Error en estado estacionario de sistemas de control digital

La señal de error, la cual usualmente en un sist. de control debe ser llevada a cero, se define como la diferencia entre la referencia (o set-point) de entrada y la señal de salida a controlar.

P/ un sistema de control digital como el de la Figura ~~xx~~ 1

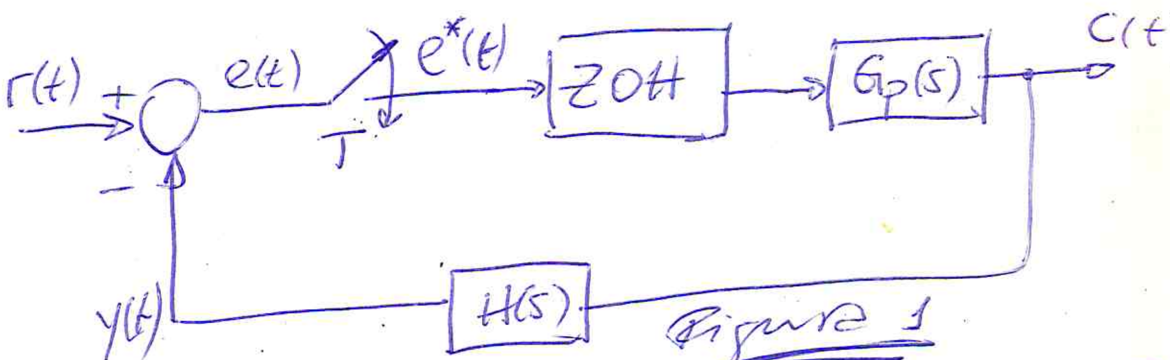


Figura 1

la señal de error se puede definir como

$$e(t) = r(t) - y(t) \qquad (1)$$

Dado q' es difícil evaluar $e(t)$ en un sist. de control digital, ya q' solo se conocen, a partir de la transformada z del mismo, los valores en los instantes de muestreo, debe ser usado p/ definir el error estacionario, el error muestreado $e^*(t)$ así:

$$e^*_{ss} = \lim_{t\to\infty} e^*(t) = \lim_{k\to\infty} e(kT) \qquad (2)$$

Si aplicamos el teorema del valor final (2) de la transformada Z de una función F(z) como siendo

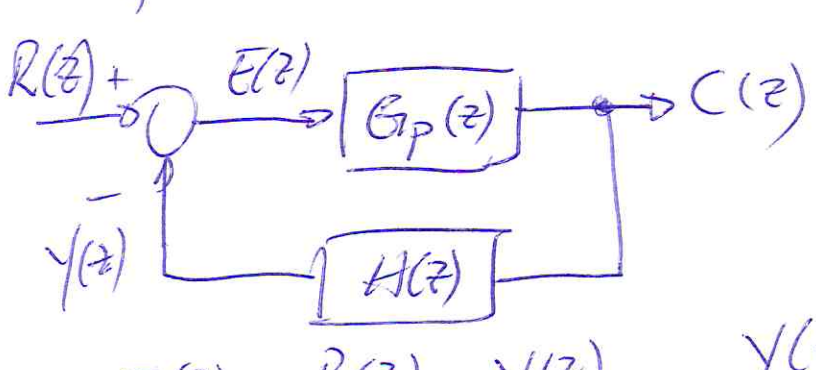
$$\lim_{K \to \infty} f(KT) = \lim_{z \to 1} (1-z^{-1}) F(z) \quad (3)$$

siendo F(z) la transf. Z de la función f(k) y sabiendo q' $(1-z^{-1})F(z)$ no tiene polos sobre el círculo unitario o fuera de este, tenemos que:

$$e^{*}_{ss} = \lim_{z \to 1} (1-z^{-1}) E(z) \quad (4)$$

donde E(z) es la transf. Z de la señal de error e(t).

Transformando el diagrama de bloques de la Figura 1 del sistema digital a un sistema de datos muestreados nos queda:



$$E(z) = R(z) - Y(z) \qquad Y(z) = C(z) \cdot H(z)$$

$$C(z) = E(z) \cdot G_p(z)$$

$$E(z) = R(z) - E(z) G_p(z) H(z)$$

$$E(z) = \frac{1}{1+G_p(z)H(z)} \cdot R(z) \quad (5)$$

Se observa en la ec. (5) q' el error de reg. perm. ~~de~~ muestreado, depende de la ref. R(z) y de la función de transf. de lazo abierto $G_p(z)\,H(z)$. Sustituyendo (5) en (4)

¡¡¡ $e^*_{ss} = \lim_{z \to 1} (1-z^{-1}) E(z)$ (6) !!!

P' el análisis se consideran 3 tipos patrones de señal de referencia: escalón
rampa
parabola

p' definir, al igual q' en un sist. de tiemp continuo, las constantes de error.

* Error "e^*_{ssp}" p/ una entrada en escalón.
Constante de error de posición, K_p^*

$$R(z) = \frac{z}{z-1} \cdot R$$ Entrada en escalón de valor "R"

$$R(z) = \frac{R}{1-z^{-1}}$$

Siendo $$e^*_{ss} = \lim_{z \to 1} (1-z^{-1}) \frac{R(z)}{1+G_p(z)H(z)} \quad (6)$$

sustituyendo R(z) en (6)

$$e^*_{ss_p} = \lim_{z \to 1} \frac{R}{1+GH} = \frac{R}{1 + \lim_{z \to 1} GH(z)} \quad (7)$$

Ecuación (6):

Tengo que: $E(z) = \dfrac{R(z)}{1 + G_p(z)H(z)}$

y además,

$$G_p(z)H(z) = \underbrace{(1 - z^{-1})}_{\equiv\,(1 - e^{-sT})} \mathcal{Z}\left[\frac{G_p(s)\,H(s)}{s}\right]$$

ZOH: $\dfrac{1 - e^{-sT}}{s}$

$$\Rightarrow \boxed{e_{ss}^{*} = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) \frac{R(z)}{1 + G_p(z)H(z)}} \quad (6)$$

Por lo tanto, la cte. de error de posición p/ un sist. discreto está dada por: (4)

$$K_p^* = \lim_{z \to 1} G_p(z)H(z) \quad (8)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{e_{ssp}^* = \frac{R}{1+K_p^*}} \quad (9)$$

A mayor valor de K_p^* menor e_{ssp}^*. P/ q/ e_{ssp}^* sea igual a cero $K_p^* = \infty$ y para eso, la F.T de lazo abierto GH debe presentar un polo en $Z = 1$.

Supongamos q/ la F.T de lazo abierto tiene la forma:

$$G_p(s)H(s) = \frac{K \prod^{i} (s+p_i)}{s^N \prod^{i} (s+z_i)}$$

con $N = 0, 1, 2, \ldots$ ~~P/ un sist. de tipo "0"~~:

$$\Rightarrow G_p(z)H(z) = (1-z^{-1}) \cdot \mathcal{Z}\left[\frac{K \prod (s+p_i)}{s^N \cdot s \cdot \prod (s+z_i)}\right]$$

Aplicando desarrollo en fracciones parciales a lo q/ se encuentra dentro del corchete, y p/ un sistema de tipo "0":

$$G_p(z)H(z) = (1-z^{-1}) \cdot \mathcal{Z}\left[\frac{K}{s} + \text{fracciones parciales de polos} \neq \text{cero}\right]$$

Los términos en fracciones parciales q' poseen polos ≠ cero, no poseen el término $(z-1)$ en el denominador. (5)

Aplicando ésta última en la (8):

$$\boxed{K_p^* = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) \frac{K.z}{z-1} = K}$$

$\Rightarrow e^*_{ss_p} = K$ (constante)

idéntica a la cte. de error de posición p/ un sist. de tiempo continuo.

Si el sistema ahora es de tipo "1":

$$G_p(z) H(z) = (1 - z^{-1}) \left[\frac{K.T.z}{(z-1)^2} + \frac{K_1 . z}{z-1} + F.P.P \neq \text{cero} \right]$$

$$K_p^* = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) \left[\frac{K.T.z}{(z-1)^2} + \frac{K_1 . z}{(z-1)} \right]$$

$$\cong \lim_{z \to 1} \frac{KT}{z-1} = \infty \quad \Rightarrow \boxed{e^*_{ss_p} = 0}$$

y p/ sistemas mayores q' tipo "1" el error $e^*_{ss_p}$ será igual a cero.

$$\begin{cases} \text{sist. tipo "0"} \Rightarrow K_p^* = K \Rightarrow e^*_{ss} = \dfrac{R}{1+K} \\ \text{sist. tipo "1"} \Rightarrow K_p^* = \infty \Rightarrow e^*_{ss} = 0 \\ \text{sist. tipo 2 o mayores} \Rightarrow K_p^* = \infty \Rightarrow e^*_{ss} = 0 \end{cases}$$

* Error e^*_{ss} p/ una entrada en rampa
Constante de error de velocidad K_v^*

La transformada Z de un función rampa

$$r(t) = t \cdot R$$

$$R(z) = \frac{R \cdot T \cdot z}{(z-1)^2}$$

$$e^*_{ss_v} = \lim_{z \to 1} \cancel{(1 - z^{-1})} \cdot \frac{R \cdot T \cdot \cancel{z}}{(z-1)^{\cancel{2}}[1 + GH]}$$

$$e^*_{ss_v} = \lim_{z \to 1} \frac{R \cdot T}{(z-1)[1 + GH]} = \frac{R}{\lim_{z \to 1} \frac{(z-1)}{T} \cdot GH}$$

$$\Rightarrow K_v^* = \frac{1}{T} \lim_{z \to 1} \left[(z-1)\, G_p(z) H(z) \right]$$

$$\Rightarrow e^*_{ss_v} = \frac{R}{K_v^*} \quad \Rightarrow K_v^* = \infty \text{ p/ } \text{q/ } e^*_{ss_v} = 0$$

Por lo tanto, por el análisis realizado anteriormente, esto sucede p/ sistemas de tipo "2", o sea con 2 polos en $z = 1$.

Entonces:
- p/ sist. de tipo "0" $\Rightarrow K_v^* = 0 \Rightarrow e^*_{ss_v} = \infty$
- p/ sist. de tipo "1" $\Rightarrow K_v^* = K \Rightarrow e^*_{ss_v} = \frac{R}{K}$
- p/ sist. de tipo "2" o mayores $\Rightarrow K_v^* = \infty \Rightarrow e^*_{ss_v} = 0$

* Error "e^*_{ssa}" p/ una entrada en parábola — constante de error discreta de aceleración K_a^*

Siendo $r(t) = R.\frac{t^2}{2}$, la $\mathcal{Z}[r(t)]$ es

$$R(z) = \frac{R.T^2.z(z+1)}{2.(z-1)^3}$$

$$e^*_{ssa} = \lim_{z\to 1} (1-z^{-1}).\frac{R.T^2 z.(z+1)}{2.(z-1)^3.(1+GH)}$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{R.T^2 \overbrace{(z+1)}^{2}}{\cancel{2}.(z-1)^2(1+GH)}$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{R}{\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)^2}{T^2}(GH)}$$

$$\Rightarrow K_a^* = \frac{1}{T^2}.\lim_{z\to 1}\left[(z-1)^2(GH)\right]$$

$$e^*_{ssa} = \frac{R}{K_a^*} \quad \text{p/q/ } e^*_{ssa} = 0 \Rightarrow K_a^* = \infty$$

y p/ esto el sistema debe ser de tipo "3" ó mayor, o sea, debe poseer 3 polos en $z=1$.

Entonces:

- Sist. tipo "0" $\Rightarrow K_a^* = 0 \Rightarrow e^*_{ssa} = \infty$
- Sist. tipo "1" $\Rightarrow K_a^* = 0 \Rightarrow e^*_{ssa} = \infty$
- Sist. tipo "2" $\Rightarrow K_a^* = K \Rightarrow e^*_{ssa} = R/K$
- Sist. tipo "3" ó mayor $\Rightarrow K_a^* = \infty \Rightarrow e^*_{ssa} = 0$

8

$$\frac{1}{T}\lim_{z\to1}(z-1)\cdot\frac{\cancel{(z-1)}}{\cancel{z}}\times\frac{K.\cancel{z}}{\cancel{(z-1)}}=0$$

$K_v^*=0$

$e_{ssv}^*=\infty$ | $N=0$

$$\frac{1}{T}\lim_{z\to1}\frac{(z-1)^2}{z}\times\left[\frac{K.T.z}{(z-1)^2}+\frac{K_1.z}{(z-1)}\right]\times$$

$$\frac{1}{T}\lim_{z\to1}\left[K.T+\underbrace{K_1.(z-1)}_{0}\right]=\underline{K}$$

$K_v^*=K$

$e_{ssv}^*=\frac{R}{K}$ | $N=1$

$$\lim_{z\to1}\frac{\cancel{(z-1)}^3}{\cancel{z}}\cdot\left[\frac{K.T^2\cancel{z}.\cancel{(z+1)}}{\cancel{2}\cancel{(z-1)}^{3\,2}}\right]\cdot\frac{1}{\cancel{T^2}}=\infty$$

$$K_a^*=\frac{1}{T^2}\lim_{z\to1}\left[\cancel{(z-1)^2}\times\frac{\cancel{(z-1)}}{\cancel{z}}\times\frac{K.T^2.\cancel{z}.\cancel{(z+1)}}{\cancel{z}.\cancel{(z-1)^3}}\right]$$

$\boxed{K_a^*=K}$ (tipo "2") OK

tipo "0"

$$K_a^*=\frac{1}{T^2}\lim_{z\to1}\left[(z-1)^2\cdot\frac{\cancel{(z-1)}}{\cancel{z}}\times\frac{K.\cancel{z}}{\cancel{(z-1)}}\right]=0$$

$\Rightarrow e_{ssa}^*=\infty$

$\boxed{K_a^*=0}$ (tipo "0") OK

tipo "1"

$$K_a^*=\frac{1}{T^2}\lim_{z\to1}\left[\cancel{(z-1)^2}\cdot\frac{(z-1)}{\cancel{z}}\times\frac{K.T.\cancel{z}}{\cancel{(z-1)^2}}\right]=0$$

$\boxed{K_a^*=0}$ (tipo "1") $\Rightarrow e_{ssa}^*=\infty$

Escritório Regional de Santa Catarina (ERESC)
Avenida Rio Branco, 387, 5º andar
Edifício Rio Branco
CEP 88015-201, Florianópolis – SC
Telefones: (48) 3224-7808
Fax: (48) 3224-7808
E-mail: eresc@th.com.br