



Universidad Nacional de Misiones



SISTEMAS DE CONTROL 2

Profesor: Fernando Botterón
Ingeniería Electrónica - 2020
Facultad de Ingeniería - U.Na.M

Temas de la Unidad 3

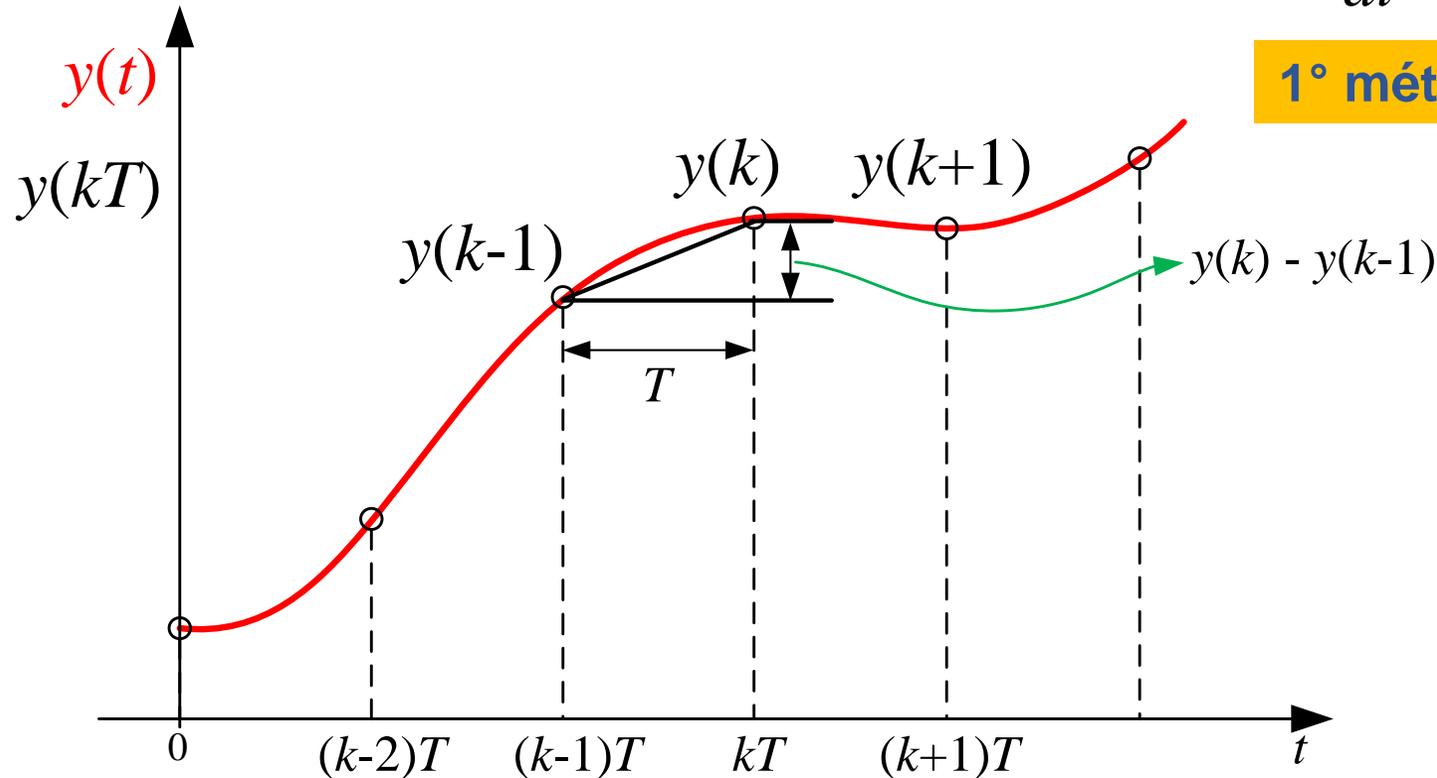
Unidad 3: Análisis de Sistemas Muestreados

- ☑ Relación del muestreo y sus efectos en los polos.
- ☑ Relación entre los planos “s” y “z”.
- ☑ Región deseada de polos de LC en el plano z.
- ☑ Modelado de Sistemas de Control Digital.
 - Modelado de la Planta o Proceso: Aprox. Invariante al Escalón
 - Aproximación Discreta de Controladores: *Backward, Forward y Tustin.*
- ☑ Técnica de Compensación del Atraso del ZOH.
- ☑ Errores en Estado Estacionario.

Aproximación Discreta de Funciones de Transferencia

Aproximación de Derivadas de una Ecuación Diferencial por Diferencias Finitas

Dinámica de un Proceso:
$$\frac{dy}{dt} + ay(t) = r(t) \quad (1)$$



1° método: *Backward* o Diferencias hacia Atrás

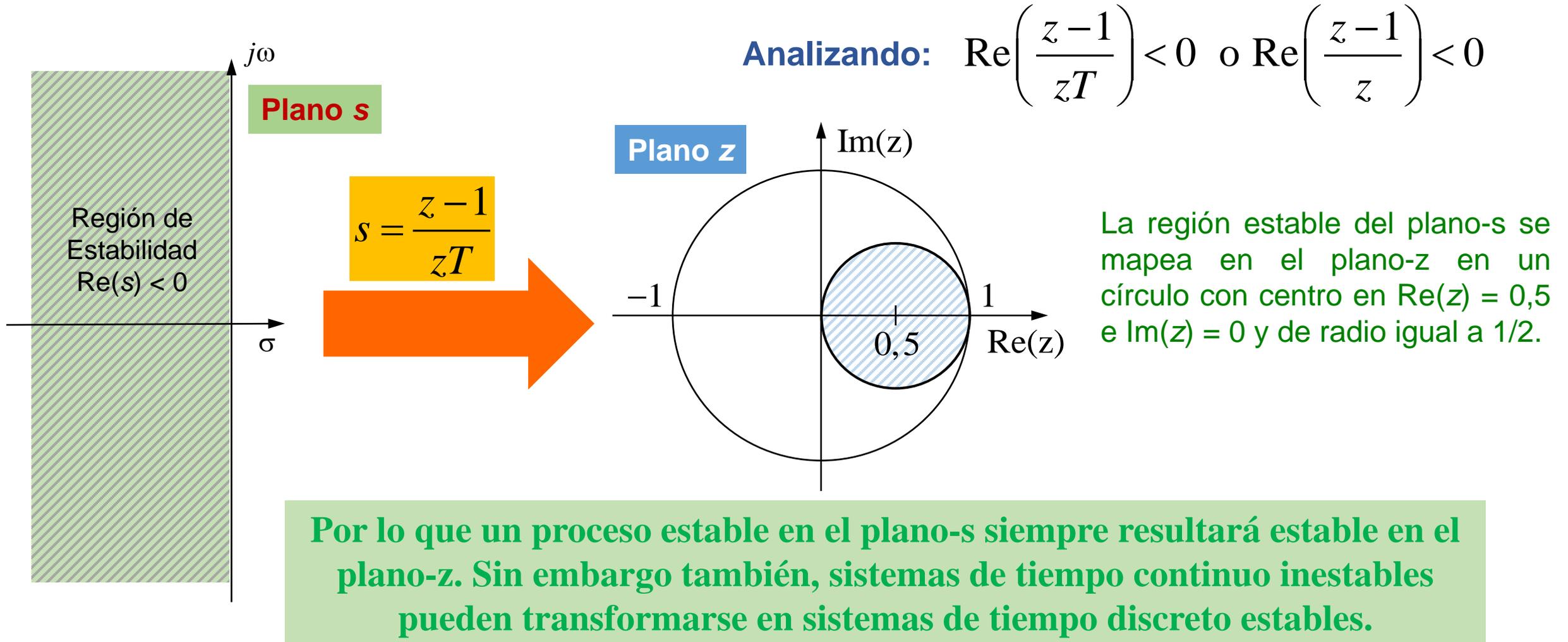
$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=kT} = \frac{y(k) - y(k-1)}{T} \quad (2)$$

con $y(t) = y(k)$ y $r(t) = r(k)$

$$\frac{y(k) - y(k-1)}{T} + ay(k) = r(k) \quad (3)$$

Aproximación Discreta de Funciones de Transferencia

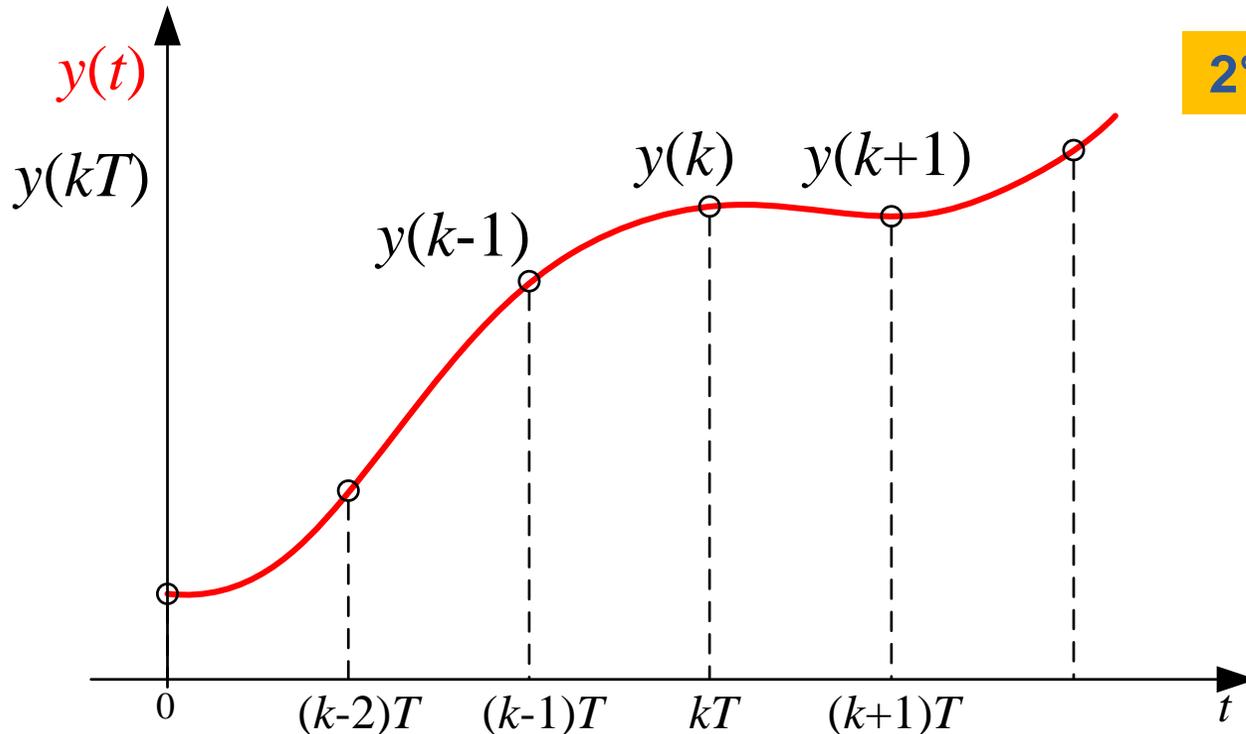
Mapeo de la región de estabilidad: Aproximación *Backward* o Diferencias hacia Atrás



Aproximación Discreta de Funciones de Transferencia

Aproximación de Derivadas de una Ecuación Diferencial por Diferencias Finitas

Dinámica de un Proceso: $\frac{dy}{dt} + ay(t) = r(t)$ (1)



2° Método: *Forward* o Diferencias hacia adelante

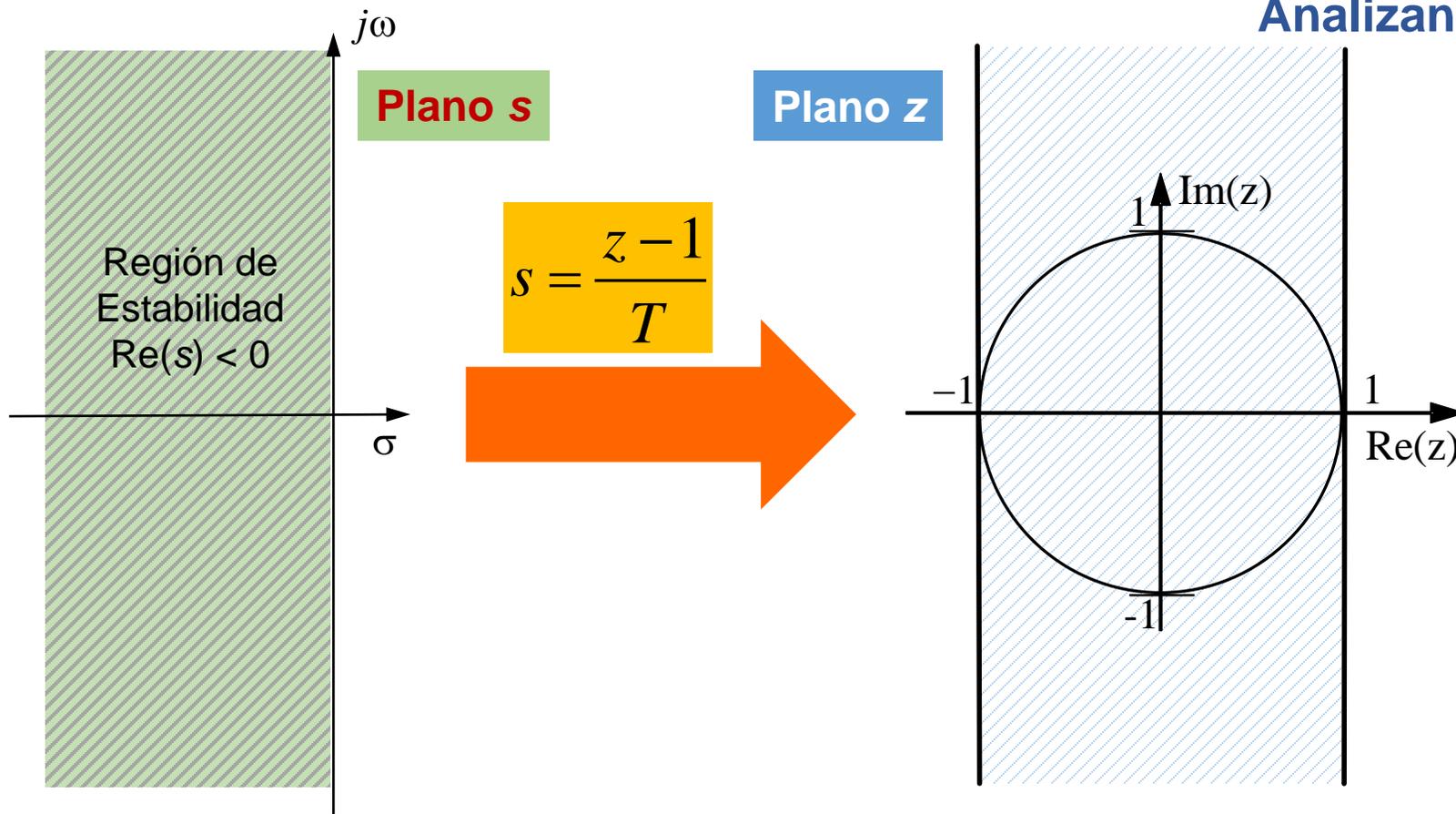
$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=kT} = \frac{y(k+1) - y(k)}{T} \quad (2)$$

con $y(t) = y(k)$ y $r(t) = r(k)$

$$\frac{y(k+1) - y(k)}{T} + ay(k) = r(k) \quad (3)$$

Aproximación Discreta de Funciones de Transferencia

Mapeo de la región de estabilidad: Aproximación *Forward* o Diferencias hacia Adelante



La región estable del plano-s puede ser mapeada en el plano-z, tanto dentro como fuera del círculo unitario.

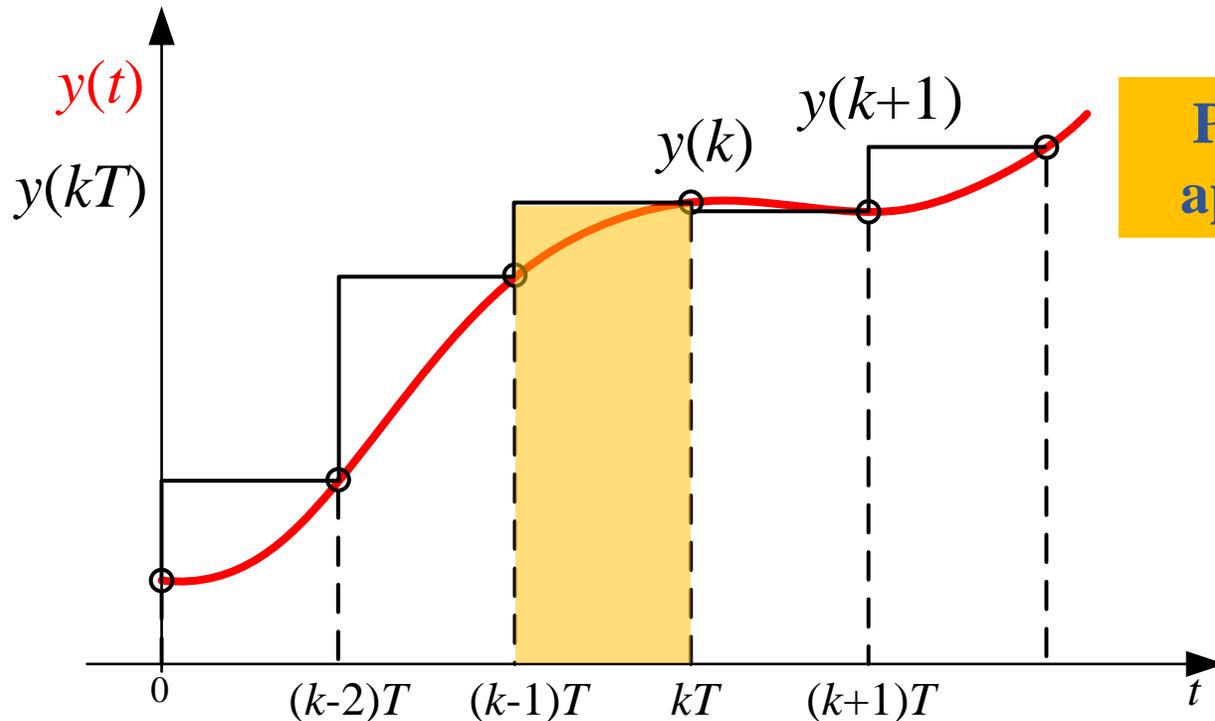
Por lo que, polos estables en el plano-s pueden proporcionar polos inestables en el plano-z según sea el periodo de muestreo T elegido.

Aproximación Discreta de Funciones de Transferencia

Aproximación Rectangular de Integrales

$$\frac{dy}{dt} = r(t) - ay(t) \quad (1) \quad \text{Integrando ambos miembros entre } 0 \text{ y } t \text{ considerando } CI \neq 0:$$

$$y(t) - y(0) = \int_0^t r(\tau) d\tau - a \int_0^t y(\tau) d\tau$$



Por Backward, la integral entre $(k-1)T$ y kT puede aproximarse por el área del rectángulo sombreado

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(\tau) d\tau \cong y(kT) \times T$$

$$y(k) - y(k-1) = r(k) \times T - a \times y(k) \times T$$



$$G(z) = \frac{1}{\left(\frac{z-1}{zT}\right) + a} \quad \rightarrow \quad s = \left(\frac{z-1}{zT}\right)$$

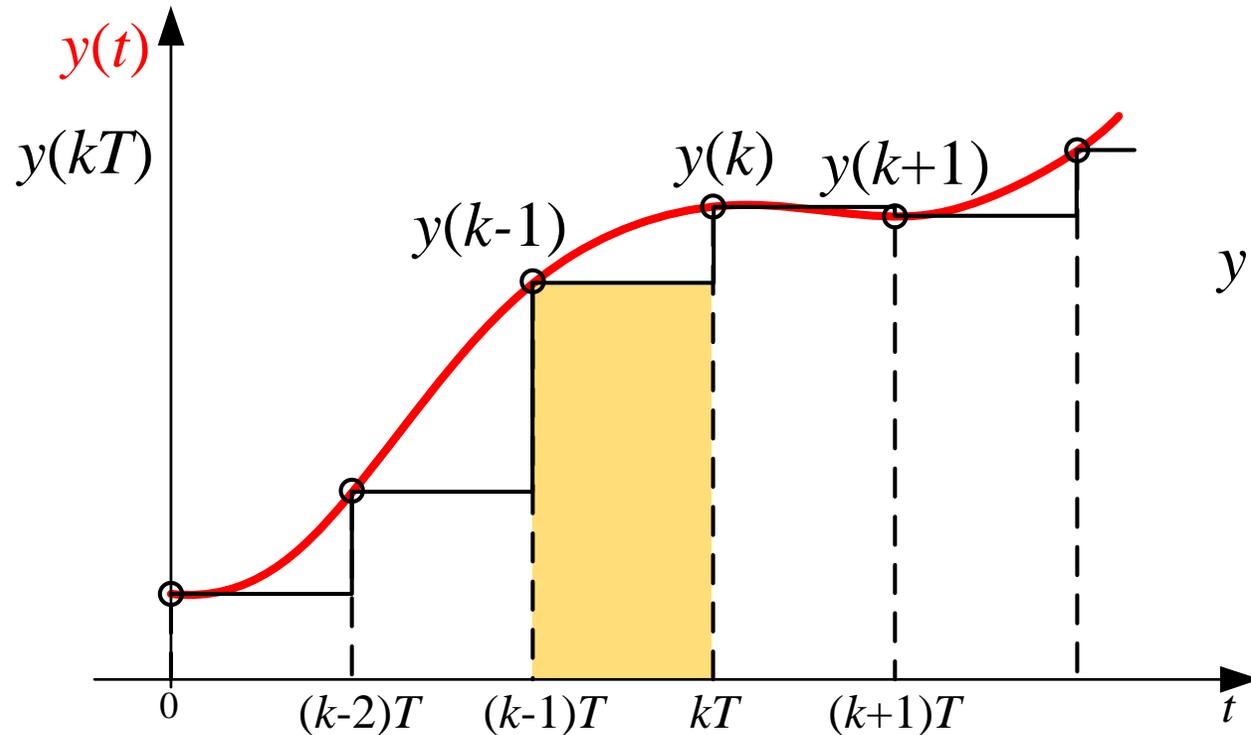
Aproximación Rectangular Por Exceso

Aproximación Discreta de Funciones de Transferencia

Aproximación Rectangular de Integrales

$$y(t) - y(0) = \int_0^t r(\tau) d\tau - a \int_0^t y(\tau) d\tau$$

Por Forward, la integral entre $(k-1)T$ y kT puede aproximarse por el área del rectángulo sombreado



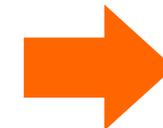
Aproximación Rectangular Por Defecto

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(\tau) d\tau \cong y[(k-1)T] \times T$$

$$y(k) - y(k-1) = r(k-1) \times T - a \times y(k-1) \times T$$



$$G(z) = \frac{1}{\left(\frac{z-1}{T}\right) + a}$$



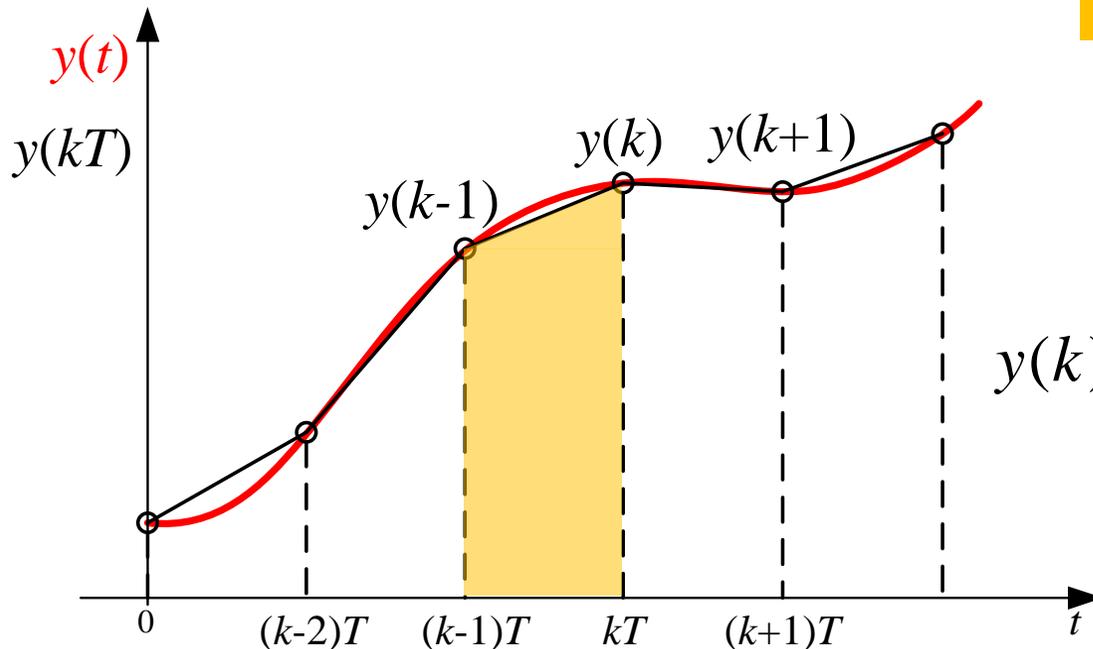
$$s = \left(\frac{z-1}{T}\right)$$

Aproximación Discreta de Funciones de Transferencia

Aproximación Rectangular de Integrales

$$y(t) - y(0) = \int_0^t r(\tau) d\tau - a \int_0^t y(\tau) d\tau$$

Por aproximación Trapezoidal, la integral entre $(k-1)T$ y kT puede aproximarse por el área del trapecio sombreado



Aproximación Trapezoidal
Bilineal o de Tustin

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(\tau) d\tau \cong \frac{1}{2} \times [y(k) + y(k-1)] \times T$$

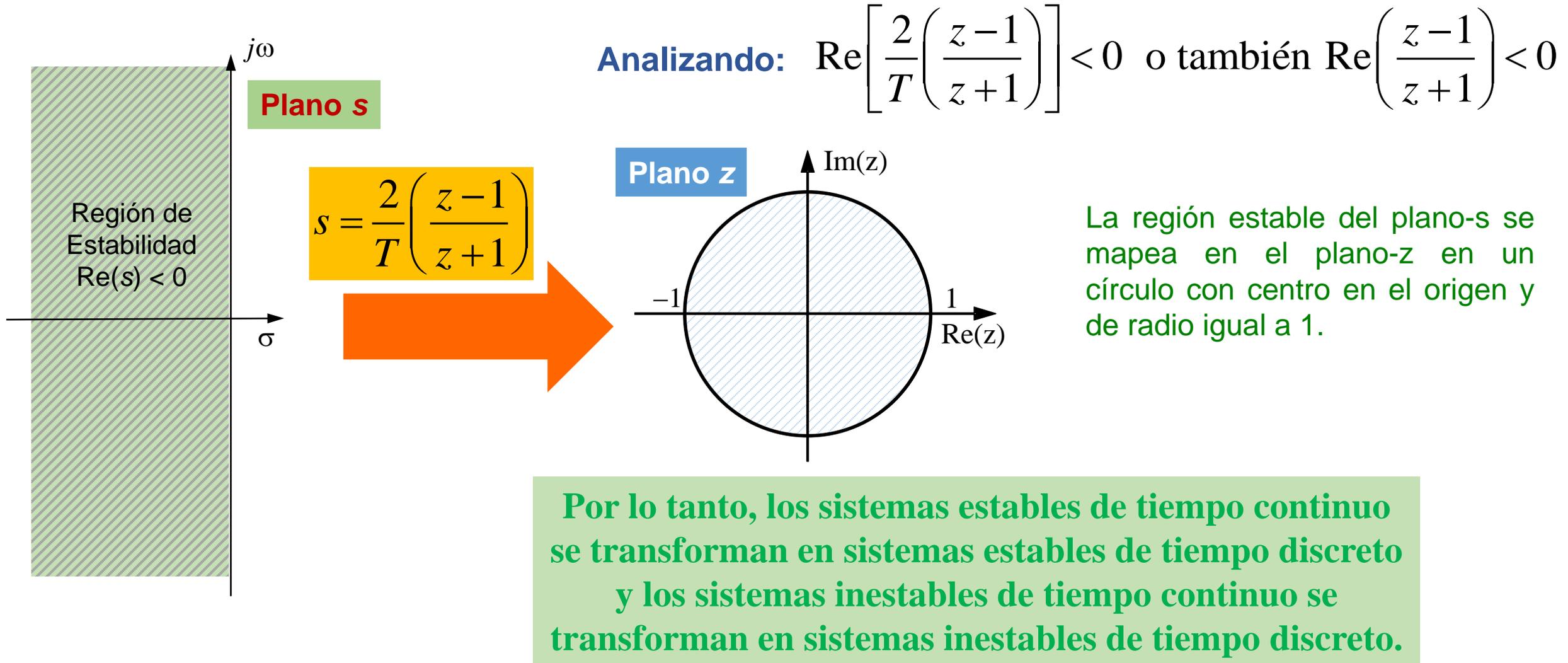
$$y(k) - y(k-1) = \frac{T}{2} [r(k) + r(k-1)] - \frac{aT}{2} [y(k) + y(k-1)]$$

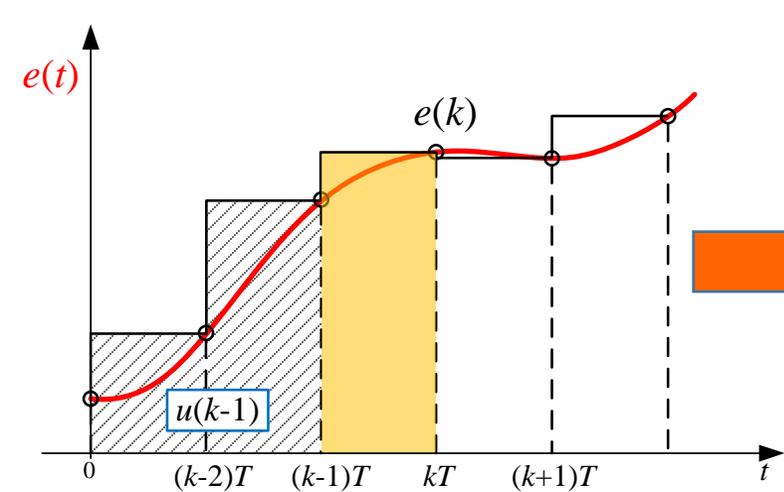


$$G(z) = \frac{1}{\frac{2}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) + a} \quad \rightarrow \quad s = \frac{2}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)$$

Aproximación Discreta de Funciones de Transferencia

Mapeo de la región de estabilidad: Aproximación *Tustin* o *Trapezoidal*

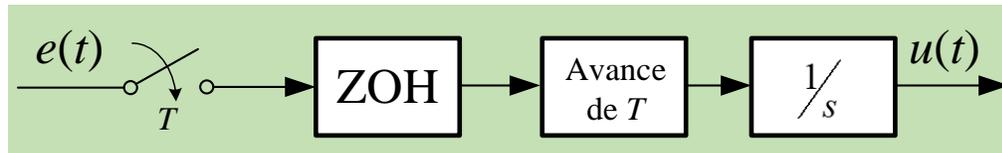




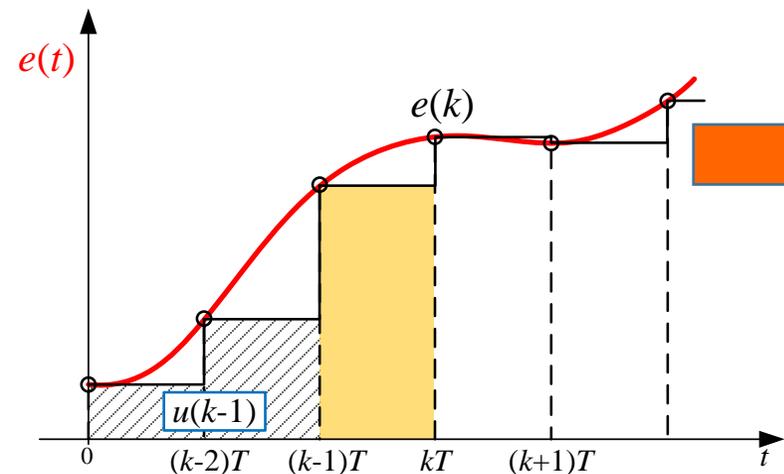
$$u(t) = \int_0^t e(t) dt \quad \xrightarrow{E(s)} \quad \boxed{G_c(s)} \quad \xrightarrow{U(s)}$$

$$u(k) = e(k)T + u(k-1)$$

$$U(z) = TE(z) + z^{-1}U(z) \Rightarrow \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{zT}{(z-1)}$$

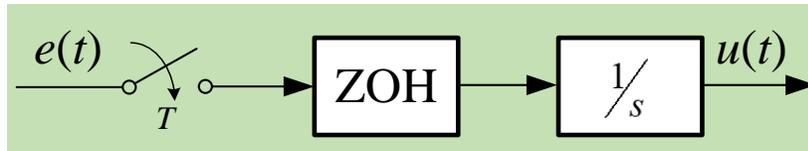


Aproximación Rectangular Backward o por Exceso



$$u(k) = e(k-1)T + u(k-1)$$

$$U(z) = T z^{-1}E(z) + z^{-1}U(z) \Rightarrow \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{(z-1)}$$

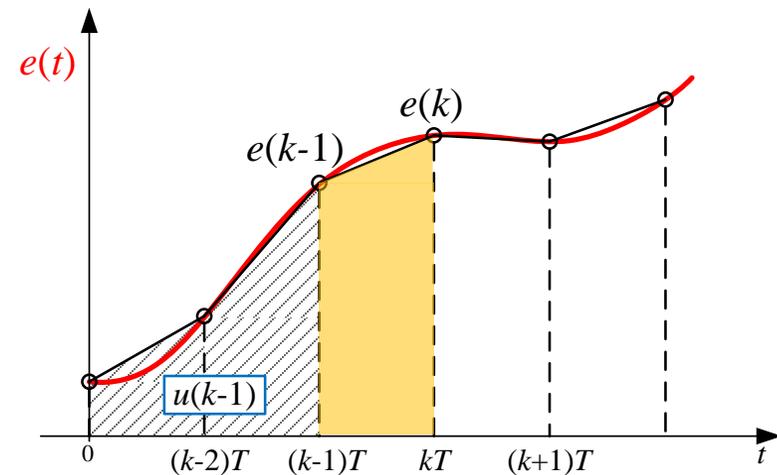


Aproximación Rectangular Forward o por Defecto

Aproximación Trapezoidal o de Tustin

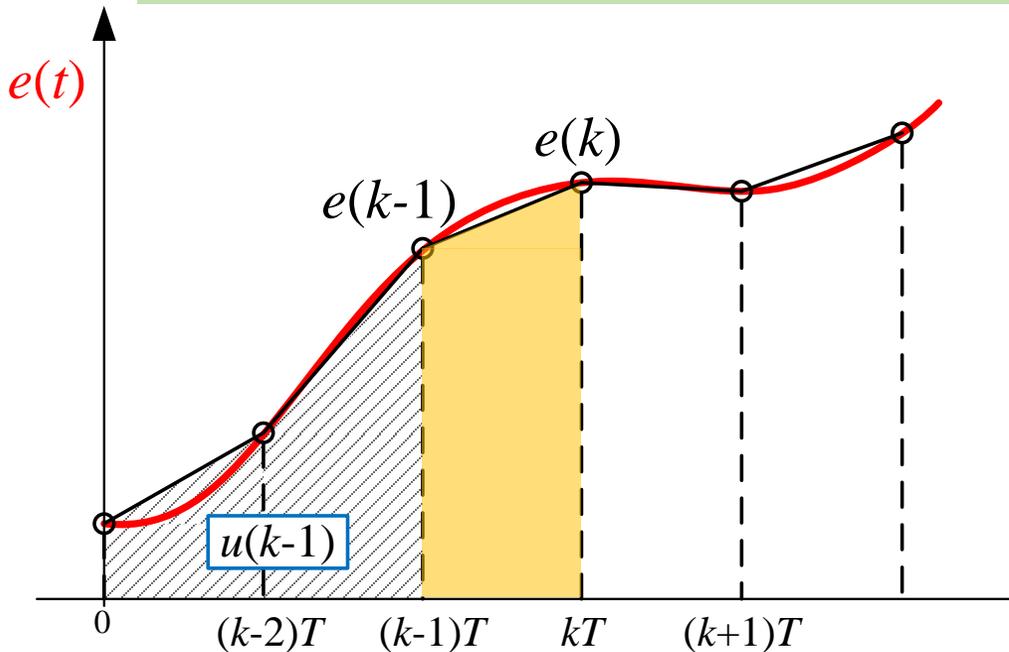
$$u(k) = \frac{e(k) + e(k-1)}{2} T + u(k-1)$$

$$(1 - z^{-1})U(z) = \frac{T}{2}(1 + z^{-1})E(z) \Rightarrow \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{2} \frac{(z+1)}{(z-1)}$$



Aproximación Discreta de Funciones de Transferencia

Aproximación Trapezoidal Bilineal o de Tustin



$$u(k) = \frac{e(k) + e(k-1)}{2} T + u(k-1)$$

A diferencia de los otros métodos, el bilineal realiza un valor medio móvil (o promedio móvil) en base a las dos muestras del error (o de la salida) más recientes.

➤ **Ventaja:** Provoca menos distorsión en la respuesta en frecuencia del sistema de control, debido a que presenta mayor precisión.

Para una distorsión < al 3%
Deben cumplirse las siguientes relaciones

$$\left. \begin{array}{l} \text{Backward: } f_s/f > 20 \\ \text{Forward: } f_s/f > 20 \\ \text{Trapezoidal: } f_s/f > 10 \end{array} \right\} \frac{f_s : \text{frecuencia de muestreo}}{f : \text{frecuencia de corte o frecuencia señal de interés}}$$

Aproximación Discreta de Funciones de Transferencia

Aproximación Invariante al Escalón

La respuesta al escalón de un sistema en tiempo continuo debe ser la misma que la respuesta al escalón del sistema muestreado, en los instantes de muestreo.

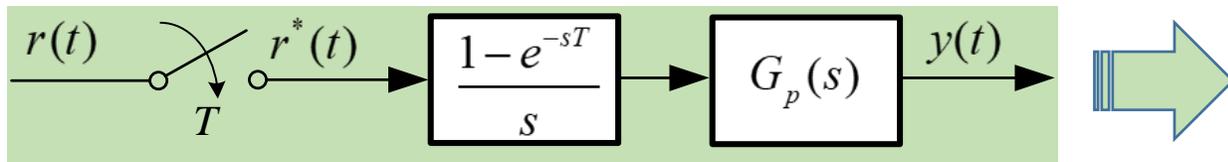
$$y(kT) = y(t) \quad \text{o} \quad Y(z) = Y(s) \quad \text{Para una entrada en escalón:} \quad Y(s) = \frac{1}{s} G_p(s) \quad \text{e} \quad Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} G_p(z)$$

De la igualdad anterior:

$$\frac{1}{1-z^{-1}} G_p(z) = Z \left[\frac{1}{s} G_p(s) \right] \quad \Rightarrow \quad G_p(z) = (1-z^{-1}) Z \left[\frac{1}{s} G_p(s) \right] = \left(\frac{z-1}{z} \right) Z \left[\frac{1}{s} G_p(s) \right]$$

Recordando que: $z^{-1} = e^{-sT}$

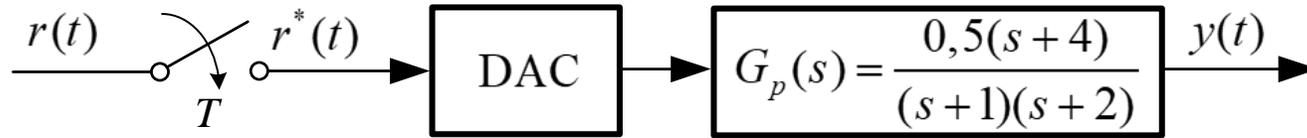
$$G_p(z) = Z \left[\left(\frac{1-e^{-sT}}{s} \right) G_p(s) \right]$$



La Transformada Z de un sistema en tiempo continuo, precedida por un ZOH.

Aproximación Discreta de Funciones de Transferencia

Aproximación Invariante al Escalón. Ejemplo



La respuesta del DAC es \equiv a un ZOH

$$Y(s) = \frac{1}{s} G_p(s) = \frac{0,5(s+4)}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{1,5}{(s+1)} + \frac{0,5}{(s+2)} \quad \Rightarrow \quad G_p(z) = (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{1}{s} - \frac{1,5}{(s+1)} + \frac{0,5}{(s+2)} \right]$$

Utilizando tablas de transformada Z

$$G_p(z) = \frac{z-1}{z} \left[\frac{z}{(z-1)} - \frac{1,5z}{(z-e^{-T})} + \frac{0,5z}{(z-e^{-2T})} \right] \Rightarrow G_p(z) = 1 - \frac{1,5(z-1)}{(z-e^{-T})} + \frac{0,5(z-1)}{(z-e^{-2T})}$$

La respuesta al escalón del sistema a LC posee un tiempo de subida $t_r = 1,23s$ considerando un N° de muestras de 8, el periodo de muestreo resulta:

$$T = \frac{t_r}{N_r} = 0,153s$$

A partir del periodo de muestreo, la aproximación invariante al escalón de $G_p(s)$ resulta:

$$G_p(z) = \frac{0,08147z - 0,0437}{z^2 - 1,593z + 0,6303} = \frac{0,08147(z - 0,5364)}{(z - 0,8574)(z - 0,7351)}$$

La cual puede obtenerse en Matlab por: `Gpz = c2d(Gp,T)`

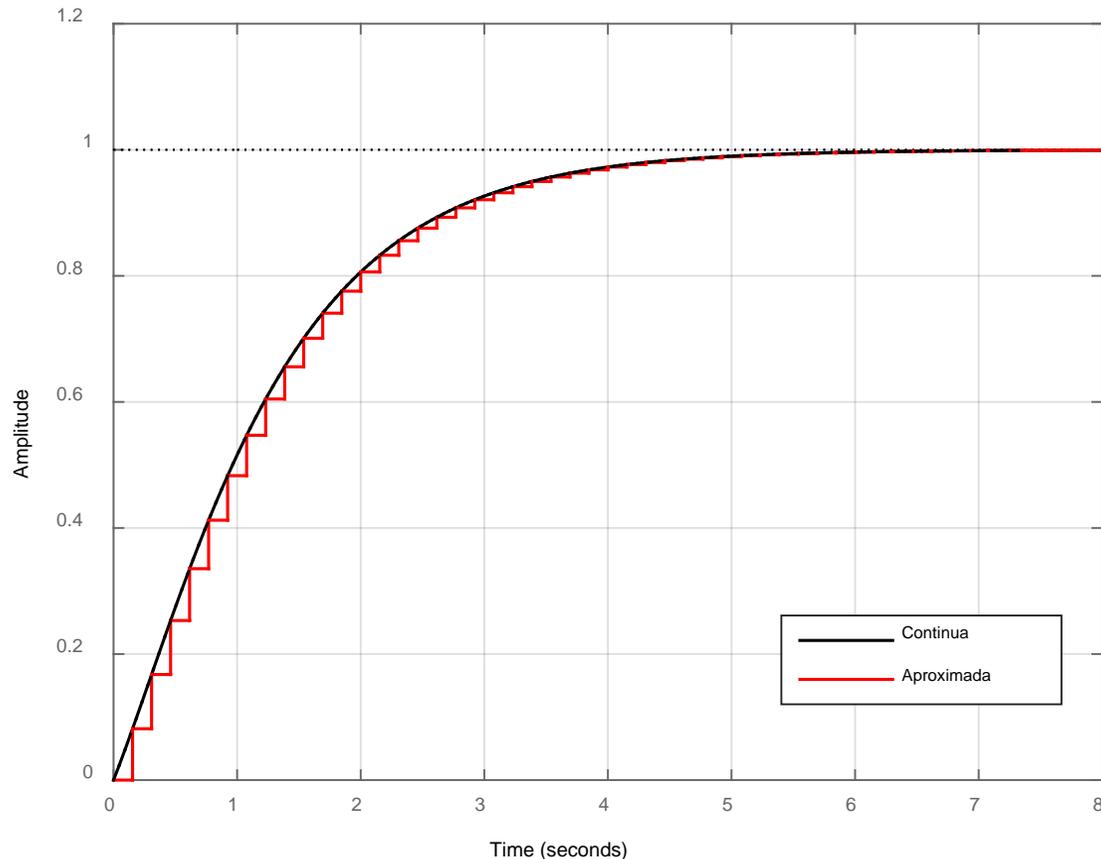
Aproximación Discreta de Funciones de Transferencia

Aproximación Invariante al Escalón. Ejemplo

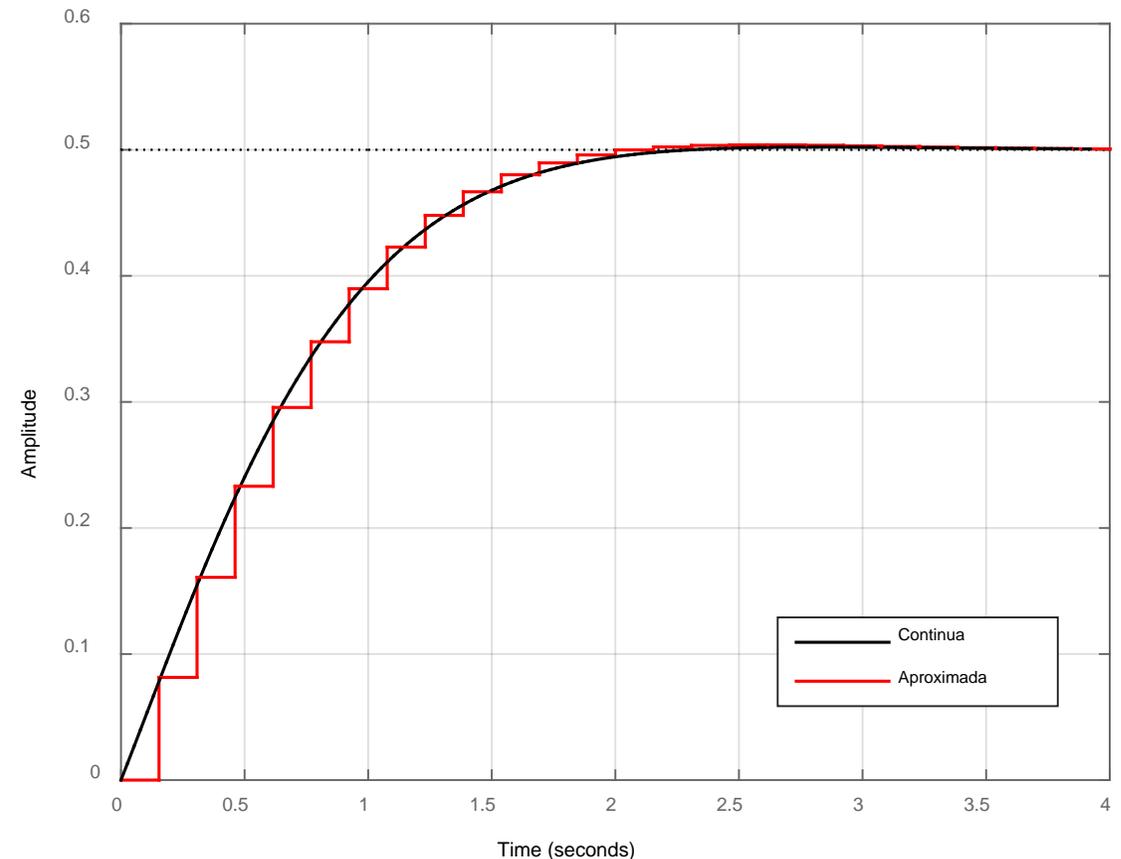
$$G_p(z) = \frac{0,08147z - 0,0437}{z^2 - 1,593z + 0,6303}$$

$$G_{lc}(z) = \frac{G_p(z)}{1 + G_p(z)} \Rightarrow G_{lc}(z) = \frac{0,08147z - 0,0437}{z^2 - 1,5115z + 0,5866}$$

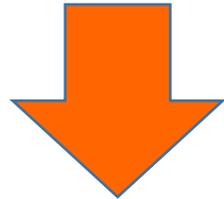
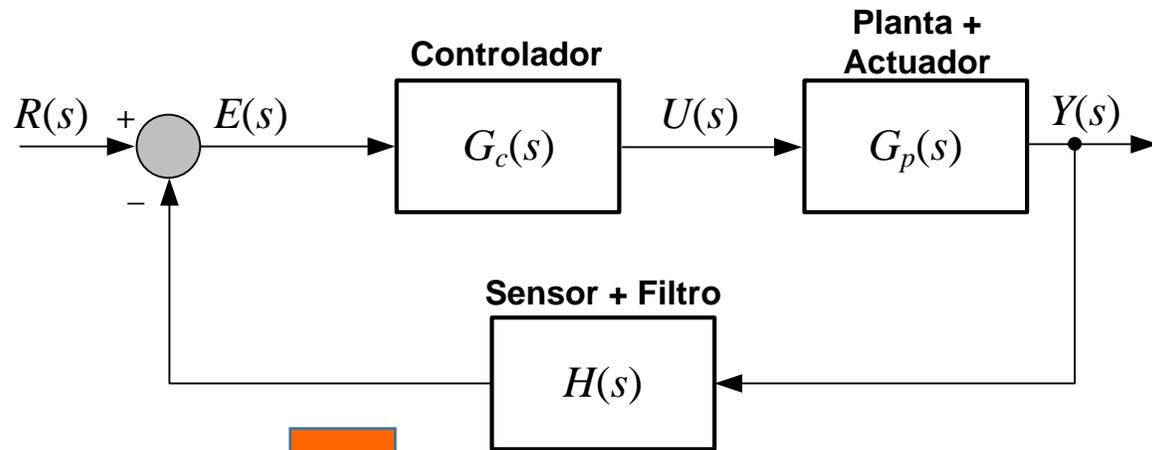
Resp. al escalón unitario de la Planta



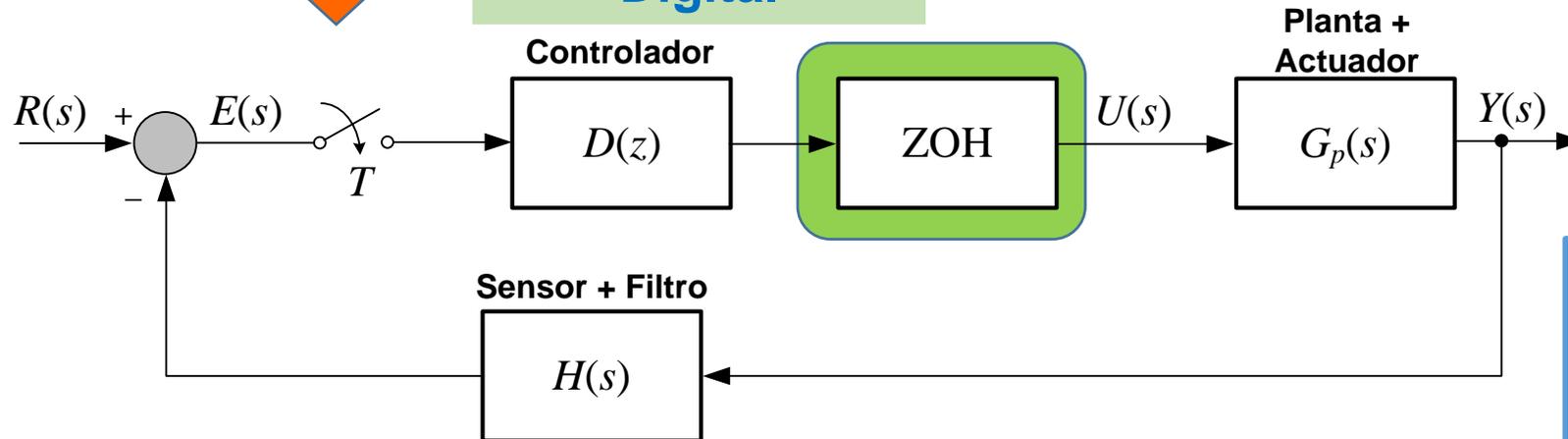
Resp. al escalón unitario del Sistema LC



Técnica de Compensación del Atraso del ZOH



Implementación Digital



Inconvenientes



- A frecuencias de muestreo relativamente bajas el ZOH puede degradar el desempeño de lazo cerrado.

- Esto puede llevar en algunos casos, a la inestabilidad del sistema en lazo cerrado de tiempo discreto.

Solución

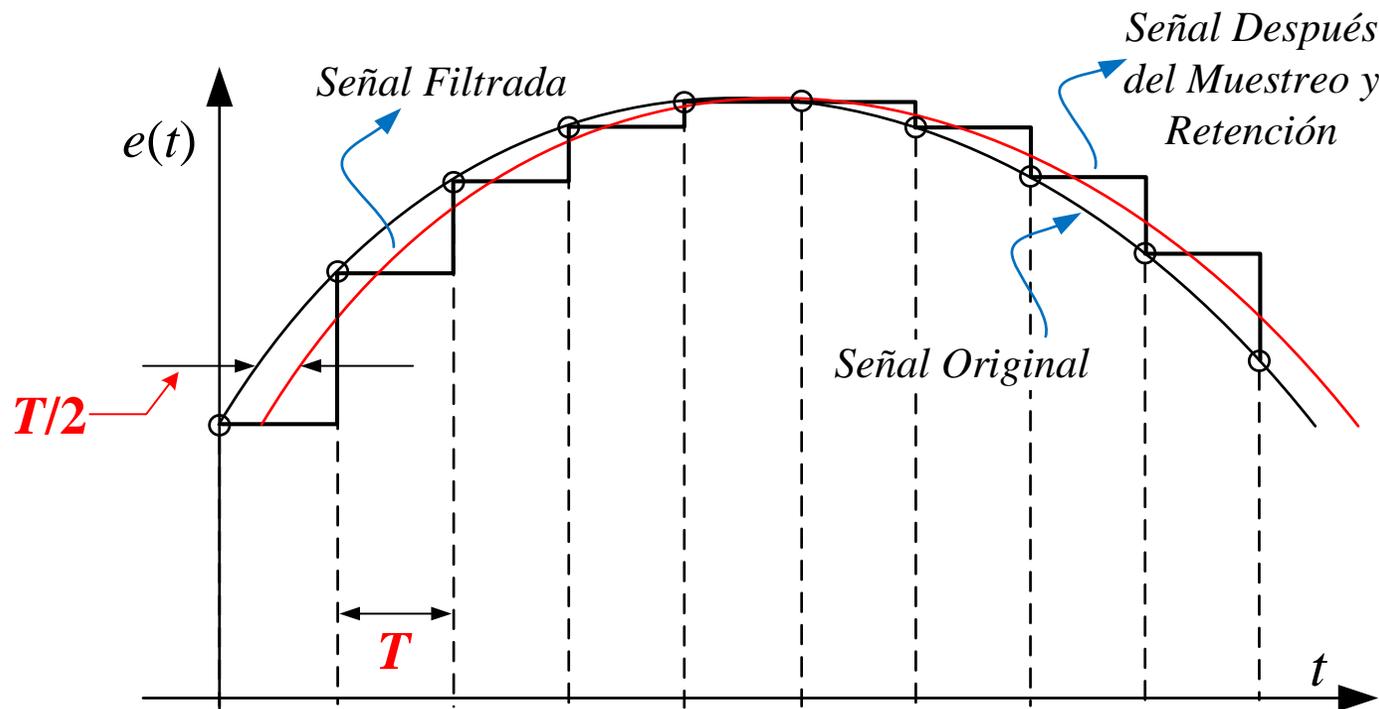


En la aproximación del controlador en tiempo continuo a tiempo discreto, debe incorporarse la compensación del ZOH.

Técnica de Compensación del Atraso del ZOH

Método de Compensación

Se basa en agregar un par polo-cero en el plano- z a la función de transferencia del controlador en tiempo discreto aproximada por algunos de los métodos analizados.



Con esta compensación se propone solucionar el atraso de medio periodo de muestreo $T/2$.

Compensación Propuesta

$$C(z) = \frac{2z}{z+1}$$

Presenta un cero al origen y un polo en $z = -1$, o sea en $\omega_s/2$.

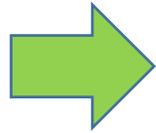
Técnica de Compensación del Atraso del ZOH

Método de Compensación

Esta compensación cancela exactamente la respuesta de fase del ZOH obtenida de

$$G_{\text{ZOH}}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

$$C(z) = \frac{2z}{z+1}$$



Esta expresión, es la inversa de la transformación de Tustin de la aproximación de Padé de 1° orden del ZOH:

La aproximación de Padé de 1° orden del ZOH



$$\frac{1 - e^{-sT}}{sT} \approx \frac{1}{1 + \frac{sT}{2}}$$

Aplicándose la aproximación de Tustin



$$\left. \frac{1}{1 + \frac{sT}{2}} \right|_{s = \frac{2z-1}{Tz+1}} = \frac{z+1}{2z}$$

Técnica de Compensación del Atraso del ZOH

Método de Compensación

$$C(z) = \frac{2z}{z+1}$$

Importante: El método no garantiza un sistema de lazo cerrado estable, dado que es independiente del método de discretización y del periodo de muestreo

Condición necesaria para la utilización del método: Que el polinomio característico del sistema en tiempo discreto a lazo cerrado posea todas las raíces dentro del círculo unitario:

$$1 + \left(\frac{2z}{z+1} \right) D(z)(1 - z^{-1}) Z \left[\frac{G_p(s)}{s} \right] = 0$$

Si la compensación propuesta causa inestabilidad debe modificarse levemente la configuración del par polo-cero introducido:

$$C'(z) = \frac{2(z - \varepsilon)}{z + 1 - 2\varepsilon}$$

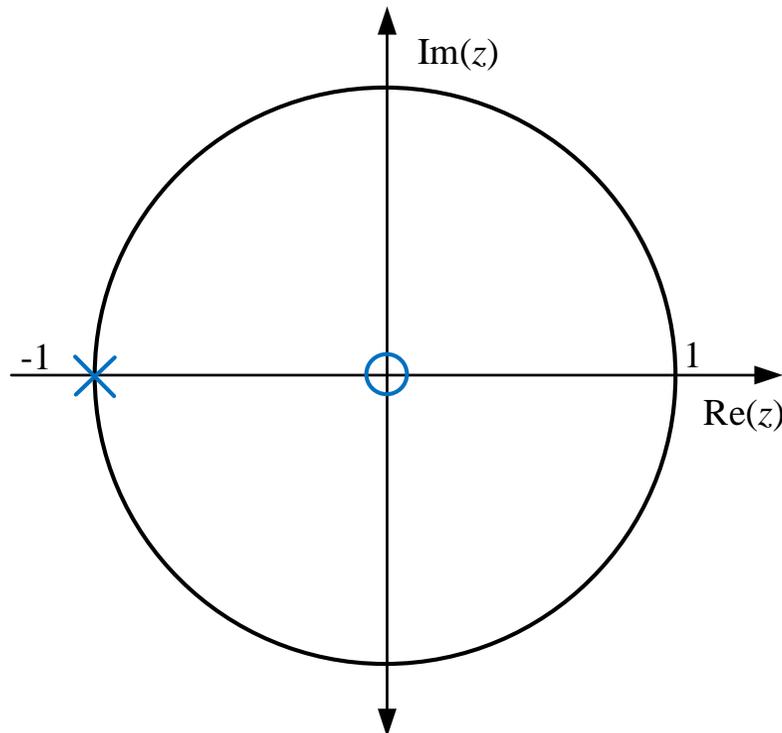
Siendo ε una pequeña constante positiva

Técnica de Compensación del Atraso del ZOH

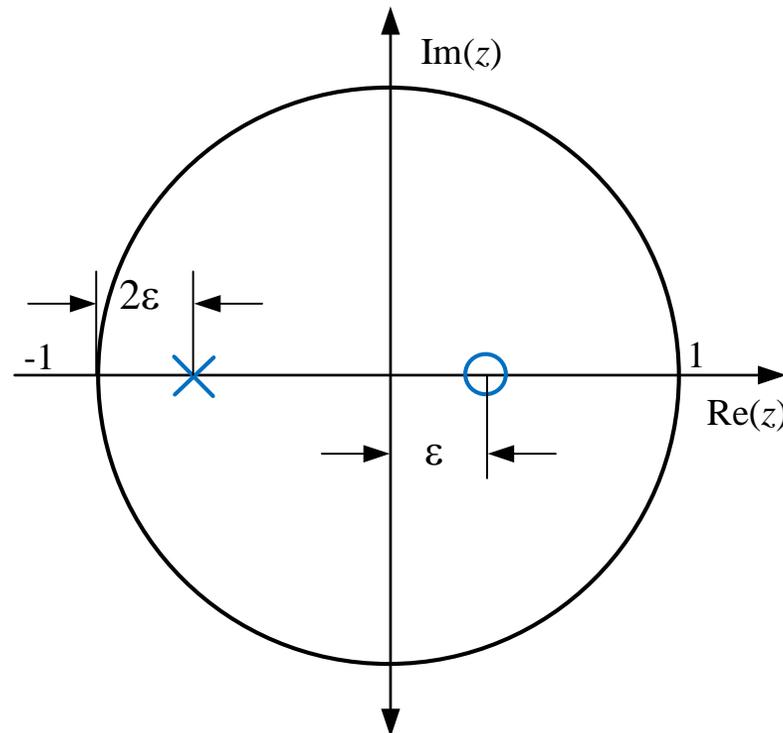
Compensación Modificada

$$C'(z) = \frac{2(z - \varepsilon)}{z + 1 - 2\varepsilon}$$

Importante: Esta compensación modificada preserva la ganancia de continua del controlador.



**Compensación
 $C(z)$**



**Compensación
 $C'(z)$**

Técnica de Compensación del Atraso del ZOH

Procedimiento de diseño

1. Seleccionar una aproximación para el controlador $G_c(s)$ y el periodo de muestreo adecuado para obtener $D(z)$.
2. Multiplicar $D(z)$ por $C(z)$.
3. Igualar la ganancia CC de lazo abierto del sistema de control digital con el del sistema analógico.
4. Verificar la estabilidad de lazo cerrado en el plano- z . Si es estable, verificar el desempeño en régimen transitorio y permanente de acuerdo a las especificaciones impuestas en tiempo continuo.
5. Si en el paso anterior el sistema resulta inestable, utilice la compensación modificada $C'(z)$ con un pequeño valor de épsilon " $\varepsilon > 0$ ". El valor de ε debe ser lo más pequeño posible para poder garantizar un buen desempeño en las altas frecuencias.
6. Repetir los pasos 3 y 4.
7. Si el sistema aún continúa inestable, este método de compensación no es útil para el proceso en análisis.

Implementación del Algoritmo de Control

La secuencia que debe seguir el programa dedicado a calcular la acción de control es la siguiente:

- ❑ Adquisición y digitalización de la señal a controlar (salida de la planta). Si la referencia es externa, también se debe adquirir y digitalizar.
- ❑ Cálculo del error haciendo la resta entre la referencia y la señal de salida de la planta.
- ❑ Cálculo de la acción de control a través de la ecuación recursiva del controlador y aplicación de la misma.

Por ejemplo: $u(k) = u(k-1) + K e(k) - aK e(k-1)$ **Ecuación recursiva de un PI digital.**

En la ecuación anterior, “ a ” y “ K ” son constantes obtenidas en el proceso de diseño del controlador.

- ❑ Actualización de la acción de control calculada, al registro de salida del procesador, según la estrategia configurada.
- ❑ Finalmente se actualizan los valores anteriores correspondientes a:

$u(k-1) \leftarrow u(k)$ Actualiza la acción de control anterior, cargándole el valor actual de la misma.

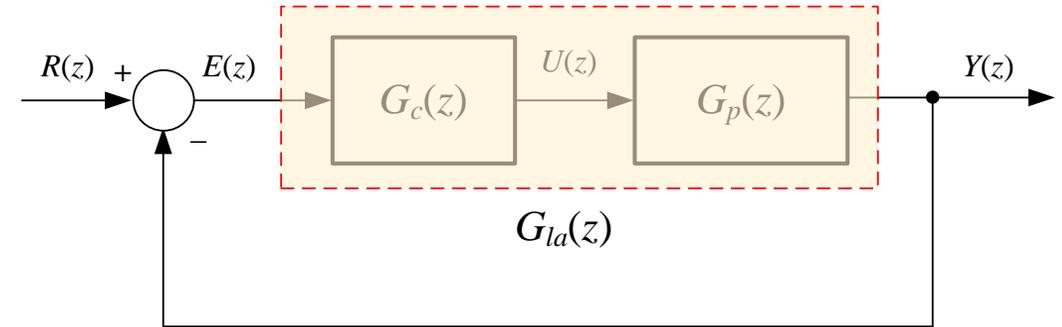
$e(k-1) \leftarrow e(k)$ Actualiza el error anterior, cargándole el valor actual del mismo.

Error en Estado Estacionario

Definición:

El “Tipo” de un sistema continuo está dado por la cantidad de polos en el origen ($s = 0$) que posee su FT. Este concepto también se aplica a los sistemas discretos, considerando que para $s = 0$ es $z = e^{0T} = 1$. Entonces para un sistema discreto representado por $G_{la}(z)$, el tipo del sistema está dado por el número de polos en $z = 1$.

$$s = 0 \rightarrow z = e^{0T} \Rightarrow G_{la}(z) = \frac{A(z)}{(z-1)^N B(z)} \quad \begin{cases} N = 0 \rightarrow \text{Sistema Tipo 0.} \\ N = 1 \rightarrow \text{Sistema Tipo 1.} \\ N = 2 \rightarrow \text{Sistema Tipo 2.} \end{cases}$$



Como veremos a continuación, el “Tipo” de sistema define la precisión del mismo en régimen estacionario o permanente. Para el sistema de control indicado en la figura anterior se tiene que la FTLC y la FT del error están dadas por:

$$G_{lcc}(z) = \frac{G_{la}(z)}{1 + G_{la}(z)} \quad E(z) = [1 - G_{lcc}(z)]R(z) \Rightarrow E(z) = \frac{R(z)}{1 + G_{la}(z)}$$

Aplicando el Teorema del Valor Final, se halla el error en estado estacionario del sistema:

$$e_{ss}^* = \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1 - z^{-1}) E(z) \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\left(\frac{z-1}{z} \right) \frac{R(z)}{1 + G_{la}(z)} \right]$$

Error en Estado Estacionario

Error en Estado Estacionario

Error de Posición: La entrada es un escalón unitario

$$r(k) = 1 \Rightarrow R(z) = \frac{z}{z-1} \quad e_{ssp} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{(z-1)}{z} \frac{1}{1+G_{la}(z)} \frac{z}{(z-1)} \right] \Rightarrow \boxed{e_{ssp} = \frac{1}{1+K_p}} \quad \begin{aligned} K_p &= \lim_{z \rightarrow 1} G_{la}(z) \\ K_p &: \text{Cte. de error de posición} \end{aligned}$$

Error de Velocidad: La entrada es una rampa unitaria

$$r(k) = t(k) \Rightarrow R(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2} \quad e_{ssv} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{(z-1)}{z} \frac{1}{1+G_{la}(z)} \frac{Tz}{(z-1)^2} \right] \Rightarrow \boxed{e_{ssv} = \frac{1}{K_v}} \quad \begin{aligned} K_v &= \frac{1}{T} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)G_{la}(z)] \\ K_v &: \text{Cte. de error de velocidad} \end{aligned}$$

Error de Aceleración: La entrada es una parábola

$$r(k) = \frac{1}{2}t^2(k) \Rightarrow R(z) = \frac{T^2 z(z-1)}{2(z-1)^3} \quad e_{ssa} = \lim_{z \rightarrow 1} \left[\frac{(z-1)}{z} \frac{1}{1+G_{la}(z)} \frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3} \right] \Rightarrow \boxed{e_{ssa} = \frac{1}{K_a}} \quad \begin{aligned} K_a &= \frac{1}{T^2} \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)^2 G_{la}(z)] \\ K_a &: \text{Cte. de error de aceleración} \end{aligned}$$

Constantes de Error: Cuanto mayor es el valor de la constante, menor es el error correspondiente.

Error en Estado Estacionario

Resumen:

Sistema	Entrada Escalón	Entrada Rampa	Entrada Parábola
TIPO 0	$K_p = K \Rightarrow e_{ssp} = \frac{1}{1 + K_p}$	$K_v = 0 \Rightarrow e_{ssv} = \infty$	$K_a = 0 \Rightarrow e_{ssa} = \infty$
TIPO 1	$K_p = \infty \Rightarrow e_{ssp} = 0$	$K_v = K \Rightarrow e_{ssv} = \frac{1}{K}$	$K_a = 0 \Rightarrow e_{ssa} = \infty$
TIPO 2	$K_p = \infty \Rightarrow e_{ssp} = 0$	$K_v = \infty \Rightarrow e_{ssv} = 0$	$K_a = K \Rightarrow e_{ssa} = \frac{1}{K}$
TIPO 3	$K_p = \infty \Rightarrow e_{ssp} = 0$	$K_v = \infty \Rightarrow e_{ssv} = 0$	$K_a = \infty \Rightarrow e_{ssa} = 0$

Bibliografía

-  **SISTEMAS DE CONTROL DIGITAL, 1ed, Benjamín C. Kuo - Compañía Editorial Continental, 2002.**
-  **SISTEMAS DE CONTROL DE TIEMPO DISCRETO, 2ed, Katsuhiko Ogata - Prentice Hall, 1996.**
-  **DIGITAL CONTROL ENGINEERING, ANALYSIS AND DESIGN, 2ed - M. S. Fadali, A. Visioli – Elsevier 2013.**