



# **DISEÑO DE CONTROLADORES DIGITALES**

## **SISTEMAS DE CONTROL 2**

**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA**

**FACULTAD DE INGENIERÍA – U.Na.M**

**PROFESOR RESPONSABLE: FERNANDO BOTTERÓN**

## Índice

1. Diseño de Controladores Digitales .....	3
A. Discretización de controladores proyectados en el dominio continuo: “Rediseño Digital” .....	3
2. Técnicas de Discretización .....	11
A. Discretización de controladores PID .....	11
B. Aproximación con mantenedor de orden cero o invariante al escalón .....	13
C. Mapeo de diferencias .....	14
D. Integración Rectangular: Método de Euler o Forward Difference .....	15
E. Transformación Bilineal o Transformación de Tustin .....	16
3. Diseño de Controladores en el Dominio de Tiempo Discreto .....	17
A. Controlador Deadbeat o de Respuesta de Tiempo Mínimo .....	17
B. Controlador OSAP (One Sampling Ahead Preview) .....	24

## 1. Diseño de Controladores Digitales

### A. Discretización de controladores proyectados en el dominio continuo: “Rediseño Digital”

En el caso que se desee utilizar un controlador digital basado en el argumento de que el *hardware* correspondiente es más económico y flexible, es posible encontrar un sistema muestreado o sistema digital que reproduzca el comportamiento del sistema de control original en tiempo continuo. Por tanto, podemos utilizar cualquier técnica de proyecto en el dominio continuo y a continuación discretizar el controlador resultante, tratando siempre de satisfacer los requisitos originales del proyecto. Veamos esto a través de un ejemplo:

Sea el sistema de control mostrado en la Figura 1.

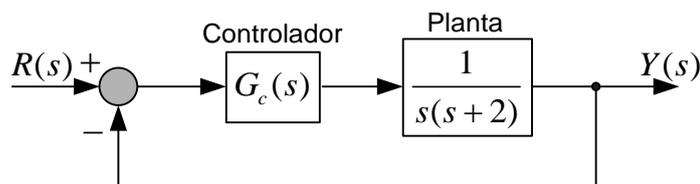


Figura 1 – Sistema de control considerado para *rediseño digital*.

Sean las especificaciones de desempeño en lazo cerrado, las siguientes: frecuencia natural no amortiguada  $\omega_n = 3$  rad/seg y factor de amortiguamiento  $\xi = 0,5$ . Estas especificaciones pueden ser obtenidas con el siguiente compensador de adelanto de fase:

$$G_c(s) = 9 \frac{s+2}{s+3} \quad (1)$$

Con este controlador obtenemos la siguiente función de transferencia de lazo cerrado (ver `digital_redesign_ejemplo1.m`),

$$G_{lc}(s) = \frac{9}{s^2 + 3s + 9} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2)$$

La respuesta al escalón para este sistema de control en tiempo continuo resulta como se muestra en la Figura 2.

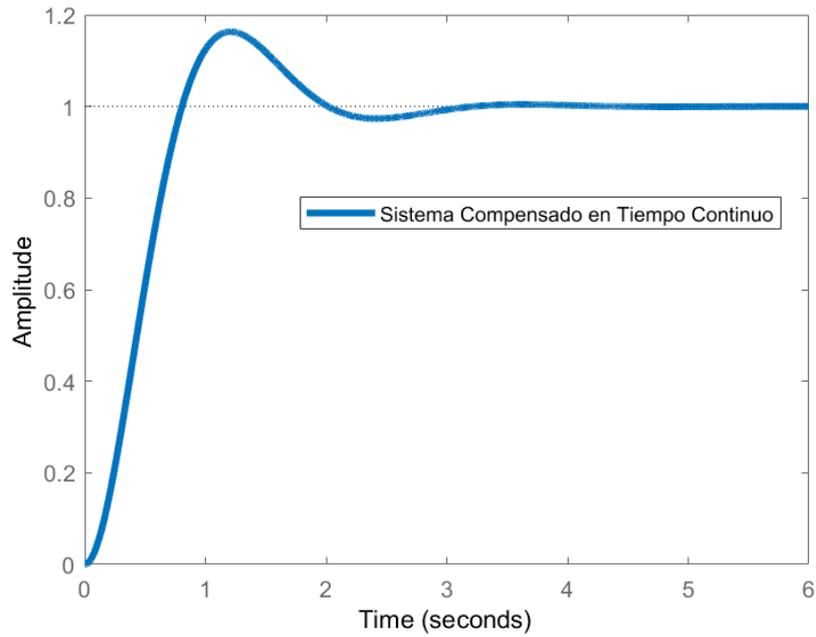


Figura 2 – Respuesta a una entrada en escalón del sistema de control de la Figura 1.  
 $M_p = 16,3\%$  y  $t_s = 2,69$  segundos

Los márgenes de estabilidad resultantes del sistema compensado se pueden observar en la siguiente figura:

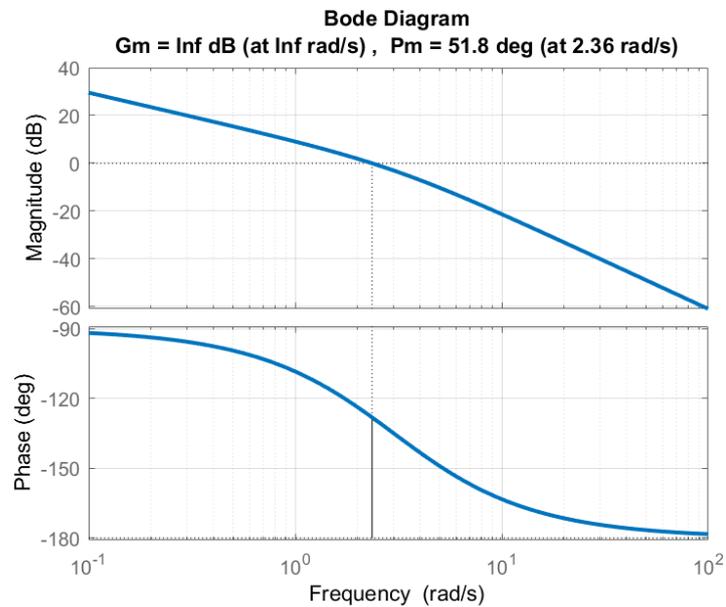


Figura 3 – Respuesta en frecuencia de lazo abierto del sistema de control de la Figura 1.  
 $MP = 51,8^\circ$  y  $MG = \text{infinito}$ .

El sistema de control digital correspondiente a la estructura de la Figura 1, puede representarse según [1] de la siguiente forma:

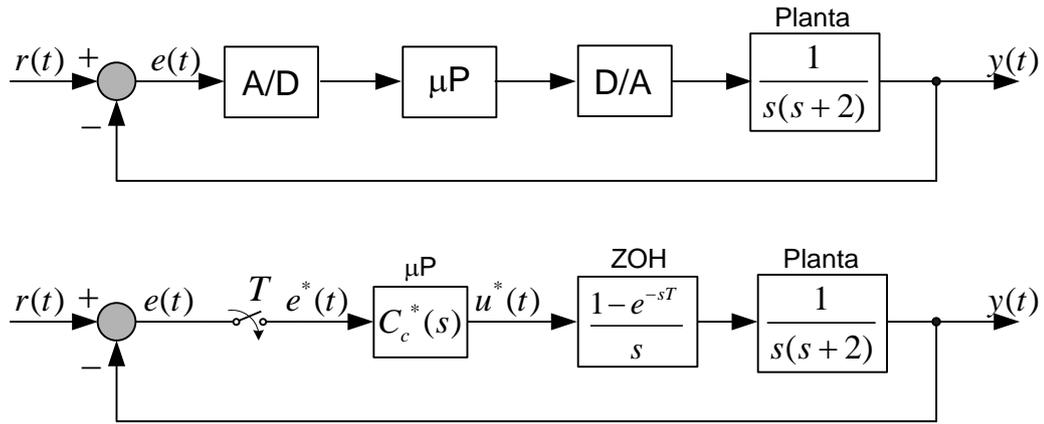


Figura 4 – Implementación digital del sistema de control de la Figura 1.

Consideremos para este caso un período de muestreo de  $T = 0,1$  seg. El problema se resume en determinar un compensador o filtro digital  $G_{cd}(z)$  cuya respuesta sea semejante a la del compensador dado en (1). Utilizaremos la aproximación del tipo retenedor de orden cero o invariante al escalón, como se representa en la figura abajo:



Figura 5 – Aproximación invariante al escalón para  $G_c(s)$ .

La función de transferencia del compensador en el dominio de tiempo discreto de Figura 5 puede obtenerse como sigue:

$$U(z) = E(z)G_{cd}(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}G_{cd}(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1}{s}G_c(s)\right]. \quad (3)$$

De la ecuación (3) resulta la siguiente función de transferencia discreta:

$$G_{cd}(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s}G_c(s)\right]. \quad (4)$$

La ecuación (4) puede ser resuelta utilizando la expresión mostrada en (5) con base en el teorema del residuo de Cauchy, esto es:

$$Y(z) = \sum_i \text{Residuo}\left[\frac{z}{z-e^{sT}}Y(s), p_i\right], \text{ donde } p_i \text{ es el } i\text{-ésimo polo de } Y(s). \quad (5)$$

Así, para hallar la transformada  $\mathcal{Z}$  de una función de transferencia en el dominio  $s$ , aplicamos la (5), o sea:

$$G_{cd}(z) = (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left[\frac{9(s+2)}{s(s+3)}\right] = (1-z^{-1})\left\{\lim_{s \rightarrow 0}\left(\frac{9(s+2)z}{(s+3)(z-e^{sT})}\right) + \lim_{s \rightarrow -3}\left(\frac{9(s+2)z}{s(z-e^{sT})}\right)\right\}. \quad (6)$$

La última ecuación resulta en la siguiente función de transferencia:

$$G_{cd}(z) = \frac{9z - 6e^{-3T} - 3}{z - e^{-3T}}. \quad (7)$$

Para el periodo de muestreo escogido más arriba de  $T = 0,1$  segundos, esta última resulta:

$$G_{cd}(z) = \frac{9z - 7,445}{z - 0,741} \tag{8}$$

Factorizando la variable  $z$  en el numerador y denominador, podemos reescribir (8) de la siguiente forma,

$$G_{cd}(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{9 - 7,445z^{-1}}{1 - 0,741z^{-1}} \tag{9}$$

Para saber cuál es la operación que debe efectuar el microprocesador debemos hallar la ecuación a diferencias o lo que es lo mismo, la transformada  $\mathcal{Z}$  inversa de la (9), esto es:

$$U(z)(1 - 0,741z^{-1}) = E(z)(9 - 7,445z^{-1}) \tag{10}$$

luego,

$$U(z) = 9E(z) - 7,445z^{-1}E(z) + 0,741z^{-1}U(z) \tag{11}$$

Algunas transformadas  $\mathcal{Z}$  de ecuaciones a diferencia pueden ser resumidas en la siguiente tabla:

Tabla I. Transformadas  $\mathcal{Z}$  de  $y(k+n)$  e  $y(k-n)$

<b>Función discreta</b>	<b>Transformada <math>\mathcal{Z}</math></b>
$y(k+4)$	$z^4Y(z) - z^4Y(0) - z^3Y(1) - z^2Y(2) - zY(3)$
$y(k+3)$	$z^3Y(z) - z^3Y(0) - z^2Y(1) - zY(2)$
$y(k+2)$	$z^2Y(z) - z^2Y(0) - zY(1)$
$y(k+1)$	$zY(z) - zY(0)$
$y(k)$	$Y(z)$
$y(k-1)$	$z^{-1}Y(z)$
$y(k-2)$	$z^{-2}Y(z)$
$y(k-3)$	$z^{-3}Y(z)$
$y(k-4)$	$z^{-4}Y(z)$

Utilizando la Tabla I podemos obtener nuestra ecuación a diferencias como sigue:

$$u(kT) = 9e(kT) - 7,445e[(k-1)T] + 0,741u[(k-1)T] \tag{12}$$

o de una forma más simple, omitiéndose el periodo de muestreo  $T$ ,

$$u(k) = 9e(k) - 7,445e(k-1) + 0,741u(k-1) \tag{13}$$

A continuación se muestran las respuestas al escalón unitario para el sistema en tiempo continuo de la Figura 1 y para el mismo sistema implementado digitalmente según la Figura 4.

La Figura 6 muestra la comparación de ambos sistemas para un periodo de muestreo  $T = 0,1$  seg y la Figura 7 para  $T = 0,025$  seg.

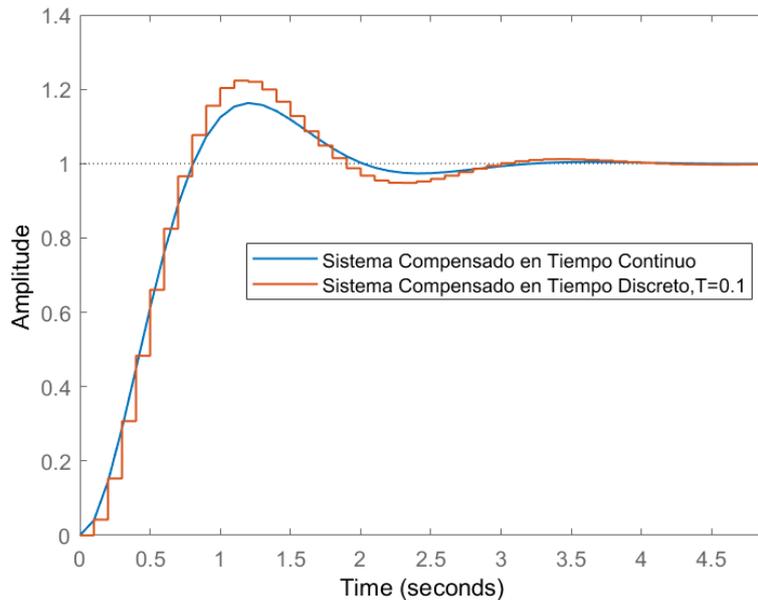


Figura 6 – Respuesta al escalón para los sistemas continuos y discretos.  $T = 0,1$  seg.  $M_p = 22,3\%$

Como se observa en la Figura 6 y en la Figura 7, el aumento de la frecuencia de muestreo resulta en una mejor aproximación del sistema en tiempo discreto al sistema en tiempo continuo de la Figura 1, permitiendo que se verifiquen con mayor precisión las especificaciones de desempeño transitorio. No obstante, es importante, en la medida que se disminuye el periodo de muestreo, verificar si el sistema en lazo cerrado resulta estable, utilizando el diagrama de Nyquist o las respuestas en frecuencia del sistema en tiempo discreto.

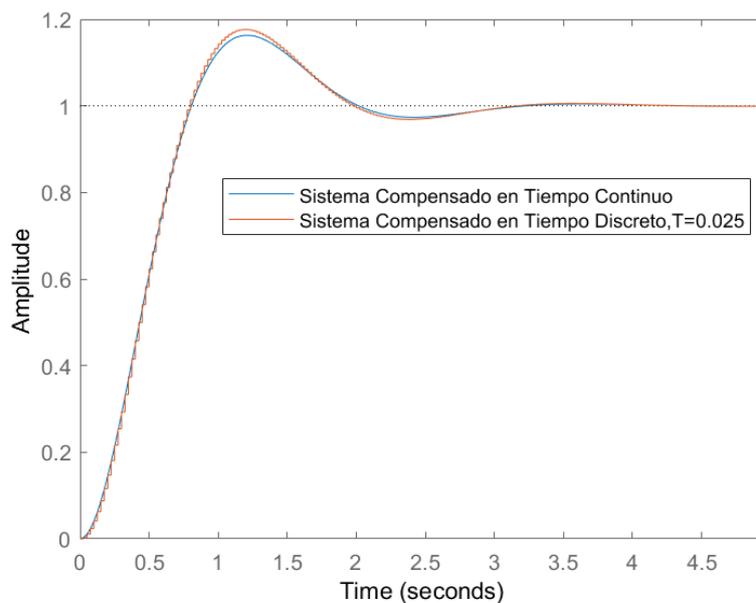


Figura 7 – Respuesta al escalón para los sistemas continuo y discreto.  $T = 0,025$  seg.  $M_p = 17,6\%$

Otra forma de verificar la estabilidad sería a partir del cálculo de los polos de la función de transferencia de lazo cerrado, verificando que estos se encuentran dentro del círculo unitario. Para los dos casos simulados anteriormente, se muestra a continuación la representación de los polos y ceros de lazo cerrado:

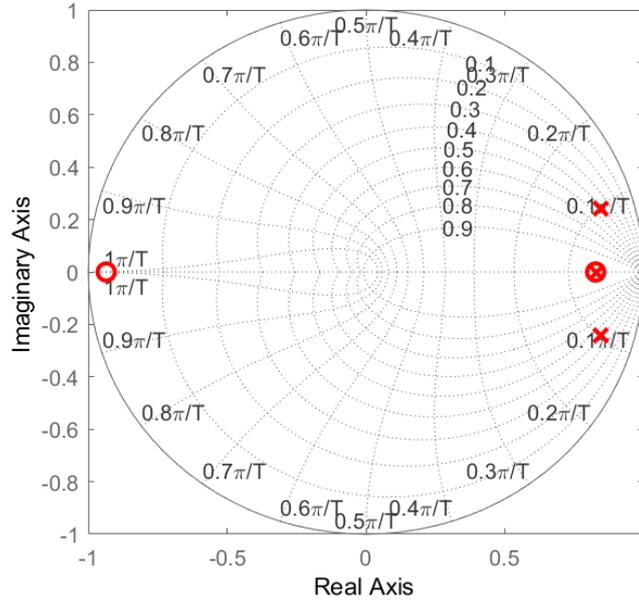


Figura 8 – Polos y ceros de lazo cerrado.  $T = 0,1$  seg.  $\omega_n = 3,08$  rad/s y  $\xi = 0,424$ .

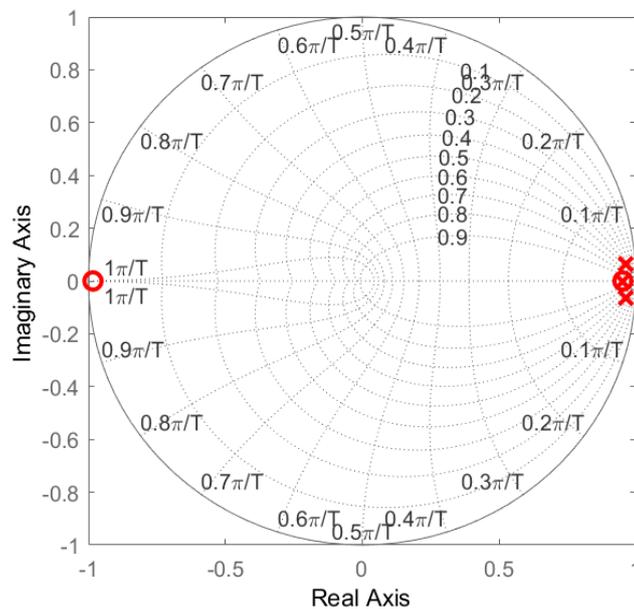


Figura 9 – Polos y ceros de lazo cerrado.  $T = 0,025$  seg.  $\omega_n = 3,02$  rad/s y  $\xi = 0,482$ .

Se observa en la Figura 9 un pequeño aumento del coeficiente de amortiguamiento y una brusca disminución de la frecuencia natural de los polos de lazo cerrado, lo que se traduce en una disminución del sobrepaso, respecto al caso de la Figura 8, haciendo que la respuesta al escalón sea prácticamente igual a la del sistema continuo. Si quisiéramos hacer que la respuesta del sistema digital sea igual a la del sistema continuo deberíamos aumentar aún más la frecuencia de

muestreo. Simulamos nuestro sistema entonces para  $T = 0,001$  seg, y la respuesta al escalón es la que se muestra a continuación:

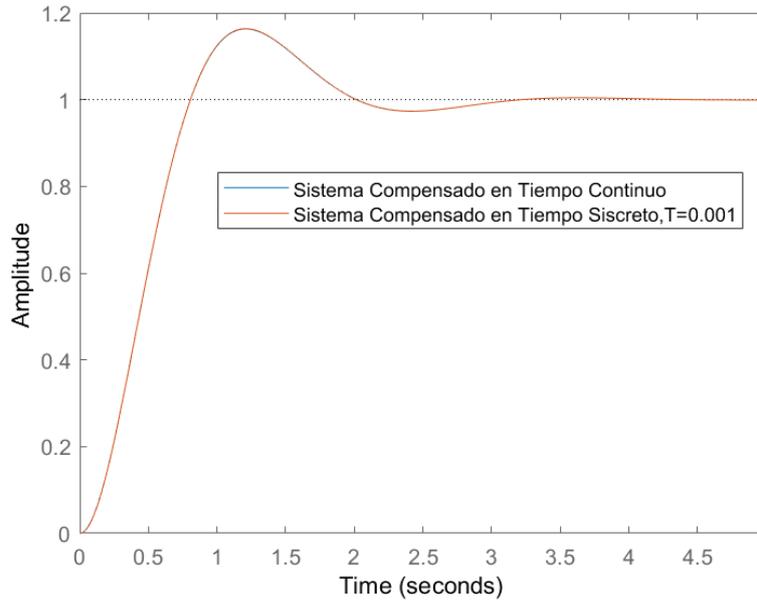


Figura 10 – Respuesta al escalón para los sistemas continuos y discretos.  $T = 0,001$  seg.

Como se observa en la Figura 10 que la salida del sistema en tiempo discreto prácticamente coincide con la salida del sistema en tiempo continuo, para el periodo de muestreo considerado. Esto puede verificarse en la ubicación de los polos de lazo cerrado mostrados en la Figura 11 y Figura 12. Se observa en la Figura 12, la cual muestra una ampliación de la región cercana a  $z = 1$ , que los polos complejos conjugados cumplen con las especificaciones transitorias de  $\omega_n = 3$  rad/s y  $\xi = 0,5$ . A la vez, el polo real de lazo cerrado se cancela con el cero impuesto por el compensador de adelanto de fase, esto es:  $\text{cero} = e^{-2T} = 0,998$  rad/s y  $\text{polo} = e^{-2T} = 0,998$  rad/s .

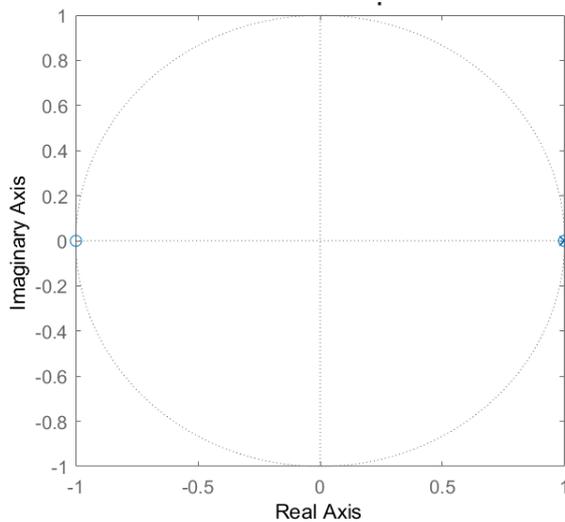


Figura 11 – Polos y ceros de lazo cerrado.  $T = 0,001$  seg.

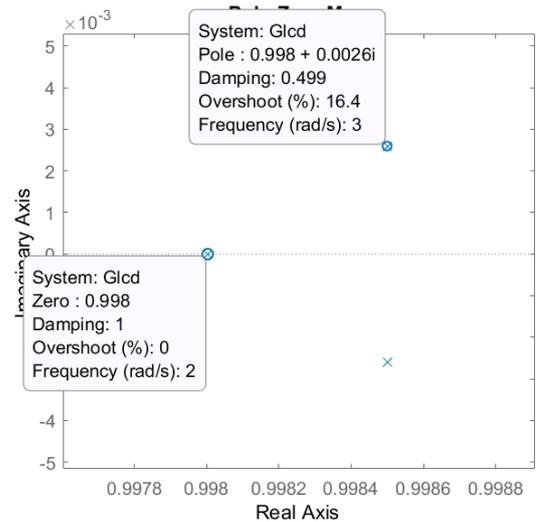


Figura 12 – Polos y ceros de lazo cerrado.  $T = 0,001$  seg. Región próxima a  $z = 1$ .

En resumen, se puede concluir que la respuesta del sistema de control se deteriora en la medida que el período  $T$  aumenta, debido al atraso de transporte que introduce el retenedor de orden cero, lo que se traduce en una dinámica dominante de lazo cerrado que afecta directamente al desempeño transitorio. Esta situación provoca que la estabilidad relativa se reduzca para valores grandes de  $T$ . Por el contrario, el desempeño dinámico del sistema en tiempo discreto se aproxima al desempeño del sistema en tiempo continuo en la medida que la frecuencia de muestreo aumenta, o el periodo  $T$  disminuye, con el consiguiente aumento de carga computacional para un mismo procesador digital.

Por otro lado, es importante realizar algunas simulaciones para observar el rango dinámico de todas las señales en juego, especialmente de la acción de control resultante, y poder detectar si existe saturación de la misma, antes de efectuar los ensayos en el sistema digital real. Puede apreciarse en la Figura 13 la comparación de las acciones de control en tiempo continuo y de tiempo discreto para  $T = 0,1$  seg. El valor máximo es fácilmente realizable sin provocar saturaciones tanto para la implementación en tiempo continuo como en tiempo discreto. Hay solamente un valor máximo negativo un poco mayor para la acción de control en tiempo discreto. Para un periodo mucho menor,  $T = 0,001$  seg., ambas acciones de control coinciden.

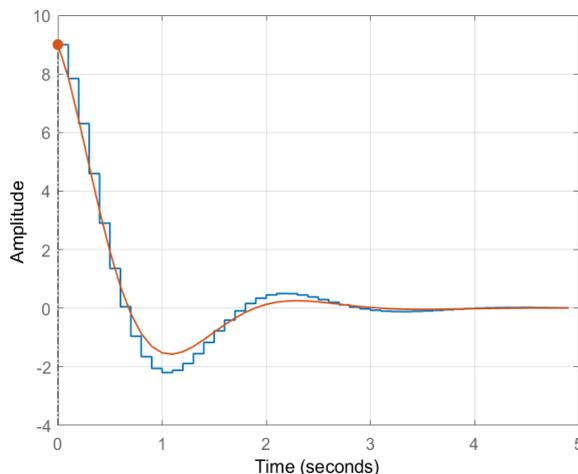


Figura 13 – Acciones de control en tiempo continuo (línea roja) y en tiempo discreto (línea azul).  $T = 0,1$  seg.

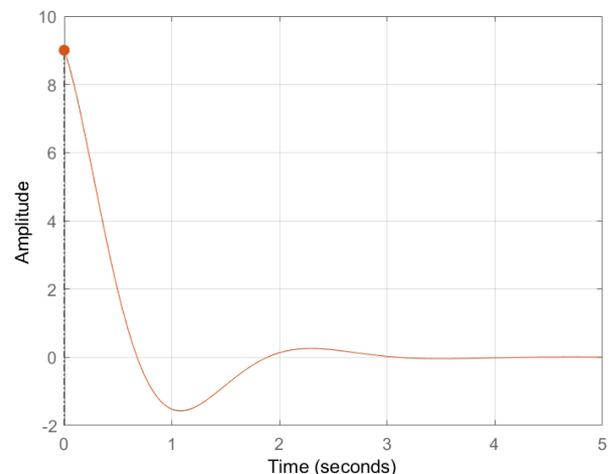


Figura 14 – Acciones de control en tiempo continuo (línea roja) y en tiempo discreto (línea azul).  $T = 0,001$  seg.

En la Figura 15 se observan los márgenes de estabilidad relativa para el sistema de lazo cerrado en tiempo discreto y tiempo continuo. Se puede apreciar la diferencia en los márgenes de fase debido al valor elegido de  $T$ , y, además, aparece un margen de ganancia en el sistema en tiempo discreto debido al corte en  $-180^\circ$  de la curva de fase por la presencia del ZOH, el cual impone un atraso de transporte que incrementa la fase por arriba de los  $-180^\circ$ . Este efecto prácticamente desaparece para el  $T = 0,001$  s, Figura 16; dándose el corte en  $-180^\circ$  en las altas frecuencias, lo que se traduce en un MG elevado para el sistema en tiempo discreto.

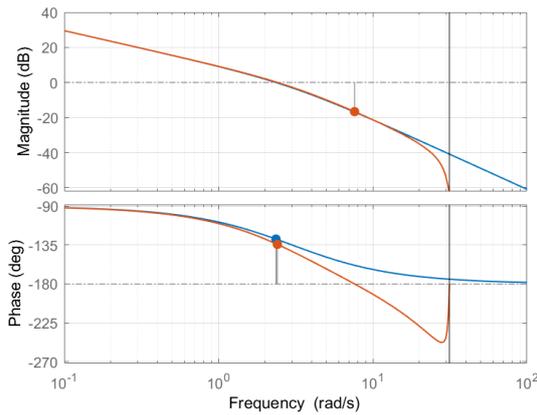


Figura 15 – Respuestas en frecuencia de lazo abierto. Tiempo discreto (rojo) con  $T = 0,1$  s.  
Tiempo continuo (azul).  
MG (TD) = 16,6 dB y MF (TD) = 45,7°.  
MF (TC) = 51,8°.

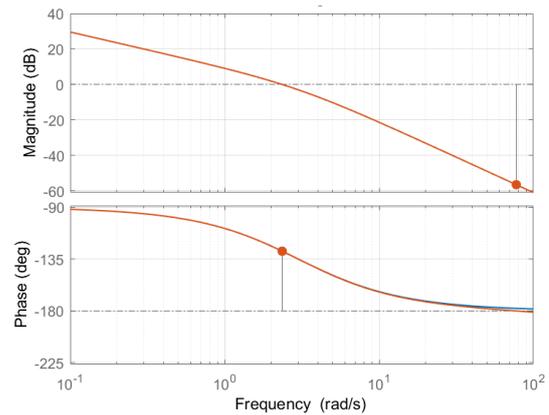


Figura 16 – Respuestas en frecuencia de lazo abierto. Tiempo discreto (rojo) con  $T = 0,001$  s.  
Tiempo continuo (azul).  
MG (TD) = 56,5 dB y MF = 51,8° (TD y TC).

## 2. Técnicas de Discretización

### A. Discretización de controladores PID

En esta sección consideraremos algunas técnicas generales para la discretización de controladores proyectados en el dominio continuo. En primer lugar, debido a la gran aplicabilidad de controladores PID, consideraremos especialmente la discretización de estos compensadores. Supongamos entonces que hemos obtenido los parámetros de un PID analógico por alguna técnica de proyecto dada. Para obtener el controlador digital, podemos entonces usar algunas de las aproximaciones siguientes:

#### 1° Aproximación:

Derivación: La derivada de la señal de error puede aproximarse por la diferencia entre dos muestras sucesivas, o sea:

$$\frac{de(t)}{dt} = \frac{e(kT) - e[(k-1)T]}{T}. \quad (14)$$

Integración: La integral de la señal de error puede aproximarse de la siguiente forma:

$$\int_0^{kT} e(t)dt = T \sum_{i=1}^k e(iT). \quad (15)$$

Luego, tenemos:

en  $kT$ ,

$$u(k) = K_p e(k) + K_i T \sum_{i=1}^k e(i) + K_d \frac{e(k) - e(k-1)}{T}. \quad (16)$$

en  $(k-1)T$ ,

$$u(k-1) = K_p e(k-1) + K_i T \sum_{i=1}^{k-1} e(i) + K_d \frac{e(k-1) - e(k-2)}{T}. \quad (17)$$

En un intervalo de muestreo  $T$ , la acción de control PID resulta:

$$u(k) - u(k-1) = K_p [e(k) - e(k-1)] + K_i T e(k) + \frac{K_d}{T} [e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)]. \quad (18)$$

Observe que, suponiendo  $k = 3$ , la integración en un periodo de muestreo resulta:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^k e(i) &= e(1) + e(2) + e(3) \\ \sum_{i=1}^{k-1} e(i) &= e(1) + e(2) \end{aligned} \right\} \sum_{i=1}^k e(i) - \sum_{i=1}^{k-1} e(i) = e(3) \Rightarrow e(k). \quad (19)$$

Finalmente, la ecuación que debe ser implementada en el microprocesador resulta:

$$u(k) = u(k-1) + [K_p + K_i T + \frac{K_d}{T}]e(k) - [K_p + \frac{2K_d}{T}]e(k-1) + \frac{K_d}{T} e(k-2). \quad (20)$$

**2° Aproximación:**

Derivación: Para aproximar la derivada de la señal de error se usa la anterior.

Integración: Para la integral de la señal de error utilizamos la aproximación trapezoidal:

$$\begin{aligned} \int_0^{kT} e(t) dt &= T \left[ \frac{e(0) + e(T)}{2} + \frac{e(T) + e(2T)}{2} + \dots + \frac{e(k-1)T + e(kT)}{2} \right] = \\ &= T \sum_{i=1}^k \frac{e(i-1)T + e(iT)}{2} \end{aligned} \quad (21)$$

La ecuación (21) se explica a través de la Figura 17.

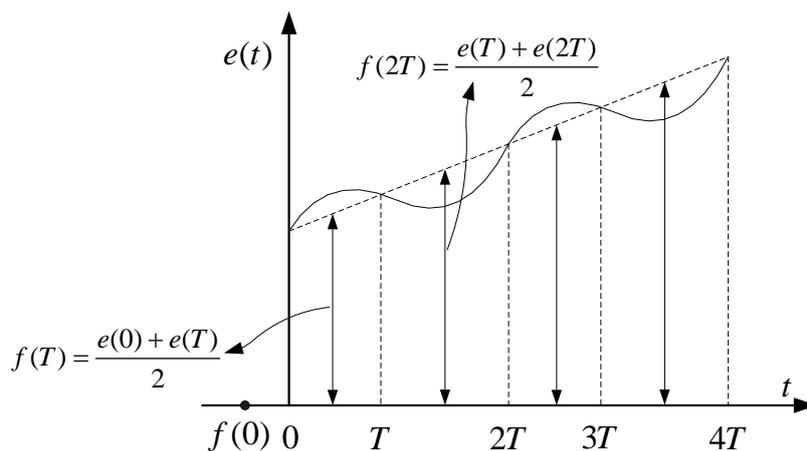


Figura 17 – Representación gráfica de la aproximación trapezoidal.

Luego, tenemos:

en  $kT$ ,

$$u(k) = K_p e(k) + K_i T \sum_{i=1}^k \frac{e(i-1) + e(i)}{2} + K_d \frac{e(k) - e(k-1)}{T}. \quad (22)$$

en  $(k-1)T$ ,

$$u(k-1) = K_p e(k-1) + K_i T \sum_{i=1}^{k-1} \frac{e(i-1) + e(i)}{2} + K_d \frac{e(k-1) - e(k-2)}{T}. \quad (23)$$

En un intervalo de muestreo  $T$ , la acción de control PID resulta:

$$u(k) - u(k-1) = K_p [e(k) - e(k-1)] + K_i T \left[ \frac{e(k-1) + e(k)}{2} \right] + \frac{K_d}{T} [e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)]. \quad (24)$$

Observe que, suponiendo  $k=2$ , la integración en un periodo de muestreo resulta:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{e(i-1) + e(i)}{2} &= \frac{e(0) + e(1)}{2} + \frac{e(1) + e(2)}{2} \\ \sum_{i=1}^{k-1} \frac{e(i-1) + e(i)}{2} &= \frac{e(0) + e(1)}{2} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k \frac{e(i-1) + e(i)}{2} - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{e(i-1) + e(i)}{2} = \frac{e(1) + e(2)}{2} = \frac{e(k-1) + e(k)}{2}$$

Finalmente, la ecuación que debe ser implementada en el microprocesador resulta:

$$u(k) = u(k-1) + \left[ K_p + \frac{K_i T}{2} + \frac{K_d}{T} \right] e(k) - \left[ K_p - \frac{K_i T}{2} + \frac{2K_d}{T} \right] e(k-1) + \frac{K_d}{T} e(k-2). \quad (26)$$

A continuación, vamos a considerar algunas técnicas generales para discretización de controladores proyectados en el dominio continuo.

## B. Aproximación con mantenedor de orden cero o invariante al escalón

Esta aproximación ya la vimos anteriormente. Aquí presentaremos una justificativa más formal. Consideremos los sistemas continuo y discreto mostrados en la figura.



Figura 18 – Procedimiento para la obtención de la aproximación invariante al escalón.

Para que la respuesta sea invariante a una entrada en escalón se debe imponer la condición de que  $\bar{u}(kT)$  coincida con los valores de  $u(t)$  para  $t = kT$ . Esta condición resulta en la siguiente igualdad:

$$\left( \frac{1}{1-z^{-1}} \right) G_{cd}(z) = \mathcal{Z} \left[ \frac{1}{s} G_c(s) \right]. \quad (27)$$

De esta última ecuación se tiene,

$$G_{cd}(z) = (1-z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{1}{s} G_c(s) \right]. \quad (28)$$

### C. Mapeo de diferencias

Sea  $u(t) = \frac{de(t)}{dt}$ . Entonces, sustituyéndose la derivada por la aproximación de Backward de primer orden, o sea

$$u(t) = \frac{de(t)}{dt} \approx \frac{e(t) - e(t-T)}{T}. \quad (29)$$

resulta que,

$$U(s) = sE(s) \rightarrow U(z) \approx \frac{1-z^{-1}}{T} E(z). \quad (30)$$

De la última ecuación (30) observamos que se puede sustituir  $s$  por  $\frac{1-z^{-1}}{T}$ , o sea:

$$G_{cd}(z) = G_c(s) \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}}. \quad (31)$$

Esta técnica de discretización se caracteriza por la extrema simplicidad siendo fácilmente programable en un microprocesador. Ejemplo: Sea la siguiente función de transferencia en tiempo continuo:

$$G_c(s) = \frac{9(s+2)}{(s+3)}. \quad (32)$$

Sustituyendo  $s$  por  $\frac{1-z^{-1}}{T}$  en (32), tenemos:

$$G_{cd}(z) = \frac{9(s+2)}{(s+3)} \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{9(1-z^{-1}+2T)}{1-z^{-1}+3T} = \frac{9+18T-9z^{-1}}{1+3T-z^{-1}}. \quad (33)$$

factorizando  $1+3T$ , la última nos queda:

$$G_{cd}(z) = \frac{9(s+2)}{(s+3)} \Big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{(9+18T-9z^{-1})/(1+3T)}{1-(z^{-1}/(1+3T))} = \frac{U(z)}{E(z)}. \quad (34)$$

Para obtener la expresión a diferencias, hacemos:

$$U(z) \left[ 1 - (z^{-1}/(1+3T)) \right] = E(z) \left[ (9+18T-9z^{-1})/(1+3T) \right]. \quad (35)$$

y utilizando las relaciones de la Tabla I, tenemos finalmente:

$$u(k) = \frac{1}{1+3T} \left[ u(k-1) + (9+18T)e(k) - 9e(k-1) \right]. \quad (36)$$

### D. Integración Rectangular: Método de Euler o Forward Difference

Supongamos que utilizamos la aproximación  $u(kT) = T \sum_{i=0}^{k-1} e(iT)$  para la integral

$u(kT) = \int_0^{kT} e(t)dt$ , a partir de la Figura 19, donde la altura del rectángulo viene dada por la amplitud de la muestra en el instante anterior, o sea  $e[(k-1)T]$ .

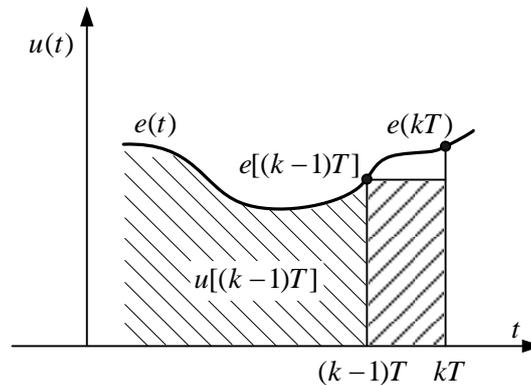


Figura 19 – Método *forward* de integración rectangular.

$$u(kT) = u[(k-1)T] + Te[(k-1)T] \Rightarrow U(z) = \frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}} E(z) \Rightarrow U(z) = \frac{T}{z-1} E(z). \quad (37)$$

y dado que  $u(t)$  es la integral de  $e(t)$ , tenemos también que  $U(s) = \frac{1}{s} E(s)$ . De esta forma, y

teniendo en cuenta la (37), sustituimos  $\frac{1}{s}$  por  $\frac{T}{z-1}$ , resultando,

$$G_{cd}(z) = G_c(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T}}. \quad (38)$$

Ejemplo: Sea el siguiente compensador

$$G_c(s) = \frac{9(s+2)}{(s+3)}. \quad (39)$$

Sustituyendo  $s$  por  $\frac{z-1}{T}$  en (39), tenemos:

$$G_{cd}(z) = \frac{9(s+2)}{(s+3)} \Big|_{s=\frac{z-1}{T}} = \frac{9(z-1+2T)}{z-1+3T} = \frac{9+(18T-9)z^{-1}}{1+(3T-1)z^{-1}}. \quad (40)$$

Considerando un  $T = 0,1$  segundo:

$$G_{cd}(z) = \frac{9-7,2z^{-1}}{1-0,7z^{-1}}. \quad (41)$$

y la ecuación a diferencias resulta:

$$u(k) = 0,7u(k-1) + 9e(k) - 7,2e(k-1). \quad (42)$$

### E. Transformación Bilineal o Transformación de Tustin

Supongamos ahora que utilizamos la aproximación trapezoidal para la integral del error, o

sea  $u(kT) = u[(k-1)T] + \frac{T}{2} \sum_{i=0}^{k-1} e(iT) + e[(i-1)T]$ . De esta aproximación podemos escribir que,

$$u(k) - u(k-1) = \frac{T}{2} [e(k-1) + e(k)] \Rightarrow U(z) = \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} E(z). \quad (43)$$

De esta última ecuación se observa que la función de transferencia del compensador  $G_{cd}(z)$  puede ser obtenida sustituyéndose  $\frac{1}{s}$  por  $\frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}$ , resultando,

$$G_{cd}(z) = G_c(s) \Big|_{s=\frac{2z-1}{Tz+1}}. \quad (44)$$

Consideremos el compensador de los ejemplos anteriores y realícese la sustitución dada en (44):

$$G_{cd}(z) = \frac{9(s+2)}{(s+3)} \Big|_{s=\frac{2z-1}{Tz+1}} = \frac{9\left(\frac{2z-1}{Tz+1} + 2\right)}{\left(\frac{2z-1}{Tz+1} + 3\right)} = \frac{9(2z-2+2Tz+2T)}{2z-2+3Tz+3T}. \quad (45)$$

Distribuyendo términos y factorizando  $z^{-1}$  en el numerador y denominador tenemos:

$$G_{cd}(z) = \frac{(18+18T)z+18T-18}{(2+3T)z+3T-2} = \frac{18+18T+(18T-18)z^{-1}}{2+3T+(3T-2)z^{-1}} = \frac{U(z)}{E(z)}. \quad (46)$$

A partir de las relaciones de la Tabla I, se obtiene finalmente:

$$u(k) = \frac{1}{2+3T} [(18+18T)e(k) + (18T-18)e(k-1) - (3T-2)u(k-1)]. \quad (47)$$

Considerando, por ejemplo,  $T = 0,1$  segundo:

$$u(k) = 8,609e(k) - 7,04e(k-1) + 0,739u(k-1). \quad (48)$$

## Referencias Bibliográficas

- [1] Charles L. Phillips and H.Troy Nagle, “Digital Control Systems Analysis and Design”, Third Edition, Prentice Hall, 1995.
- [2] Kart J. Aström and Björn Wittenmark, “Computer Controlled Systems, Theory and Design”, Third Edition, Prentice Hall, 1997.
- [3] Benjamín, C. Kuo, “Sistemas de Control Digital”, Segunda edición en Ingles, Primera edición en español, CECSA, 1997.
- [4] Kawamura, A., Haneyoshi, T., Hoft, R. G., “Deadbeat Controlled PWM Inverter with Parameter Estimation Using Only Voltage Sensor”, *IEEE Trans. on Power Electronics*, vol. 3, n. 2, pp. 118 – 125, Apr. 1988.
- [5] Nishida, Y., Haneyoshi, T., “Predictive Instantaneous Value Controlled PWM Inverter for UPS”, *IEEE Power Electronics Specialist Conference*, pp. 776 – 783, 1992;
- [6] C. Rech, H. Pinheiro, H. A. Gründling, H. L. Hey and J. R. Pinheiro, “Comparison of digital control techniques with repetitive integral action for low cost PWM inverters”, *IEEE Trans. on Power Electronics*, vol. 18, pp. 401-410, Jan. 2003.
- [7] J. H. Aylor, R. L. Ramey and G. Cook, “Design and application of a microprocessor PID predictor controller”, *IEEE Trans. on Industrial Electronics and Control Instrumentation*, vol. 27, n. 3, pp. 133 – 137, Aug. 1980.