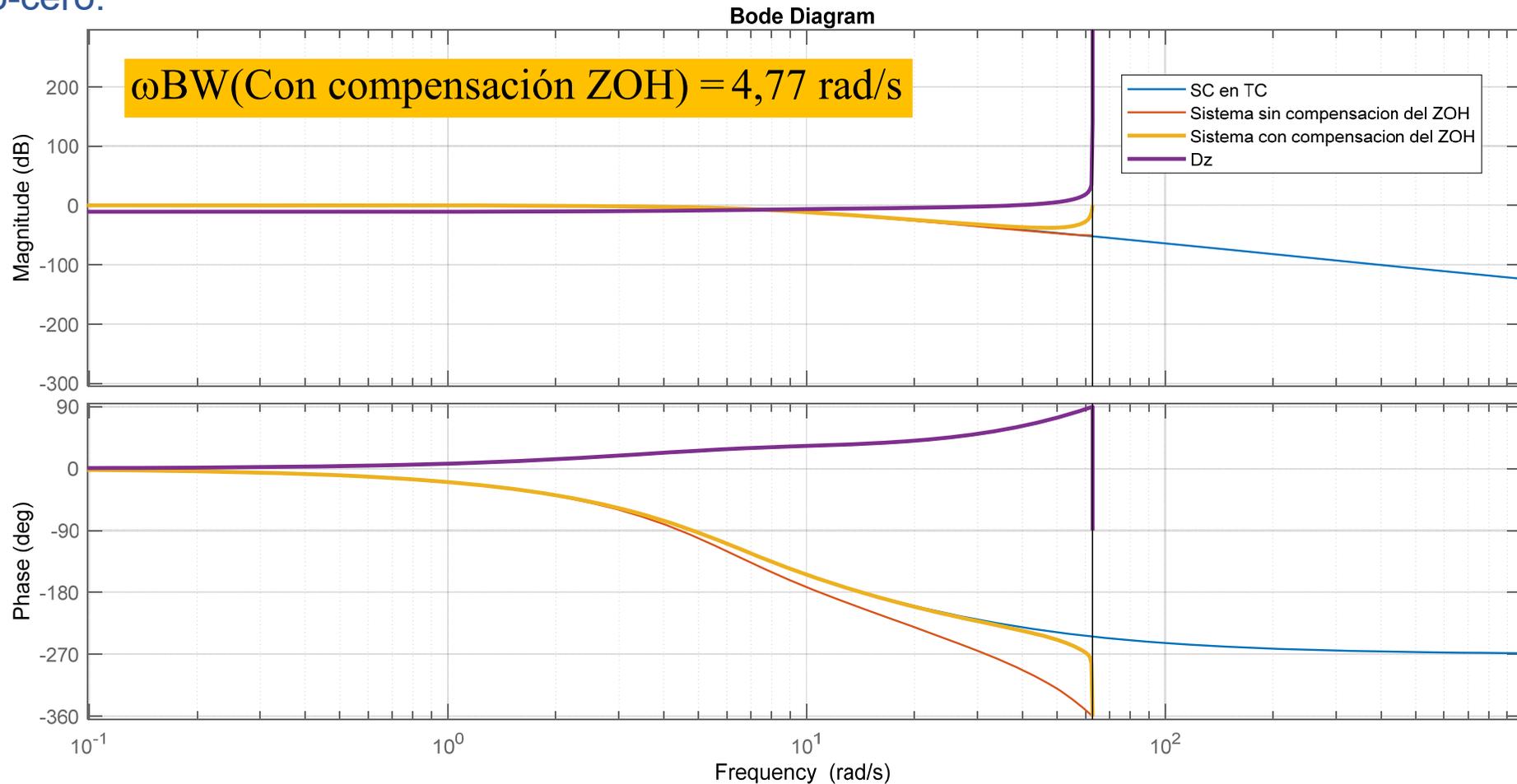
Análisis de la estabilidad con la compensación del ZOH respecto a la estructura sin compensación polo-cero:



# Ejemplo de Diseño

## Ejemplo 3: Compensación del efecto del ZOH

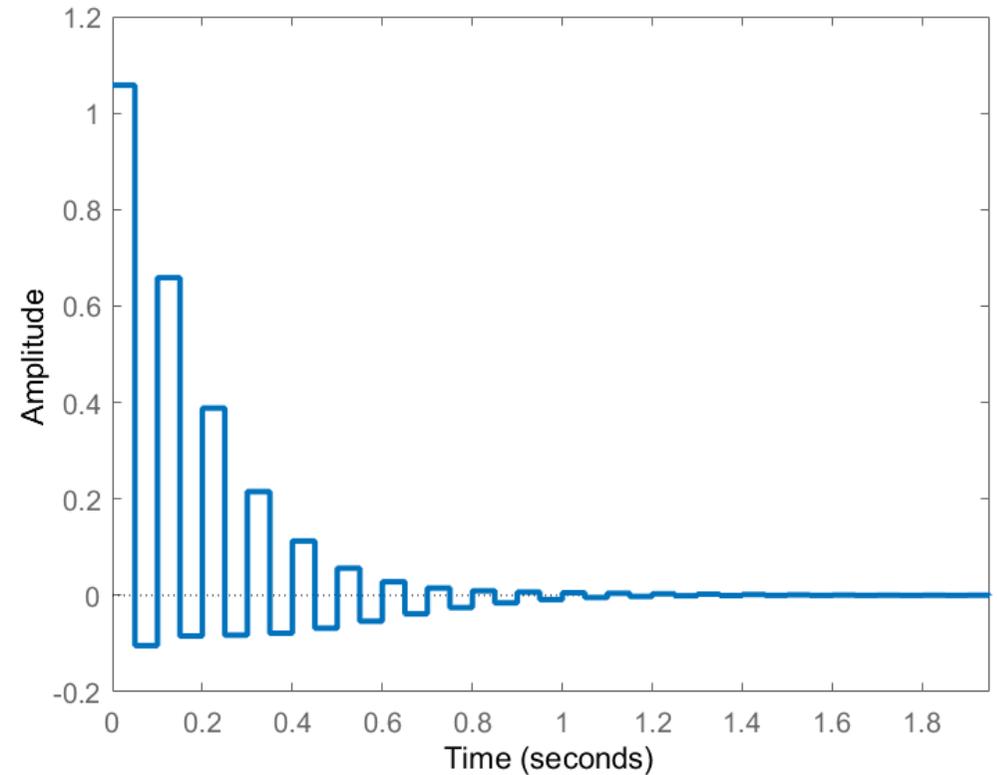
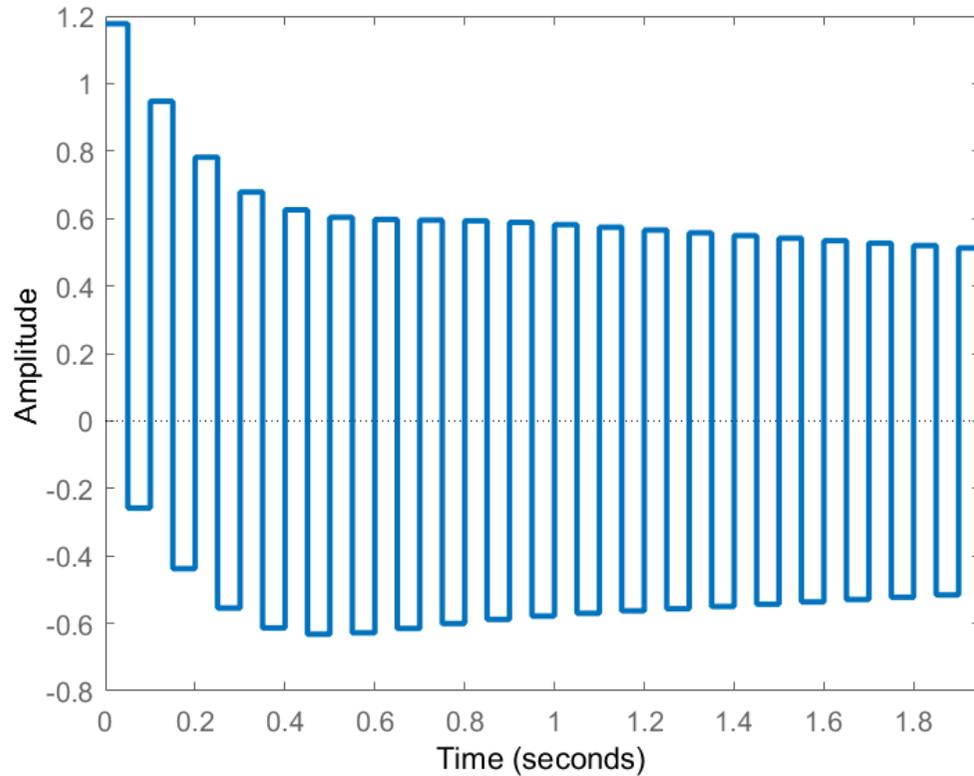
Análisis de la estabilidad con la compensación del ZOH respecto a la estructura sin compensación polo-cero:



## Ejemplo de Diseño

### Ejemplo 3: Compensación del efecto del ZOH

Acciones de control con épsilon igual a cero y épsilon igual a 0,1.



$$D_{ZOH}(z) = \frac{1,0578 z(z - 0,7805)}{(z + 1)(z - 0,6)}; \text{ con } \epsilon = 0$$

$$D_{ZOH}(z) = \frac{1,0578 (z - 0,1)(z - 0,7805)}{(z + 0,8)(z - 0,6)}; \text{ con } \epsilon = 0,1$$

## Ejemplo de Diseño

### Ejemplo 3: Compensación del efecto del ZOH

Acción de control y ecuación recursiva a diferencias finitas para su implementación:

$$D_{ZOH}(z) = \frac{1,0578 z^2 - 0,8256 z}{z^2 + 0,4 z - 0,6}; \text{ con } \varepsilon = 0$$

$$u(k) = k_1 u(k-2) - k_2 u(k-1) + k_3 e(k) - k_4 e(k-1)$$

Con  $k_1 = 0,6$ ;  $k_2 = 0,4$ ;  $k_3 = 1,0578$  y  $k_4 = 0,8256$

$$D_{ZOH}(z) = \frac{1,0578 z^2 - 0,9314 z + 0,08256}{z^2 + 0,2 z - 0,48}; \text{ con } \varepsilon = 0,1$$

$$u(k) = k_1 u(k-2) - k_2 u(k-1) + k_3 e(k) - k_4 e(k-1) + k_5 e(k-2)$$

Con  $k_1 = 0,48$ ;  $k_2 = 0,2$ ;  $k_3 = 1,0578$ ;  $k_4 = 0,9314$  y  $k_5 = 0,08256$

Para la implementación digital, se realiza una simulación en PSIM utilizando la DLL.  
Ver la siguiente carpeta: "Ejemplo\_DLL\_comp\_adelanto\_CZOH\_2023"

# Implementación del Algoritmo de Control

La secuencia que debe seguir el programa dedicado a calcular la acción de control es la siguiente:

- ❑ Adquisición y digitalización de la señal a controlar (salida de la planta). Si la referencia es externa, también se debe adquirir y digitalizar.
- ❑ Cálculo del error haciendo la resta entre la referencia y la señal de salida de la planta.
- ❑ Cálculo de la acción de control a través de la ecuación recursiva del controlador y aplicación de la misma.

**Por ejemplo:**  $u(k) = u(k-1) + K e(k) - aK e(k-1)$       Ecuación recursiva de un PI digital.

En la ecuación anterior, “ $a$ ” y “ $K$ ” son constantes obtenidas en el proceso de diseño del controlador.

- ❑ Actualización de la acción de control calculada, al registro de salida del procesador, según la estrategia configurada.
- ❑ Finalmente se actualizan los valores anteriores correspondientes a:

$u(k-1) \leftarrow u(k)$       Actualiza la acción de control anterior, cargándole el valor actual de la misma.

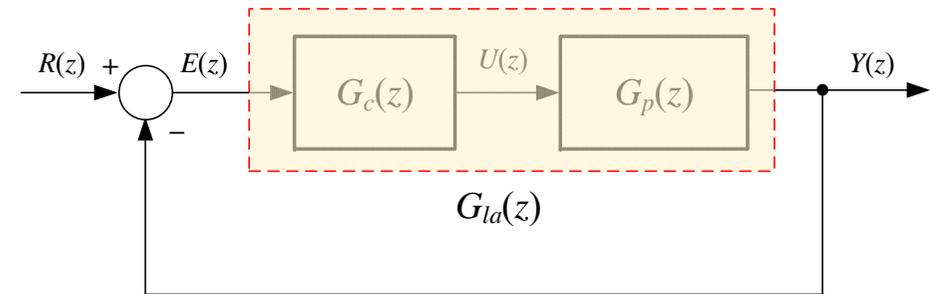
$e(k-1) \leftarrow e(k)$       Actualiza el error anterior, cargándole el valor actual del mismo.

# Error en Estado Estacionario

## Definición:

El "Tipo" de un sistema continuo está dado por la cantidad de polos en el origen ( $s = 0$ ) que posee su FT. Este concepto también se aplica a los sistemas discretos, considerando que para  $s = 0$  es  $z = e^{0T} = 1$ . Entonces para un sistema discreto representado por  $G_{la}(z)$ , el tipo del sistema está dado por el número de polos en  $z = 1$ .

$$s = 0 \rightarrow z = e^{0T} \Rightarrow G_{la}(z) = \frac{A(z)}{(z-1)^N B(z)} \quad \begin{cases} N = 0 \rightarrow \text{Sistema Tipo 0.} \\ N = 1 \rightarrow \text{Sistema Tipo 1.} \\ N = 2 \rightarrow \text{Sistema Tipo 2.} \end{cases}$$



Como veremos a continuación, el "Tipo" de sistema define la precisión del mismo en régimen estacionario o permanente. Para el sistema de control indicado en la figura anterior se tiene que la FTLC y la FT del error están dadas por:

$$G_{lcc}(z) = \frac{G_{la}(z)}{1 + G_{la}(z)} \quad E(z) = [1 - G_{lcc}(z)]R(z) \Rightarrow E(z) = \frac{R(z)}{1 + G_{la}(z)}$$

Aplicando el Teorema del Valor Final, se halla el error en estado estacionario del sistema:

$$e_{ss}^* = \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1})E(z) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \left( \frac{z-1}{z} \right) \frac{R(z)}{1 + G_{la}(z)} \right]$$

Error en Estado Estacionario

# Error en Estado Estacionario

**Error de Posición:** La entrada es un escalón unitario

$$r(k) = 1 \Rightarrow R(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$e_{ssp} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{(z-1)}{z} \frac{1}{1+G_{la}(z)} \frac{z}{(z-1)} \right] \Rightarrow$$

$$e_{ssp} = \frac{1}{1+K_p}$$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} G_{la}(z)$$

$K_p$ : Cte. de error de posición

**Error de Velocidad:** La entrada es una rampa unitaria

$$r(k) = t(k) \Rightarrow R(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$e_{ssv} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{(z-1)}{z} \frac{1}{1+G_{la}(z)} \frac{Tz}{(z-1)^2} \right] \Rightarrow$$

$$e_{ssv} = \frac{1}{K_v}$$

$$K_v = \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)G_{la}(z)]$$

$K_v$ : Cte. de error de velocidad

**Error de Aceleración:** La entrada es una parábola

$$r(k) = \frac{1}{2} t^2(k) \Rightarrow R(z) = \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$$

$$e_{ssa} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{(z-1)}{z} \frac{1}{1+G_{la}(z)} \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} \right] \Rightarrow$$

$$e_{ssa} = \frac{1}{K_a}$$

$$K_a = \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)^2 G_{la}(z)]$$

$K_a$ : Cte. de error de aceleración

**Constantes de Error:** Cuanto mayor es el valor de la constante, menor es el error correspondiente.

# Error en Estado Estacionario

## Resumen:

Sistema	Entrada Escalón	Entrada Rampa	Entrada Parábola
<b>TIPO 0</b>	$K_p = K \Rightarrow e_{ssp} = \frac{1}{1+K_p}$	$K_v = 0 \Rightarrow e_{ssv} = \infty$	$K_a = 0 \Rightarrow e_{ssa} = \infty$
<b>TIPO 1</b>	$K_p = \infty \Rightarrow e_{ssp} = 0$	$K_v = K \Rightarrow e_{ssv} = \frac{1}{K}$	$K_a = 0 \Rightarrow e_{ssa} = \infty$
<b>TIPO 2</b>	$K_p = \infty \Rightarrow e_{ssp} = 0$	$K_v = \infty \Rightarrow e_{ssv} = 0$	$K_a = K \Rightarrow e_{ssa} = \frac{1}{K}$
<b>TIPO 3</b>	$K_p = \infty \Rightarrow e_{ssp} = 0$	$K_v = \infty \Rightarrow e_{ssv} = 0$	$K_a = \infty \Rightarrow e_{ssa} = 0$

## Bibliografía

-  **Linear System, Theory and Design, 3th ed., Chi-Tsong Chen** – Oxford Uni Press, 1999.
-  **Controle por Computador de Sistemas Dinâmicos**, Elder M. Hemerly, Edgard Blucher Ltda., 2000.
-  A. G. Yepes, F. D. Freijedo, J. Doval-Gandoy, Lo, x, O. pez, J. Malvar, C. Fernández, **"Effects of Discretization Methods on the Performance of Resonant Controllers,"** Power Electronics, IEEE Transactions on, vol. 25, pp. 1692-1712, 2010.
-  D. N. Zmood and D. G. Holmes, **"Stationary frame current regulation of PWM inverters with zero steady-state error,"** Power Electronics, IEEE Transactions on, vol. 18, pp. 814-822, 2003.
-  L. Poh Chiang, M. J. Newman, D. N. Zmood, and D. G. Holmes, **"A comparative analysis of multiloop voltage regulation strategies for single and three-phase UPS systems,"** Power Electronics, IEEE Transactions on, vol. 18, pp. 1176-1185, 2003.
-  M. J. Newman and D. G. Holmes, **"Delta operator digital filters for high performance inverter applications,"** Power Electronics, IEEE Transactions on, vol. 18, pp. 447-454, 2003.
-  Roberto Esteban Carballo. **Curso De Posgrado: DSP Para El Control De Electrónica De Potencia. Trabajo Final Implementación Digital De Compensadores Resonantes.** UNRC, julio 2014.