Aproximación de derivadas por diferencias finitas. (1)

Otro enfoque para transformar un sistema de tiempo continuo a uno de tiempo discreto, es el de aproximar derivadas, en una ecuación diferencial q' representa la dinámica de un sistema en tiempo continuo, por diferencias finitas.
Este es un procedimiento comunmente utilizado en simulación digital de un sistema analógico y está motivado por la noción intuitiva de q' la derivada de una función en tiempo continuo puede ser aproximada por la diferencia finita entre muestras consecutivas, de la señal a ser diferenciada.

Supóngase un sistema dinámico q' responde a la siguiente ecuación diferencial de primer orden,

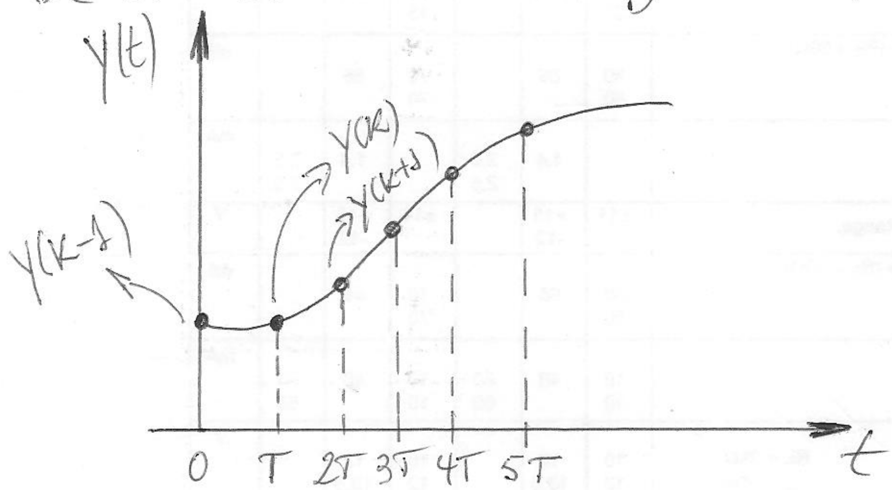
$$\frac{dy(t)}{dt} + a.y(t) = r(t) \qquad (1)$$

En (1) la variable "y" puede ser tanto la salida de un proceso ante la aplicación de una señal $r(t)$, a lazo abierto o lazo cerrado, como también puede ser la salida del bloque controlador, $u(t)$, ante la aplicación de una señal de error $e(t) \equiv r(t)$. –

El primer método de aproximación q' analizamos, es el backward-difference, o diferencias hacia atrás, y consiste en reemplazar r(t) por r(K), y(t) por y(K) y la derivada 1ª en (1) por: (2)

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=KT} = \frac{y(K)-y(K-1)}{T} \qquad (2)$$

siendo T, el periodo de muestreo e intervalo de tiempo entre 2 muestras consecutivas, según se muestra en la siguiente figura:



Realizando las sustituciones mencionadas, la ec. (1) resulta aproximada, como sigue:

$$\frac{y(K)-y(K-1)}{T} + a.y(K) = r(K) \qquad (3)$$

En (3), si el periodo de muestreo T es lo suficientemente pequeño, se espera q' la solución en y(K), dé una buena aproximación a las muestras de y(t).-

Para interpretar el procedimiento de mapeo de funciones en tiempo continuo a funciones en tiempo discreto, obteniéndose así una aproximación de la primera, aplicamos a continuación la transformada de Laplace a la ec. (1) y la transformada Z a la ec. (3), esto es: ③

$$sY(s) + aY(s) = R(s)$$

$$(s+a)\,Y(s) = R(s)$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s+a} \qquad (4)$$

luego,

$$\frac{Y(z) - z^{-1}Y(z)}{T} + a\cdot Y(z) = R(z)$$

$$\frac{(1-z^{-1})}{T}\,Y(z) + aY(z) = R(z)$$

$$\left[\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right) + a\right] Y(z) = R(z)$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{1}{\left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right) + a} \qquad (5)$$

Si se compara la expresión (4) con la (5)

~~Ag~~ observa que:

$$G(Z) = G(s)\Big|_{s = \frac{1-Z^{-1}}{T}}$$

por lo tanto, $\boxed{s = \frac{1-Z^{-1}}{T} = \frac{Z-1}{Z.T}}$ (6)

o haciendo el mapeo inverso

$$Z.T.s = Z-1$$

$$Z - Z.T.s = 1$$

$$Z(1-sT) = 1$$

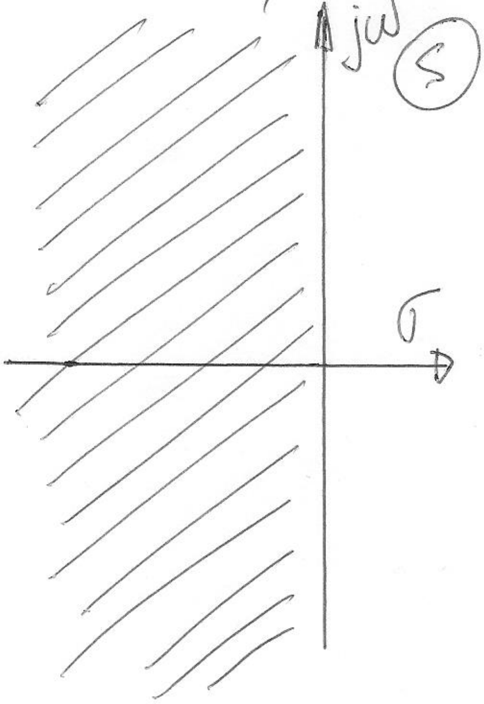
$$\boxed{Z = \frac{1}{1-sT}} \quad (7)$$

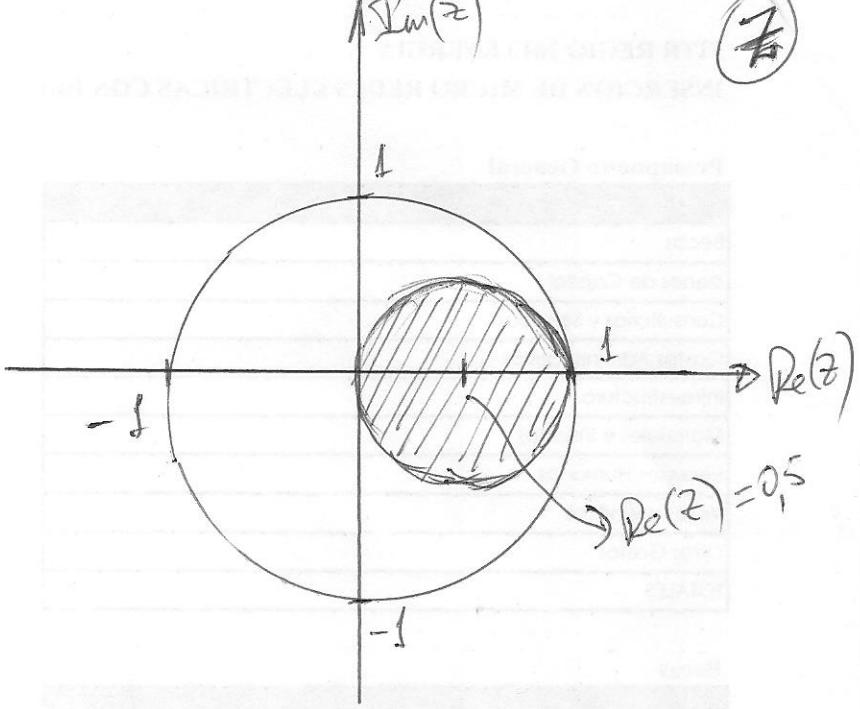
La expresión matemática en (6) representa el mapeo del plano-s al plano-Z cuando se utiliza el método de la aproximación backward para aproximar la ecuación dinámica (1), o mejor dicho, solucionar dicha ecuación en forma digital.

Como se verá más adelante, la región de estabilidad en el plano-s puede ser mapeada, utilizando las ecuaciones (6) o (7), en el plano-Z p/ todo $Re(s)<0$ a través de la sig. relación:

$$Re\left(\frac{Z-1}{ZT}\right) < 0$$

Del análisis realizado, la región de estabilidad (5) en el plano-z, se reduce a un círculo de radio 1/2, con centro en $Re(z) = 0{,}5$ y $Im(z) = 0$





Mapeo del plano-s al plano-z utilizando la aproximación Backward de la derivada de una función.

Analizamos a continuación el comportamiento de un sistema discreto equivalente cuando la derivada respecto al tiempo de la función $y(t)$ en la ec. (1) es aproximada o solucionada digitalmente utilizándose la aproximación o el método de diferencias hacia adelante o forward difference:

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=kT} = \frac{y(k+1) - y(k)}{T} \qquad (8)$$

Reemplazando (8) en (1), se tiene:

$$\frac{y(k+1) - y(k)}{T} + a\,y(k) = r(k) \qquad (9)$$

Aplicándose la transformada Z a la ec. (9) obtenemos la función de transferencia G(Z):

$$\frac{Z\,Y(Z) - Y(Z)}{T} + a\,Y(Z) = R(Z)$$

$$\left[\left(\frac{Z-1}{T}\right) + a\right] Y(Z) = R(Z)$$

$$\Rightarrow\; G(Z) = \frac{Y(Z)}{R(Z)} = \frac{1}{\left(\frac{Z-1}{T}\right) + a} \qquad (10)$$

Entonces, para mapear una función de transferencia del plano-s al plano-z cuando utilizamos el método de aproximación forward difference, debe hacerse

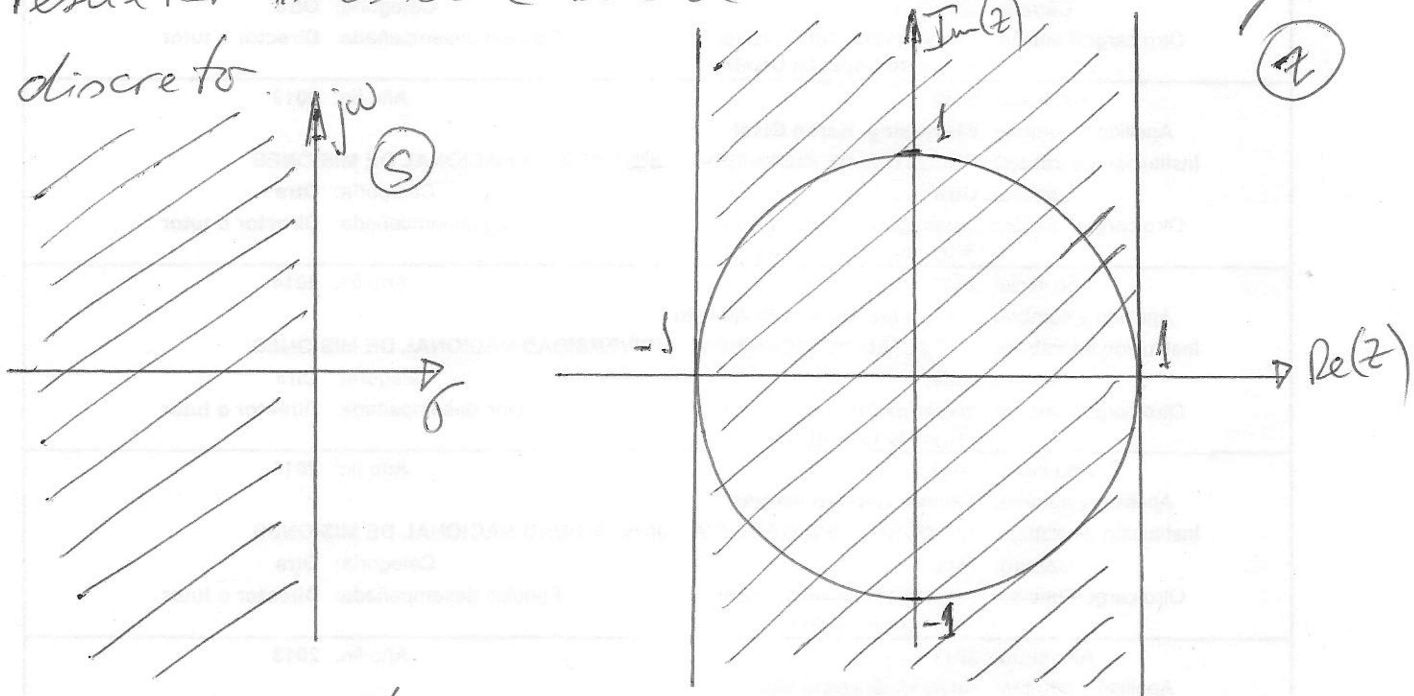
$$s = \frac{Z-1}{T} \qquad (11)$$

por lo tanto, $G(Z) = G(s)\Big|_{s = \frac{Z-1}{T}}$ (12)

Uno de los problemas de utilizar el método forward de aproximación es el de la estabilidad. El semiplano izquierdo del plano-s está mapeado en la región del plano-z p/ los que

$$Re\left(\frac{Z-1}{T}\right) < 0 \;\; ó \;\; Re(Z) < 1$$

Esto significa q' los polos del semiplano izquierdo del plano-s, pueden ser mapeados afuera del círculo unitario del plano-z, según sea el período de muestreo seleccionado. O sea que un sistema estable en tiempo continuo, puede resultar inestable en el dominio de tiempo discreto



Mapeo del plano-s al plano-z utilizando la aproximación Forward de la derivada de una función.

Reglas rectangulares para la integración

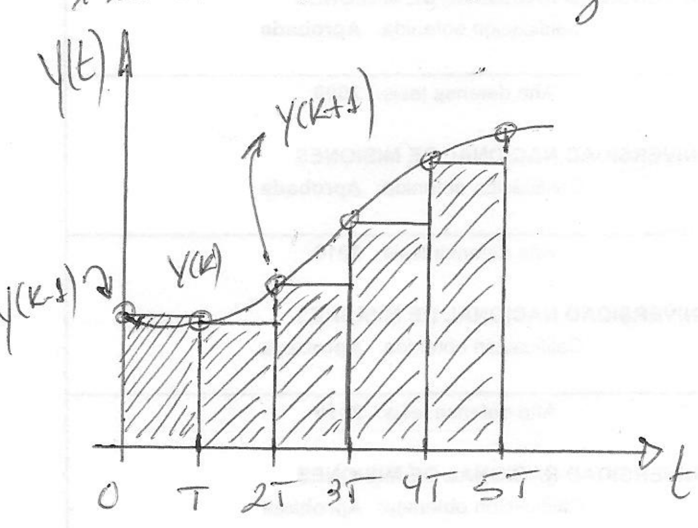
Considérese el sist. en tiempo continuo de la ec. (1)

$$\frac{dy}{dt} = -a\,y(t) + r(t) \qquad [1]$$

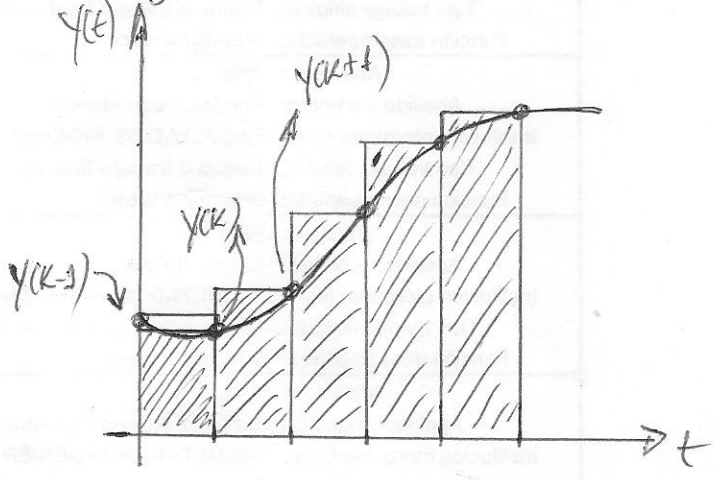
aplicándose la integración a ambos miembros entre 0 y t y considerando q' la condición inicial puede ser ≠ cero, se tiene:

$$y(t) - y(0) = -a\int_0^t y(\tau)\,d\tau + \int_0^t r(\tau)\,d\tau \qquad (13)$$

En el análisis de cálculo numérico, el procedimiento conocido como "regla rectangular" para integración y aproximación de una función de tiempo continuo por suma de rectángulos, se ilustra en las siguientes figuras:



(a)



(b)

Aproximación de la integral de una función de tiempo continuo por, (a) método forward (b) método backward

El procedimiento se basa en sumar las áreas de los rectángulos para calcular la integral total a lo largo de un período de tiempo determinado.

- Para el caso de la aproximación rectangular forward, o también denominada aproximación por defecto, se tiene:

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t)\,dt \cong [y(k-1)T]\,T \qquad (14)$$

- Para el caso de la aproximación rectangular backward, o también denominada aproximación por exceso, se tiene:

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t)\,dt \cong y(kT)\cdot T \qquad (15)$$

Aplicándose el método Forward (14) al sistema en tiempo continuo [1], se obtiene el siguiente algoritmo recursivo:

$$y(k) - y(k-1) = -a.T.\,y(k-1) + T.\,r(k-1)$$

o también: $y(k) = y(k-1) - a.T\,y(k-1) + T.\,r(k-1)$ (16)

La transformada Z de la (16) nos permite obtener la F.T $G(z)$

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) - a.T z^{-1}\,Y(z) + T.z^{-1}\,R(z)$$

$$Y(z) - z^{-1}Y(z) + a.T z^{-1}\,Y(z) = T.z^{-1}R(z)$$

$$Y(z)\left[1 - z^{-1} + a.Tz^{-1}\right] = T.z^{-1}R(z)$$

$$Y(z)\left[1 + (a.T-1)z^{-1}\right] = T z^{-1} R(z)$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{T.z^{-1}}{1+(aT-1)z^{-1}} \times \frac{z}{z}$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{T}{z+a.T-1} \quad / \, T \text{ (num y den)}$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{1}{\frac{z-1}{T} + a} \qquad (17)$$

Si recordamos la ec. (4), la F.T de G en tiempo continuo está dada por: (10)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s+a}$$

por lo que la regla de integración rectangular forward se basa en sustituir

$$\boxed{s = \frac{z-1}{T}}$$

p/ mapear el sistema dinámico modelado en el plano-s, al plano-z.

Apliquemos ahora el método Backward (15) al sist. en tiempo continuo en (13):

$$y(k) - y(k-1) = -a.T\, y(k) + T.r(k)$$

Aplicándose la T.Z:

$$Y(z) - z^{-1} Y(z) + a.T\, Y(z) = T R(z)$$

$$Y(z)\left[(1+a.T) - z^{-1}\right] = T.R(z)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{T}{1+a.T-z^{-1}} \times \frac{z}{z}$$

$$= \frac{z.T}{z-1+a.T.z} \quad \text{/. z.T (num y den)}$$

$$G(z) = \frac{1}{\frac{(z-1)}{z.T} + a} \qquad (18)$$

Por lo tanto, p/ aproximar la F.T. $G(s)$ en tiempo continuo y mapearla al plano-Z por la regla de integración rectangular backward basta con sustituir

$$\boxed{s = \frac{z-1}{z \cdot T}}$$

Ejemplo: La ecuación en el tiempo continuo de la acción de control total de un PID está dada por:

$$u(t) = K_p\left[e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(t)\,dt + T_d\frac{de(t)}{dt}\right] \tag{19}$$

donde $e(t)$ es la señal de error aplicada a los 3 bloques, proporcional, integral y derivativo calculada como: $e(t) = r(t) - y(t)$.-

Para la implementación digital en un dispositivo programable, de (19), es necesario aproximar esta ec. utilizando los valores muestreados de $e(t)$.

a) Acción proporcional. Como esta acción no tiene dinámica y sólo es una parte estática

$$u_p(k) = K_p \cdot e(k) \tag{20}$$

b) Acción integral. Si $u_i(k-1)$ ~~el área~~ aproxima el área bajo la curva de $e(t)$, hasta $t_0 = (k-1)T$, entonces la aproximación del área bajo la curva de $e(t)$ hasta $t_1 = kT$ está dada por:

$$u_i(k) = u_i(k-1) + T.e(k) \qquad (21)$$

utilizándose la aprox. rectangular backward.
por lo que la acción integral resulta

$$u_I(k) = \frac{K_p}{T_i} u_i(k) \qquad (22)$$

donde $u_i(k)$ es la suma de áreas bajo la curva del error $e(t)$.

c) <u>Acción derivativa</u>: Esta puede ser aproximada por la regla de Backward

$$\left.\frac{de(t)}{dt}\right|_{t=kT} = \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \qquad (23)$$

Por lo tanto, $u_D(k) = \frac{K_p T_D}{T} [e(k) - e(k-1)]$ (24)

Sumando finalmente todas las acciones, se tiene:

$$u(k) = u_P(k) + u_I(k) + u_D(k) \qquad (25)$$

$$u(k) = K_p.\, e(k) + \frac{K_p}{T_i}\left[u_i(k-1) + T.e(k)\right] + \frac{K_p T_D}{T}[e(k) - e(k-1)] \qquad (26)$$

La otra forma es obtener la ec. a diferencias del PID en tiempo discreto mediante el mapeo entre el plano-s y el plano-z. La transformada de Laplace del controlador PID en términos de la variable "s" es;

$$U(s) = K_p\left[1 + \frac{1}{T_i.s} + T_D.s\right]E(s) \qquad (27)$$

Cómo anteriormente se utilizó la aproximación backward difference, utilizamos entonces el mapeo (13)

$$S = \frac{Z-1}{Z.T}$$

De esta forma, la transformada Z de la acción de control del PID resulta:

$$U(Z) = K_p\left[1 + \frac{T}{T_i} \times \frac{Z}{Z-1} + \frac{T_D}{T}\frac{Z-1}{Z}\right]E(Z) \quad (28)$$

Aplicándose ahora la transformada Z inversa a la ec. (28), se tiene:

$$u_p(k) = K_p \cdot e(k) \qquad (29)$$

$$U_I(Z) = \frac{K_p T}{T_i} \times \frac{Z E(Z)}{(Z-1)} \Rightarrow Z U_I(Z) - U(Z) = \frac{K_p T}{T_i} \times Z E(Z)$$

$$u_I(k+1) - u_I(k) = \frac{K_p T}{T_i} \times e(k+1)$$

reescribiendo un paso atrás

$$u_I(k) = u_I(k-1) + \frac{K_p T}{T_i} e(k) = \frac{K_p}{T_i} Sum(k) \quad (30)$$

donde $Sum(k) = Sum(k-1) + T.e(k)$

y finalmente: $U_D(Z) = \frac{K_p T_D}{T}\frac{(Z-1)}{Z} E(Z)$

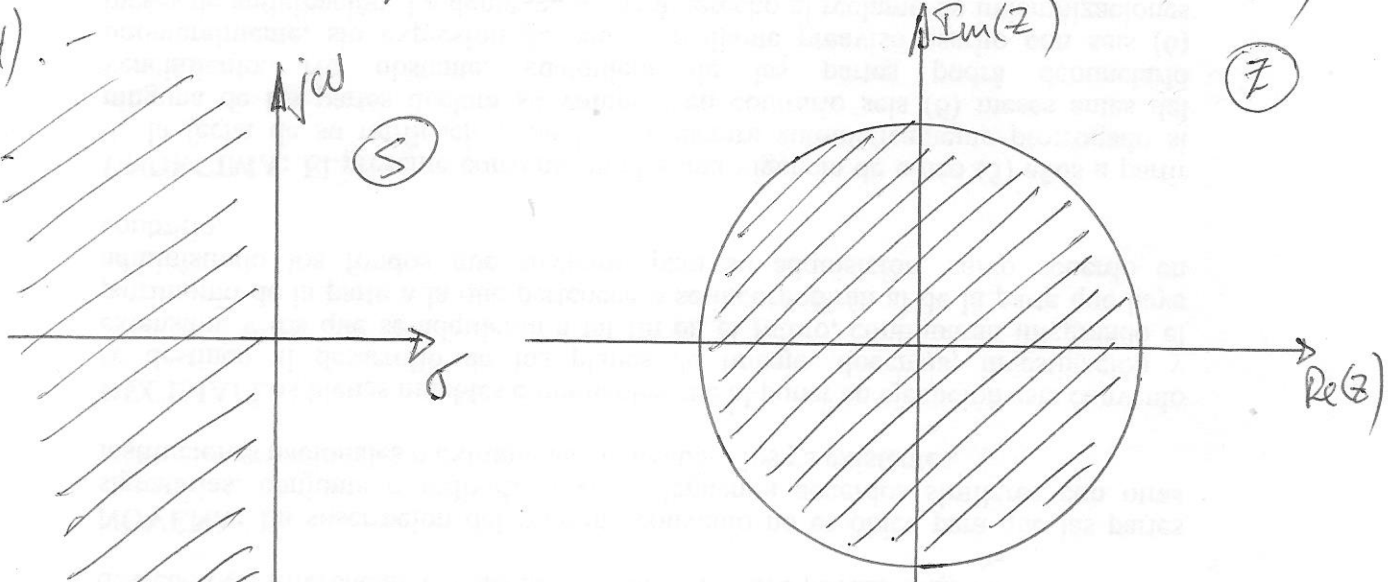
$$Z.U_D(Z) = \frac{K_p T_D}{T} . Z E(Z) - \frac{K_p T_D}{T} E(Z) \quad \times Z^{-1} \text{ ambos miembros}$$

$$U_D(Z) = \frac{K_p T_D}{T}\left[E(Z) - Z^{-1}E(Z)\right]$$

aplicándose la transf. Z inversa:

$$u_D(K) = \frac{K_p T_D}{T} \times [e(K) - e(K-1)] \quad (31)$$

Se observa q. las expresiones (29), (30) y (31) son las mismas expresiones obtenidas en (20), (22) y (24).-



Mapeo del plano-s al plano-z utilizando la transformación bilineal

Aquí en esta figura se muestra la región de estabilidad en el plano-z, de la transformación bilineal o trapezoidal analizada en la pág. 21. (Que se desarrollo antes pero no se había colocado la figura)

La transformación bilineal surge de una aproximación particular denominada regla trapezoidal p/ integrar numéricamente ecuaciones diferenciales. 1

Considérese un sistema de tiempo continuo p/ el cual la ecuación q/ lo describe está dada por:

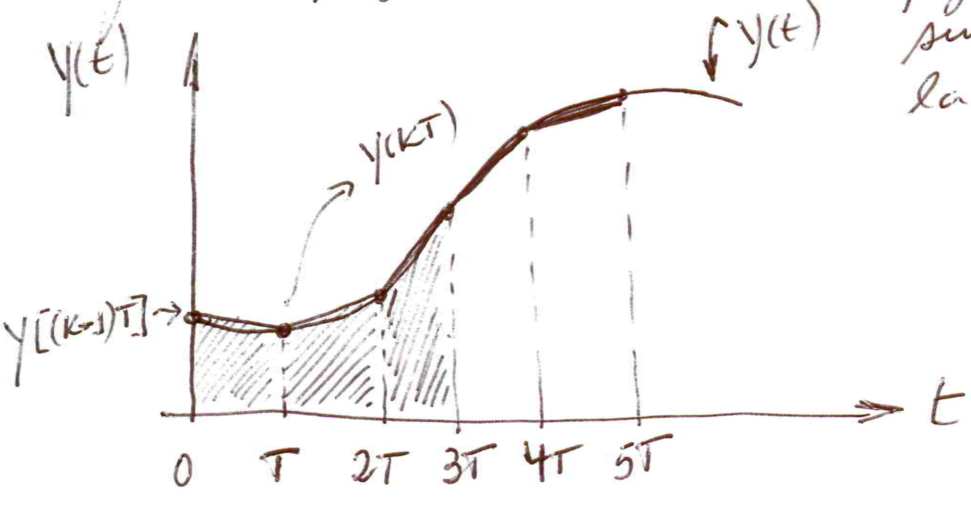
$$\frac{dy}{dt} = -ay(t) + r(t) \qquad (1)$$

ó $$y(t) = y(0) - a\int_0^t y(\tau)\,d\tau + \int_0^t r(\tau)\,d\tau \qquad (2)$$

Aplicando la transformada de Laplace a (1) se tiene:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{1}{s+a}$$

En análisis numérico, el procedimiento de la regla trapezoidal p/ integración lo q/ hace es aproximar la función de tiempo continuo por trapezoides continuos, como se muestra en la figura y luego se suman sus áreas p/ calcular la integral total.



Puede aproximarse el área de un trapezoide de la siguiente forma: ②

$$\int_{(K-1)T}^{KT} y(t)\,dt \equiv \frac{1}{2}\left[y(K)+y(K-1)\right]\times T$$

Con esta aproximación, la eq. ② puede ser convertida a la siguiente ec. recursiva o de estado:

$$y(t)=y(K) \qquad y(0)=y(K-1)$$

$$y(K)=y(K-1)-\frac{aT}{2}\left[y(K)+y(K-1)\right]+\frac{T}{2}\left[r(K)+r(K-1)\right]$$

Aplicándose la transformada Z a la última se tiene:

$$Y(z)=z^{-1}Y(z)-\frac{aT}{2}\left[Y(z)+z^{-1}Y(z)\right]+\frac{T}{2}\left[R(z)+z^{-1}R(z)\right]$$

$$=z^{-1}Y(z)-\frac{aT}{2}Y(z)-\frac{aT}{2}z^{-1}Y(z)+$$

$$+\frac{T}{2}R(z)\left[1+z^{-1}\right]$$

$$Y(z)=z^{-1}Y(z)-\frac{aT}{2}Y(z)\left[1+z^{-1}\right]+$$

$$+\frac{T}{2}R(z)\left[1+z^{-1}\right]$$

$$\left(1-z^{-1}\right)Y(z)+\frac{aT}{2}Y(z)\left(1+z^{-1}\right)=\frac{T}{2}R(z)\left(1+z^{-1}\right)$$

$$\cancel{\left[\left(1-z^{-1}\right)+\frac{aT}{2}\right]Y(z)}$$

$$Y(z)\left[(1-z^{-1}) + \frac{aT}{2}(1+z^{-1})\right] = \frac{T}{2} R(z)\,(1+z^{-1})$$ 3

$$\Rightarrow \quad G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{(T/2)(1+z^{-1})}{(1-z^{-1}) + \frac{aT}{2}(1+z^{-1})}$$

$$G(z) = \frac{(T/2)(1+z^{-1})}{(1-z^{-1}) + \frac{aT}{2}(1+z^{-1})}$$

$$G(z) = \frac{1}{\left[\frac{2}{T}\frac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})}\right] + a}$$

$$\Rightarrow \quad S^* = \frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

$$\boxed{S^* = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}$$ Aproximación Bilineal

---

Esta transformación es inversible o invertible con el mapeo inverso:

$$(T/2)\times S = \frac{z-1}{z+1} \Rightarrow z\frac{T}{2}\times S + \frac{T}{2}\times S = z-1$$

$$\Rightarrow -1 = z\times\frac{T}{2}\times S + \frac{T}{2}\times S - z$$

$$1 = z - z\frac{T}{2}\times S - \frac{T}{2}\times S$$

$$1 + (T/2)\times S = [1-(T/2)\times S]\times z$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{1+(T/2)\times S}{1-(T/2)\times S}}$$

Definición de la región del plano-s (1)
mapeada en el plano-Z p' la aproximación Backward.

Siendo la región estable en el plano-s definida p' ∀ $Re(s) < 0$, la región de estabilidad en el plano-Z considerando el mapeo

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T} = \frac{Z - 1}{Z \cdot T}$$

$$\Rightarrow \quad Re\left(\frac{Z-1}{Z \cdot T}\right) < 0 \quad ó \quad Re\left(\frac{Z-1}{Z}\right) < 0$$

escribiendo la variable compleja Z como

$Z = \alpha + j\beta$, se tiene:

$$Re\left(\frac{\alpha + j\beta - 1}{\alpha + j\beta}\right) < 0$$

multiplicando y ÷ por el complejo conjugado se tiene que:

$$Re\left[\frac{(\alpha + j\beta - 1)}{(\alpha + j\beta)} \times \frac{(\alpha - j\beta)}{(\alpha - j\beta)}\right]$$

$$\alpha^2 - \cancel{\alpha j\beta} + \cancel{\alpha j\beta} + \beta^2$$

$$Re\left[\frac{(\alpha + j\beta - 1)(\alpha - j\beta)}{\alpha^2 + \beta^2}\right]$$

(2)

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\alpha^2+\cancel{\alpha j\beta}-\alpha-\cancel{\alpha j\beta}+\beta^2+j\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right]$$

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\alpha^2-\alpha+\beta^2+j\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2-\alpha+\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)}<0 \Rightarrow \boxed{\alpha^2-\alpha+\beta^2<0}$$

$ax^2+bx+c=0$ $\qquad a=1 \quad b=-1$

$\qquad c=0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\alpha=\frac{1\pm 1}{2} \qquad \alpha_1=\frac{2}{2}=1$$

$$\alpha_2=0$$

$$\left(\alpha-\tfrac{1}{2}\right)^2=\alpha^2-\cancel{2}\alpha\frac{1}{\cancel{2}}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=0$$

$$=\alpha^2-\alpha+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\boxed{\left(\alpha-\tfrac{1}{2}\right)^2+\beta^2<\left(\tfrac{1}{2}\right)^2}$$

La región estable en el plano-S se mapea en Z en un círculo con centro en $\alpha=\frac{1}{2}$ y $\beta=0$ y radio igual a $1/2$.

Definición de la región del plano-s mapeada en el plano-z p/ la aproximación Bilineal:

Considere por ej. el semiplano izquierdo del plano-s p/ el cual $Re(s)<0$.

Considerándose el mapeo mediante la aproximación trapezoidal

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$$

$$\Rightarrow Re\left(\frac{2}{T}\,\frac{z-1}{z+1}\right)<0 \quad ó \quad Re\left(\frac{z-1}{z+1}\right)<0$$

escribiendo la variable compleja z como siendo: $z = \alpha + j\beta$ y sustituyéndose en la última inecuación, se tiene:

$$Re\left(\frac{\alpha+j\beta-1}{\alpha+j\beta+1}\right)<0$$

Multiplicándose numerador y denominador por el complejo conjugado del denominador, se tiene:

$$\frac{(\alpha-1+j\beta)\times(\alpha+1-j\beta)}{(\alpha+1+j\beta)(\alpha+1-j\beta)} = \frac{\alpha^2+\cancel{\alpha}-\cancel{\alpha j\beta}+\cancel{\alpha j\beta}+j\beta+\beta^2-\cancel{\alpha}-1+j\beta}{\alpha^2+\alpha-\cancel{\alpha j\beta}+\cancel{\alpha j\beta}+\cancel{j\beta}+\beta^2+\alpha+1-\cancel{j\beta}}$$

$$= \frac{\alpha^2-1+\beta^2+j2\beta}{(\alpha^2+2\alpha+1)+\beta^2}<0$$

$\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$ $\qquad \sqrt{\alpha^2} = \alpha$

$\frac{2}{2} = 1$

$\alpha^2 + 2\alpha + 1 = (\alpha+1)^2$

$\operatorname{Re}\left[\frac{\alpha^2 - 1 + \beta^2 + j2\beta}{(\alpha+1)^2 + \beta^2}\right] < 0$ lo q' es equivalente a escribir

$$\alpha^2 - 1 + \beta^2 < 0$$

ó $\boxed{\alpha^2 + \beta^2 < 1^2}$

La última representa una circunferencia de radio unitario centrada en el origen del plano-z.

Por lo tanto, la transf. bilineal produce un sistema de tiempo discreto estable p/ un sist. de tiempo continuo estable.

Región de estabilidad de la aproximación Forward: $\forall \operatorname{Re}(s) < 0 \Rightarrow$

$\operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{T}\right) < 0$ ó $\operatorname{Re}(z-1) < 0$

$\Rightarrow \operatorname{Re}(z) < 1$

si $z = \alpha + j\beta \Rightarrow \operatorname{Re}(\alpha + j\beta - 1) < 0$

$\operatorname{Re}(\alpha - 1) + j\beta < 0$

$\Rightarrow \alpha - 1 < 0 \quad \sigma \quad \underline{\underline{\alpha < 1}}$

$S = \dfrac{Z-1}{T} \Rightarrow Z = ST + 1$

si $S \to 0 \Rightarrow Z = 1$

si $S \to -\infty \Rightarrow Z \to -\infty$

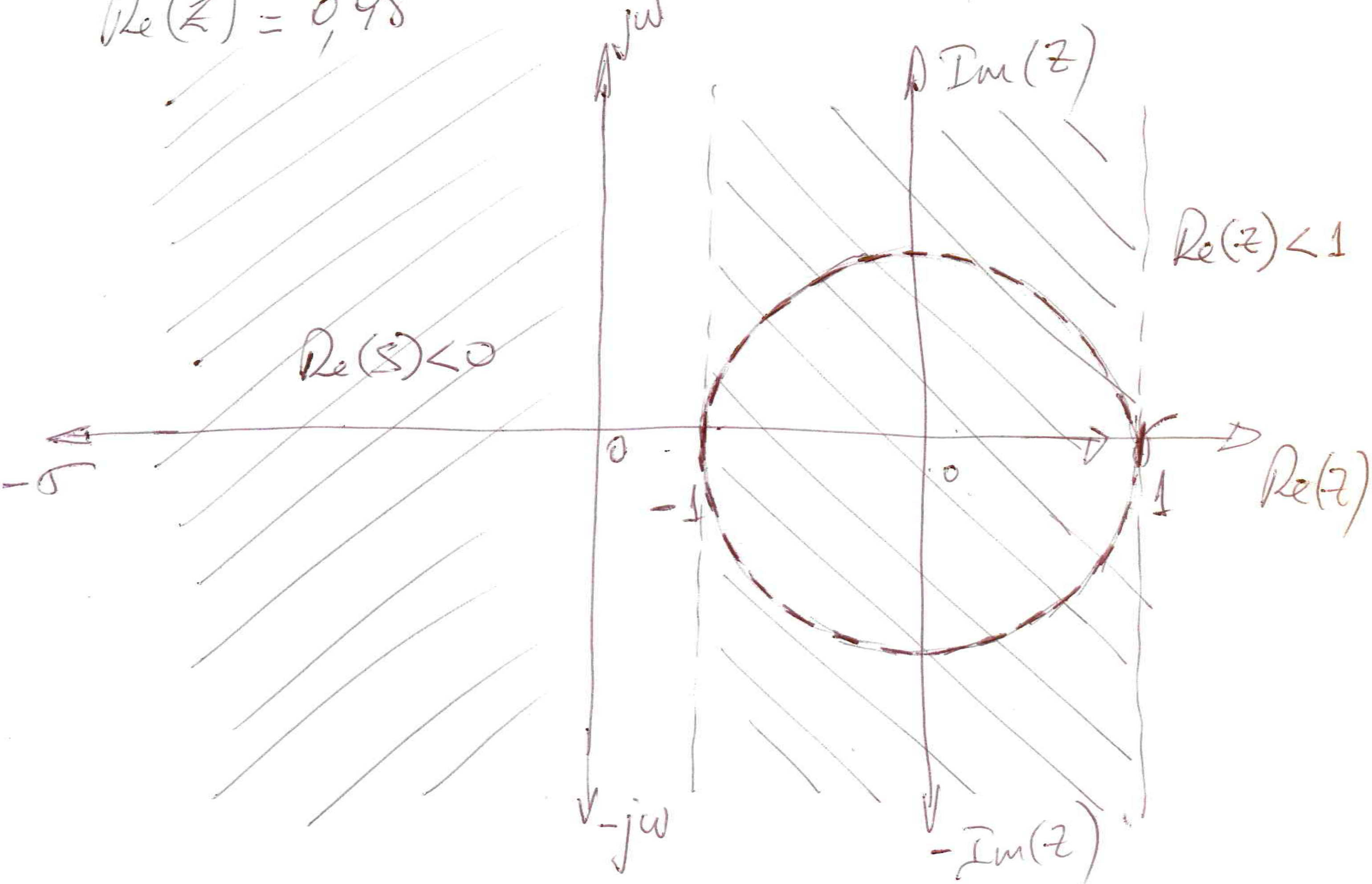
$Z = \sigma T + j\omega_d T + 1$

$Z = (\sigma T + 1) + j\omega_d T \qquad$ si $\omega_d = 0$

$Re(Z) = (\sigma T + 1) \qquad$ si $\sigma = -2$

$T = 0{,}01$

$Re(Z) = 0{,}98$



Aproximación invariante al escalón (1)

Esta aproximación se basa en elegir una rta. al impulso del sistema discreto q' sea similar a la rta. al impulso del sistema en tiempo continuo.

El usar este procedimiento está motivado no tanto por el deseo de preservar la forma de la rta. al impulso, como por el conocimiento de q' si el sistema en tiempo continuo es limitado en ancho de banda, entonces la rta. en frecuencia de tiempo discreto se aproximará de la rta. en tiempo continuo.

En algunos problemas de diseño de control, el objetivo primario puede ser el de controlar algunos aspectos de la rta temporal, tal como la respuesta al escalón. En tales casos, un procedimiento natural puede ser el muestrear el sistema en tiempo continuo por un criterio de invarianza al escalón.

Esta invarianza en el sist. discreto se consigue colocando un escalón unitario en la entrada de la F.T del sist. de tiempo continuo G(s) y un escalón unitario muestreado en la

entrada del sist. de tiempo discreto (2)
$G(z)$. Esto significa lo siguiente:
La T.L de un escalón unitario es

$$\mathcal{L}\left[r(t)\right] = 1/s \quad \text{con} \quad r(t) = 1 \ \forall t \geq 0$$

ó sea q' la rta. del sist. en tiempo continuo está dada por:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right] \quad (1)$$

Por otro lado, la transf. Z de un escalón unitario $r(k)$; con $r(k) = 1 \ \forall k \geq 0$

$$Z\left[r(k)\right] = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

la salida discreta $y(k)$ del sistema discreto $G(z)$ está dada por:

$$Y(z) = G(z)\frac{1}{(1-z^{-1})} \quad (2)$$

Dado q' se pretende q' ambas respuestas sean iguales en desempeño, se tiene que:

$$y(k) = y(t) \quad ó \quad Y(z) = Y(s)$$

donde $Y(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$
de (1)

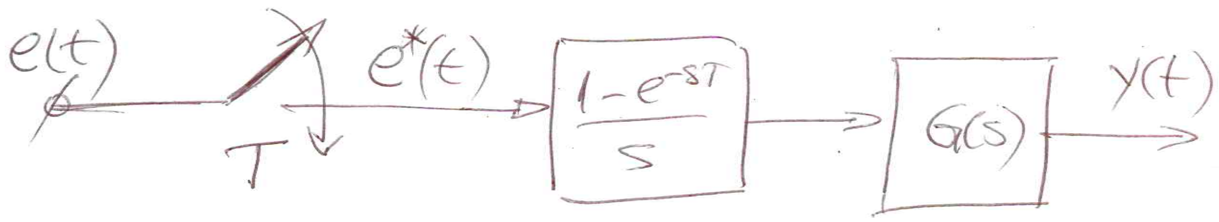
$$\Rightarrow G(z) \times \frac{1}{(1-z^{-1})} = Z\left[G(s) \times \frac{1}{s}\right]$$

$$G(z) = (1-z^{-1})\,\mathcal{Z}\left[\frac{G(s)}{s}\right] \qquad (3)$$

reemplazando $z^{-1} = e^{-sT}$

$$\Rightarrow G(z) = \mathcal{Z}\left[\frac{1-e^{-sT}}{s} \times G(s)\right] \qquad (3)$$

Se observa en (3) q' el lado derecho de la ec. puede ser visto como la T.Z del sist. en tiempo continuo precedida por un ZOH.



Otra forma de llegar a (3) es la siguiente:
La salida muestreada del sistema discreto, a partir de (1) es:

$$y(kT) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right]\Bigg|_{t=kT} \qquad (4)$$

La T.Z de esta cantidad nos da la salida en el dominio Z del sistema en tiempo discreto:

$$Y(z) = \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right]\Bigg|_{t=kT}\right\} \qquad (5)$$

Comparando (2) con (5), se obtiene:

$$G(z) = (1-z^{-1})\left[\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right]\Bigg|_{t=kT}\right\}\right] \qquad (6)$$

o también:

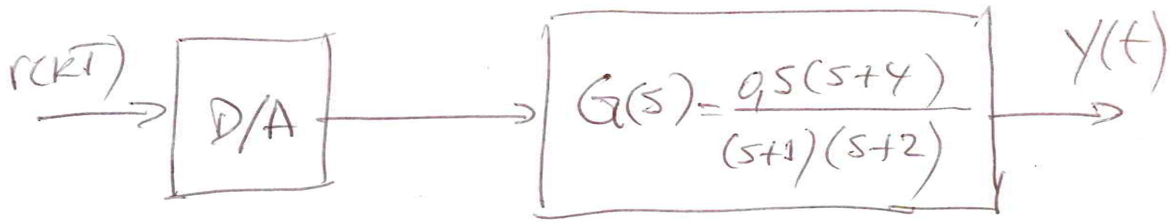
$$G(z) = (1 - z^{-1}) \left[\mathcal{Z} \left[\frac{G(s)}{s} \right] \right] \quad (7)$$

la cual puede ser rescrita como:

$$G(z) = \mathcal{Z} \left[\frac{1 - e^{-sT}}{s} \; \frac{G(s)}{s} \right] \quad (8)$$

siendo (8) igual a (3).-

Ejemplo: Supongamos el siguiente sist. en tiempo continuo, manejado o excitado por la salida de un conversor D/A, el cual está configurado p/ q' su rta. sea la de un ZOH.



El sist. de la fig. puede ser visto como el sist. en tiempo continuo G(s) precedido por un ZOH. Por lo tanto, utilizando esta equivalencia obtendremos la relación entre $y(kT)$ y $r(kT)$ y por lo tanto, el modelo o F.T en Z inv. al escalón:

$$\frac{1}{s}G(s) = \frac{0{,}5(s+4)}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{1{,}5}{s+1} + \frac{0{,}5}{s+2}$$

utilizando la tabla de transformadas, se tiene:

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s}G(s)\right] = \frac{z}{z-1} - \frac{1{,}5 \cdot z}{z-e^{-T}} + \frac{0{,}5 \cdot z}{z-e^{-2T}}$$

de la ec. (7) se tiene:

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\left[\frac{z}{z-1} - \frac{1{,}5z}{z-e^{-T}} + \frac{0{,}5z}{z-e^{-2T}}\right]$$

$$= 1 - \frac{1{,}5(z-1)}{z-e^{-T}} + \frac{0{,}5(z-1)}{z-e^{-2T}}$$

Supóngase q' la frec. de muestreo sea de 20 rad/s $\Rightarrow$ $T = \frac{2\pi}{20} = 0{,}31446$ seg.

$$\Rightarrow \boxed{G(z) = \frac{0{,}17115 \times z - 0{,}04535}{z^2 - 1{,}2639 \cdot z + 0{,}3897}}$$

Esto es lo mismo q' hacer en Matlab

$G(z) = c2d\left(G(s), T\right)$ con el método del ZOH.