



Universidad Nacional de Misiones



---

# SISTEMAS DE CONTROL 2

---

Profesor: Fernando Botterón  
Ingeniería Electrónica - 2020  
Facultad de Ingeniería - U.Na.M

## Temas de la Unidad 3

### Unidad 3: Análisis de Sistemas Muestreados

- ☑ Relación del muestreo y sus efectos en los polos.
- ☑ Relación entre los planos “s” y “z”.
- ☑ Región deseada de polos de LC en el plano z.
- ☑ Modelado de Sistemas de Control Digital.
  - Modelado de la Planta o Proceso: Aprox. Invariante al Escalón
  - Aproximación Discreta de Controladores: *Backward*, *Forward* y *Tustin*.
- ☑ Error en Estado Estacionario.
- ☑ Estabilidad en Sistemas Muestreados.

# El Muestreo y sus Efectos

La señal de tiempo continuo que se muestrea tiene un espectro cuya máxima frecuencia es  $\omega_1$ .

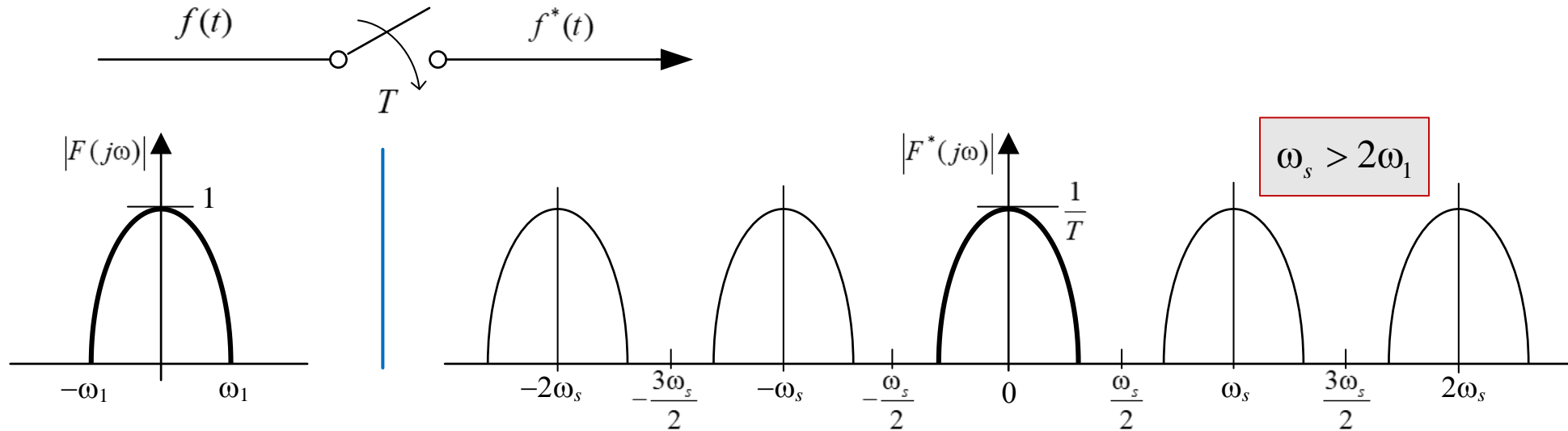


Figura 1 - Espectro de  $f(t)$

Figura 2 - Espectro de  $f^*(t)$

Por el Teorema de Muestreo, si  $\omega_s = 2\pi/T$  es mayor que  $\omega_1$ , la señal  $f(t)$  puede reconstruirse completamente a partir de la señal muestreada  $f^*(t)$ .

La transformada de Laplace de  $f^*(t)$  es:

$$F^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s \pm jk\omega_s)$$

El espectro de frecuencia de la señal muestreada mediante modulador de pulsos, se reproduce un número infinito de veces y su amplitud se atenúa en  $1/T$ . Entonces, el proceso de modulación de amplitud de pulsos produce bandas laterales al espectro de la señal original.

# El Muestreo y sus Efectos

Dado que  $F^*(s)$  es periódica con un periodo igual a  $2\pi/\omega_s$  la misma puede escribirse:

$$F^*(s) = F^*(s \pm jk\omega_s), \text{ con } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Esto nos dice que si  $F(s)$  tiene un polo en  $s = s_1$ ,  $F^*(s)$ , por la periodicidad, presentará polos en  $s = s_1 \pm jk\omega_s$

**En el espectro en frecuencia de  $F^*(j\omega)$  la misma está formada por los siguientes términos:**

$$F^*(j\omega) = \dots + \frac{1}{T} F[j(\omega - \omega_s)] + \frac{1}{T} F(j\omega) + \frac{1}{T} F[j(\omega + \omega_s)] + \dots$$

**Donde el término  $\frac{1}{T} F(j\omega)$  se denomina componente primaria**

**Y los términos  $\frac{1}{T} F[j(\omega \pm \omega_s)]$  se denominan componentes complementarias**

Si  $\omega_s > 2\omega_1$ , las componentes de  $F^*(j\omega)$  no se solapan y el espectro en frecuencia de la señal muestreada se repite en  $\omega_s$ .

Si  $\omega_s < 2\omega_1$ , las componentes de  $F^*(j\omega)$  se solapan y la señal  $f(t)$  no puede ser reconstruida totalmente luego de muestreada.

# El Muestreo y sus Efectos

## Solapamiento o Traslapamiento de Frecuencia

La frecuencia  $\omega_s/2$  se denomina frecuencia de solapamiento o traslapamiento. Esta no es otra que la Frecuencia de Nyquist:  $\omega_N = \omega_s/2 = \pi/T$ .

Considérese una frecuencia arbitraria  $\omega_2$  que cae en la región de solapamiento. El espectro en frecuencia centrado en  $\omega = \omega_2$  presenta dos componentes:

$$|F^*(j\omega_2)| \text{ y otro en } |F^*[j(\omega_s - \omega_2)]|$$

En general será:  $n\omega_s \pm \omega_2$  con  $n$  entero.

Si  $F^*(j\omega_2)$  se pasa por un filtro pasa bajos, como por ejemplo un ZOH, las frecuencias armónicas de alta frecuencia de la señal principal, o sea, las componentes  $\omega = n\omega_s \pm \omega_2$ , van a aparecer en la señal fundamental como si fueran una componente de frecuencia  $\omega_2$ .

El fenómeno de que la frecuencia  $(\omega_s - \omega_2)$  se presente sobre la señal de frecuencia  $\omega_2$ , se denomina *traslape* y esta frecuencia  $(\omega_s - \omega_2)$  se denomina *alias* de  $\omega_2$ .

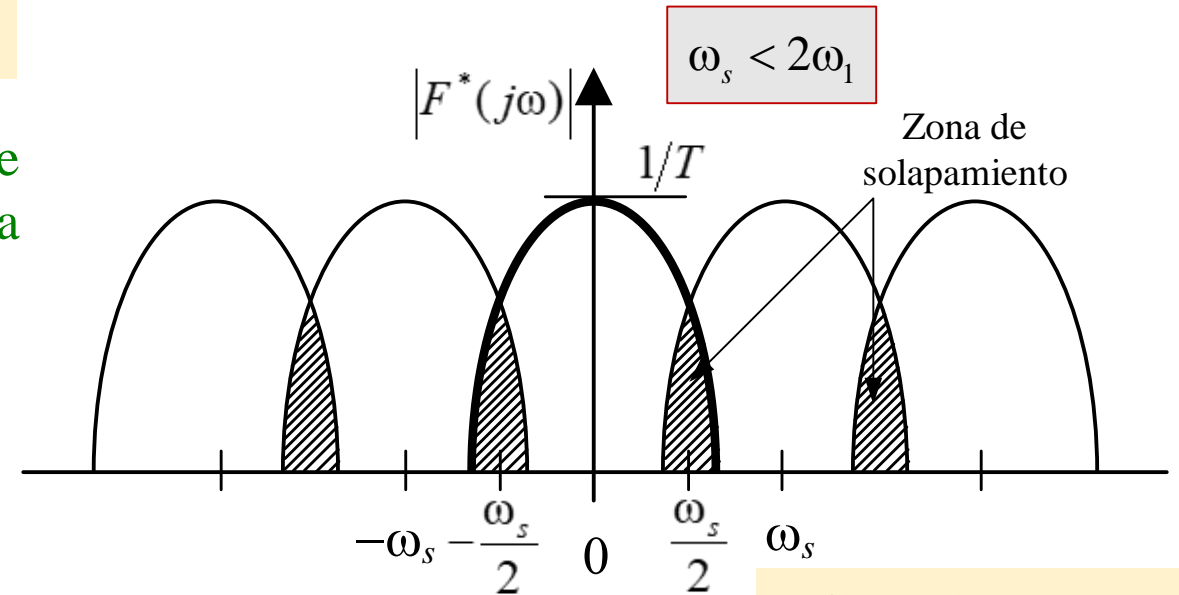


Figura 3 - Traslape

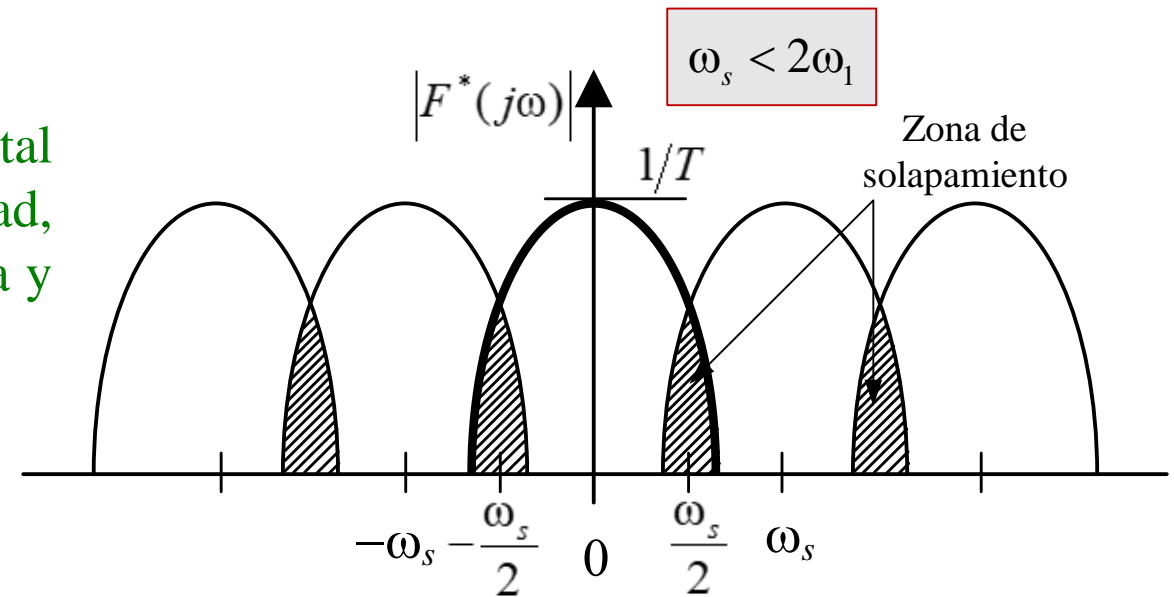
# El Muestreo y sus Efectos

## Doblamiento de Frecuencia

Un sistema electromecánico operando en lazo cerrado, tal como un motor cuyo actuador es un variador de velocidad, puede tener contaminación por señales de ruido, de baja y de alta frecuencia.

Considérese por ejemplo, ruidos en frecuencias provenientes de la misma frecuencia fundamental de la tensión de alimentación de 50 Hz y ruidos de alta frecuencia de la modulación en 2 kHz.

Si la frecuencia de muestreo seleccionada es de 1 kHz por limitaciones del hardware, por ejemplo o aspectos de la estabilidad, la componente de 2 kHz se ‘doblará’ y aparecerá como una componente de baja frecuencia: **Hay que tener en cuenta que esto sucede porque todas las señales con frecuencias mayores a  $\omega_s/2$  aparecen como señales con frecuencias entre 0 y  $\omega_s/2$ .**

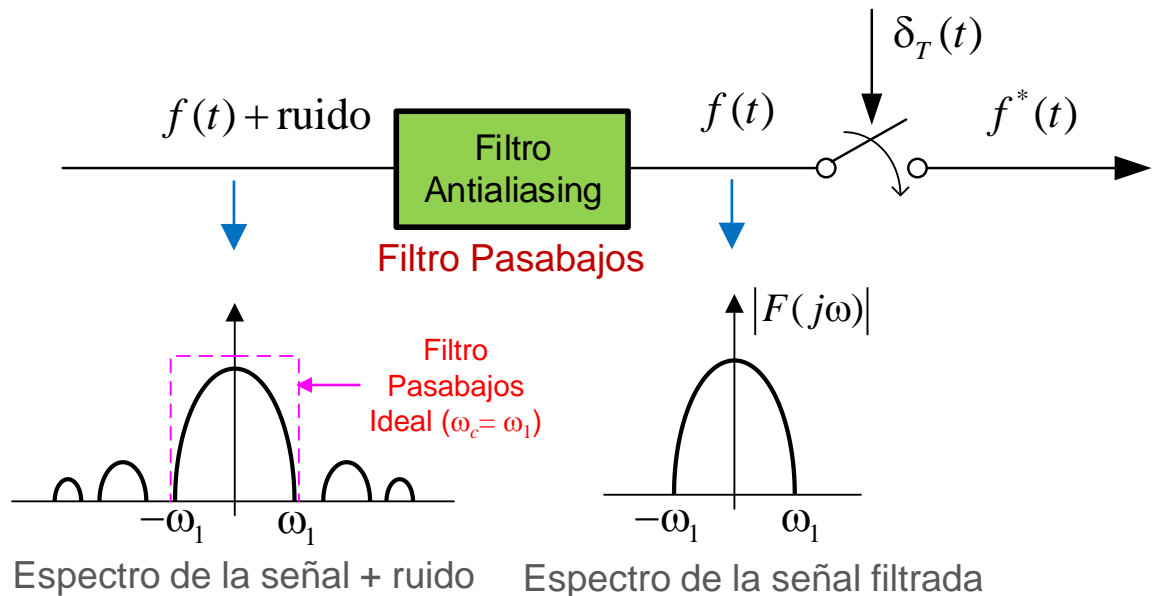


Este es otro efecto del traslape.

# El Muestreo y sus Efectos

## Como evitar entonces el efecto de Traslape de espectros en frecuencia

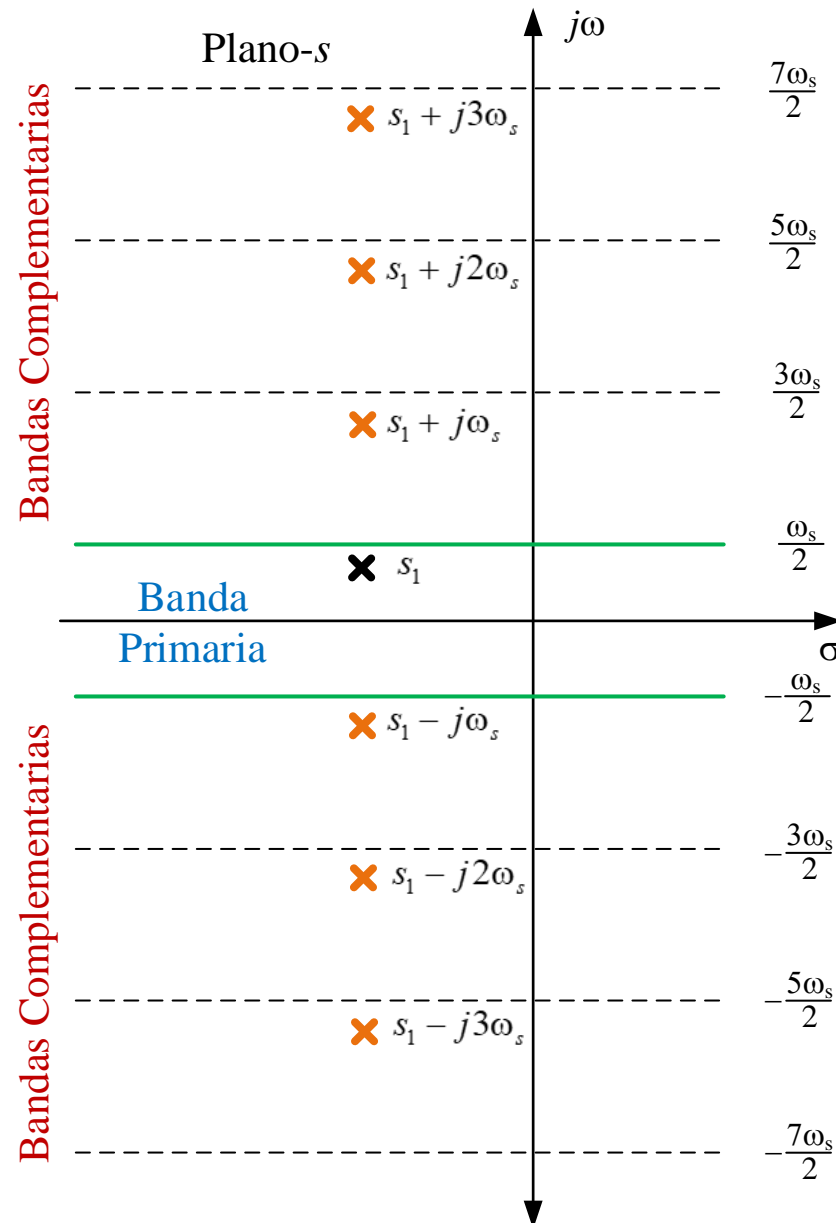
- 1 – Elegir la frecuencia de muestreo lo suficientemente elevada  $\omega_s \gg 2\omega_1$  siendo  $\omega_1$  la máxima componente de frecuencia presente en la señal de interés o señal controlada.
- 2 – Utilizar un prefiltro (analógico) o filtro antialias antes del muestreador, para darle forma al espectro en frecuencia de la señal antes de realizar el muestreo de la misma. Este filtro pasa bajas, debe tener un ancho de banda en lo posible, entre el valor  $\omega_1$  y  $\omega_s - \omega_1$  para conseguir que el espectro en frecuencia para frecuencias mayores a  $\omega_s/2$  sea despreciable.



Si la frecuencia de corte del filtro antialiasing es  $\omega_c = \omega_1$ , entonces

$$\omega_c < \frac{\omega_s}{2}$$

# Propiedades de $F^*(s)$ en el Plano-s



Se vio que el espectro en frecuencia de  $F^*(j\omega)$  está formado por una componente primaria y componentes complementarias. Esto se traduce en el plano-s, en una región definida como “Banda Primaria”, entre  $\omega_s/2$  y  $-\omega_s/2$  y en regiones que aparecen a frecuencias superiores espaciadas en  $\omega_s$ , las cuales se denominan “Bandas Complementarias”.

Como ya se vio,  $F^*(s)$  es una función periódica con periodo  $2\pi/\omega_s$ , por lo que:

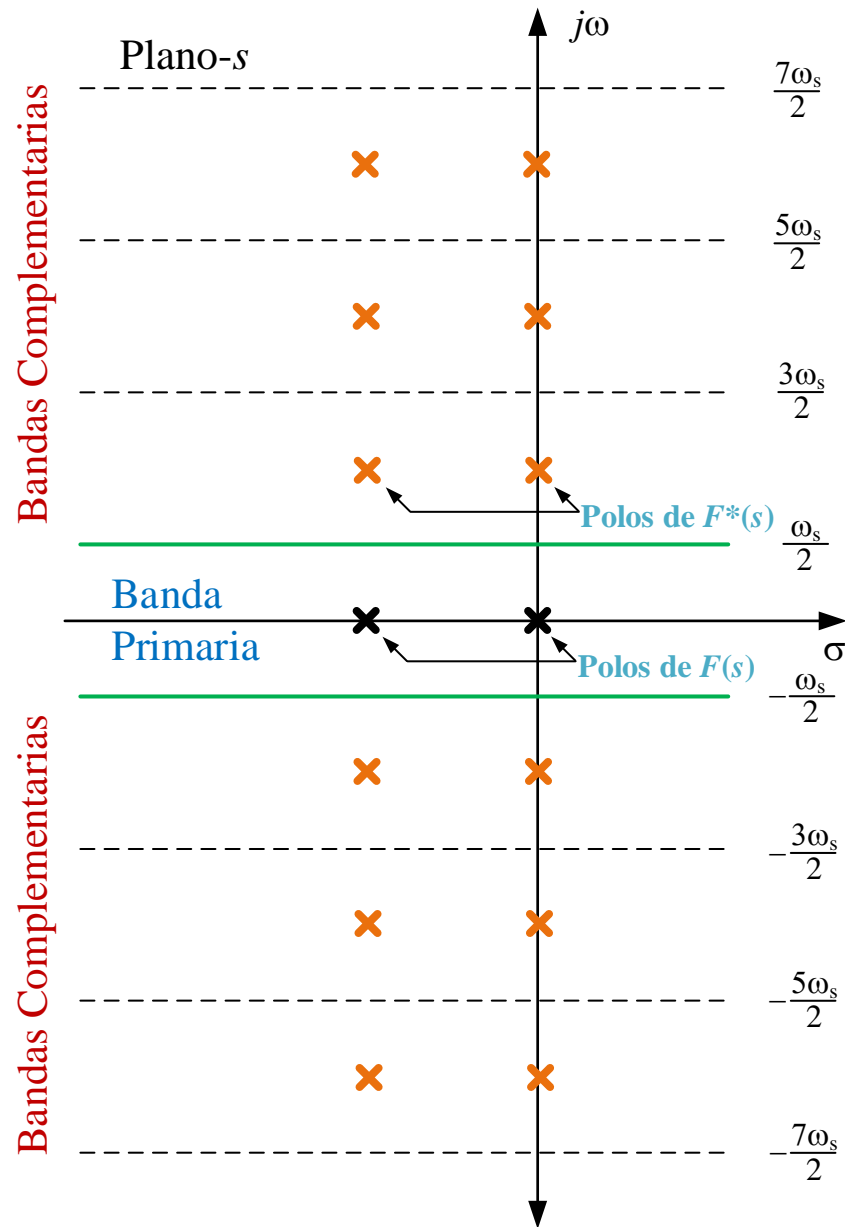
$$F^*(s) = F^*(s \pm jk\omega_s), \text{ con } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Por ejemplo:

Si  $F(s)$  tiene un polo en  $s_1 \Rightarrow F^*(s)$  presentará polos en  $s_1 \pm jk\omega_s$



# Propiedades de $F^*(s)$ en el Plano-s



Si  $F(s)$  tiene un par de polos reales en el plano-s, entonces  $F^*(s)$  presenta un número infinito de polos localizados en las bandas complementarias, en posiciones periódicamente espaciadas por múltiplos enteros de  $\omega_s$ , por lo que:

Si se cumple que:

$$f_m > 2f_{\max}$$

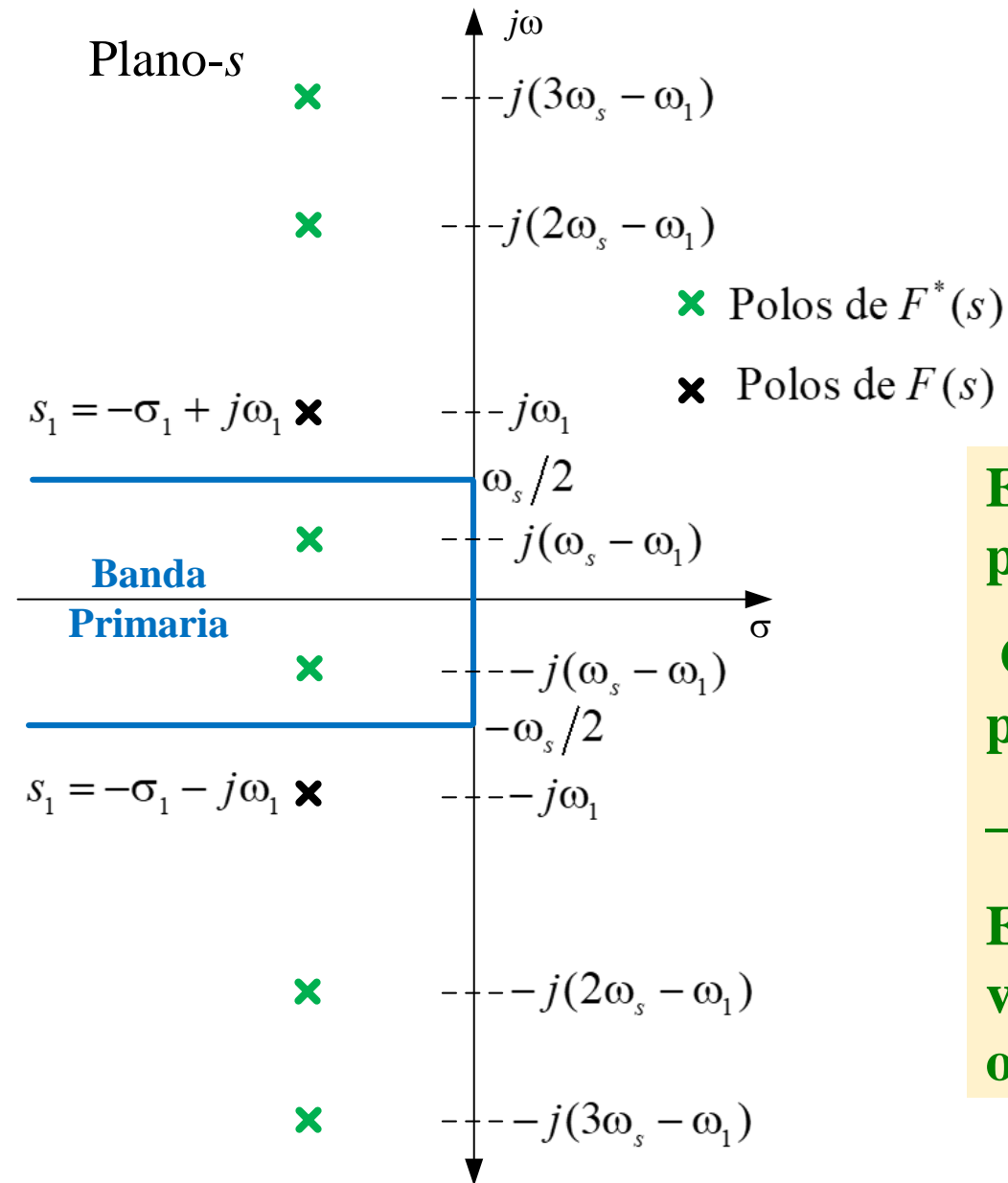
Los polos de  $F^*(s)$  quedaran dentro de la Banda Primaria y de esta forma el muestreo los duplica y traslapa a las Bandas Complementarias

De esta forma, con un filtro pasa bajas con frecuencia de corte  $|\omega_c| < \omega_s/2$  pueden eliminarse las armónicas de los polos replicados, para poder recuperar  $f(t)$

# Propiedades de $F^*(s)$ en el Plano- $s$

## Doblamiento de frecuencias

$$\omega_s < 2\omega_1$$

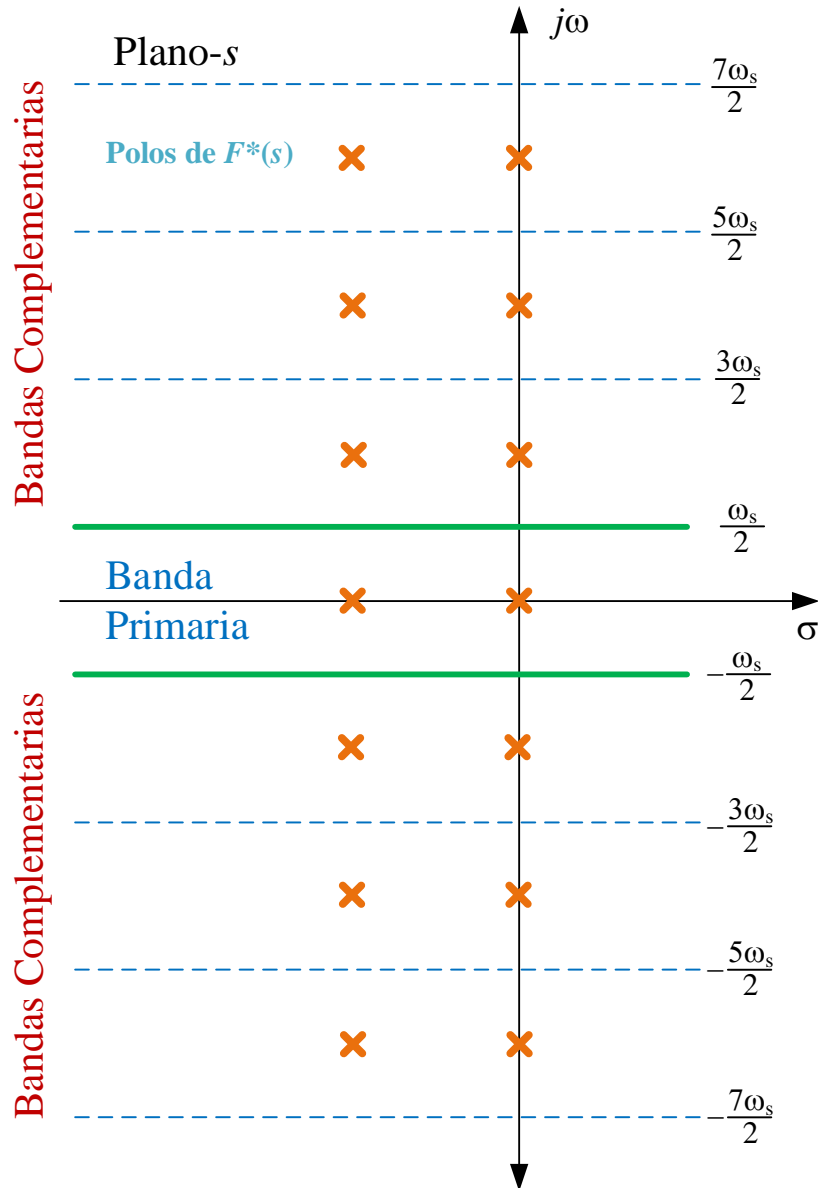


El sistema se comporta como si tuviera polos en las posiciones  $-\sigma_1 \pm j(n\omega_s \pm \omega_1)$  con  $n$  entero.

O sea, el muestreo dobla los polos externos a la banda primaria hacia el interior de la misma en los valores  $-\sigma_1 \pm j(\omega_s - \omega_1)$ .

Esto da como resultado que, en la señal controlada, se verán oscilaciones de valor  $(\omega_s - \omega_1)$  en vez de la oscilación  $\omega_1$ .

# Relación entre los planos “s” y “z”

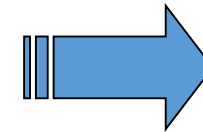


Como ya se analizó, la función  $F^*(s)$  en el plano-s, presenta un número infinito de polos localizados en la banda primaria y bandas complementarias, en posiciones periódicamente espaciadas por múltiplos enteros de  $\omega_s$ .

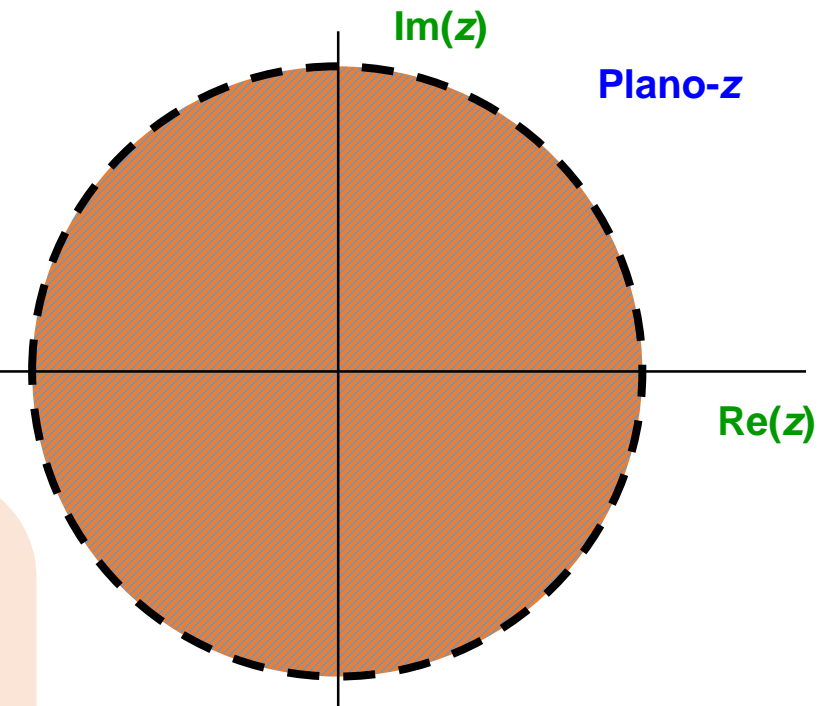
$$F^*(s) = F^*(s \pm jk\omega_s)$$

$$\omega_s = 2\pi/T$$

$$z = e^{Ts}$$

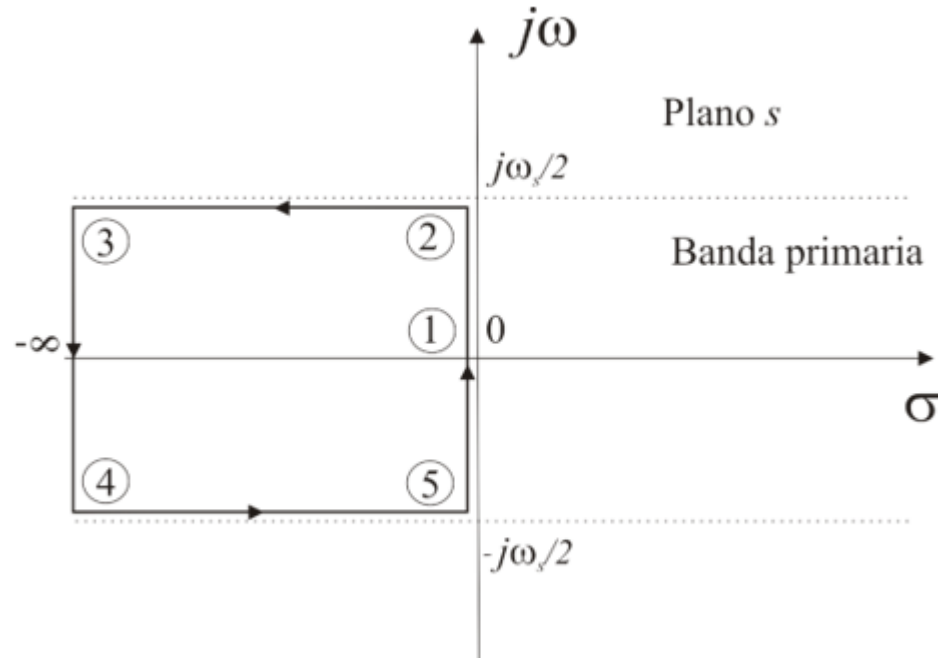


La Transformada Z traslapa los  $\infty$  polos en un  $N^\circ$  finito de polos en el plano-z

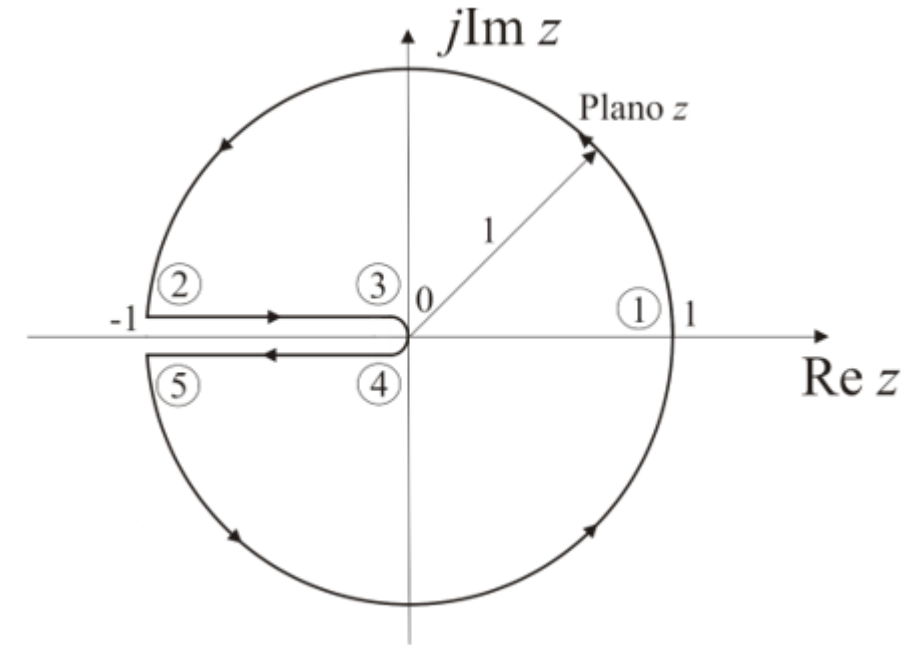
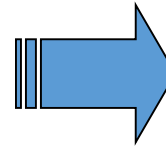


# Relación entre los planos “s” y “z”

Considerando la banda primaria del plano-s, el mapeo de la misma en el plano-z queda:



$$T = 2\pi/\omega_s$$

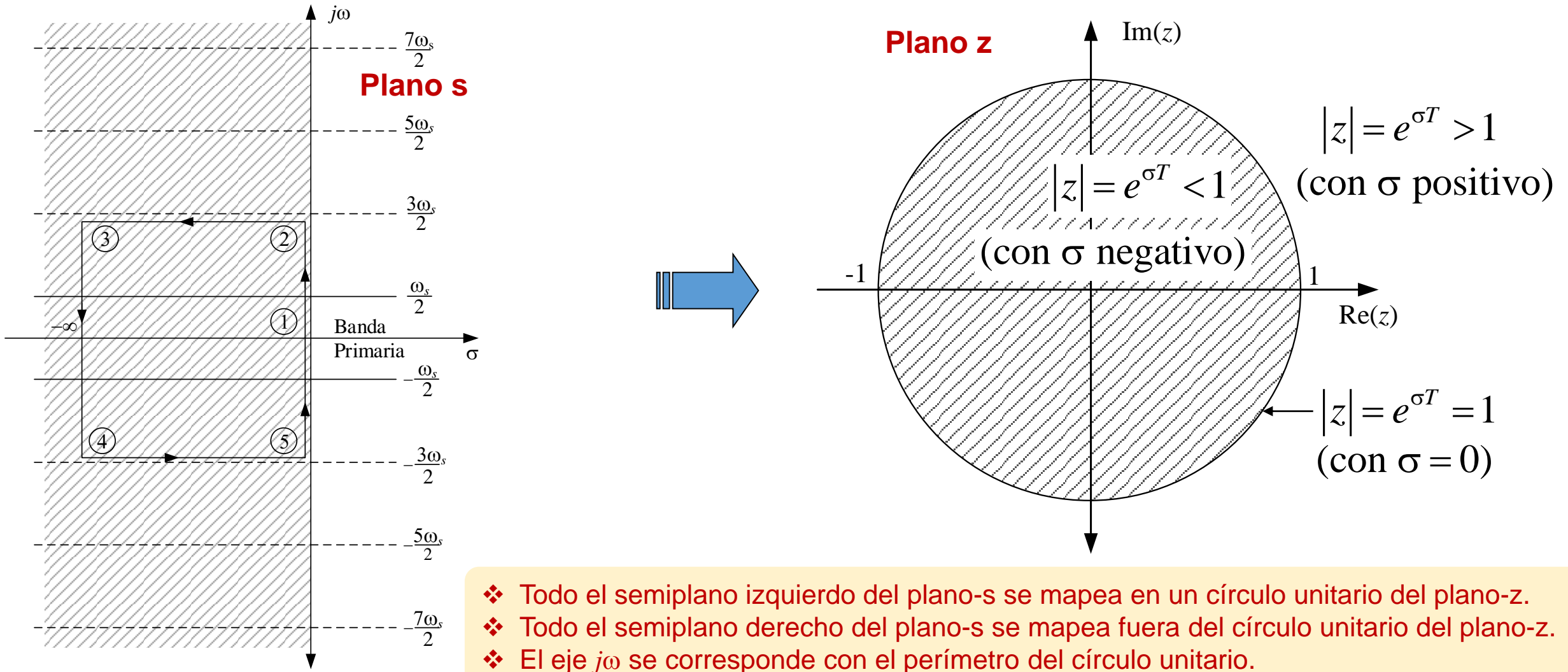


- ①  $s = 0 \Rightarrow z = e^{0T} [\cos(0) + j\text{sen}(0)] = 1$
- ②  $s = j\omega_s/2 \Rightarrow z = e^{0T} [\cos(\pi) + j\text{sen}(\pi)] = -1$
- ③  $s = -\infty + j\omega_s/2 \Rightarrow z = e^{-\infty T} [\cos(\pi) + j\text{sen}(\pi)] = 0$
- ④  $s = -\infty - j\omega_s/2 \Rightarrow z = e^{-\infty T} [\cos(-\pi) + j\text{sen}(-\pi)] = 0$
- ⑤  $s = -j\omega_s/2 \Rightarrow z = e^{0T} [\cos(-\pi) + j\text{sen}(-\pi)] = -1$

La parte izquierda de la Banda Primaria del Plano-s se transforma en un Círculo de Radio Unitario centrado en el origen del Plano-z

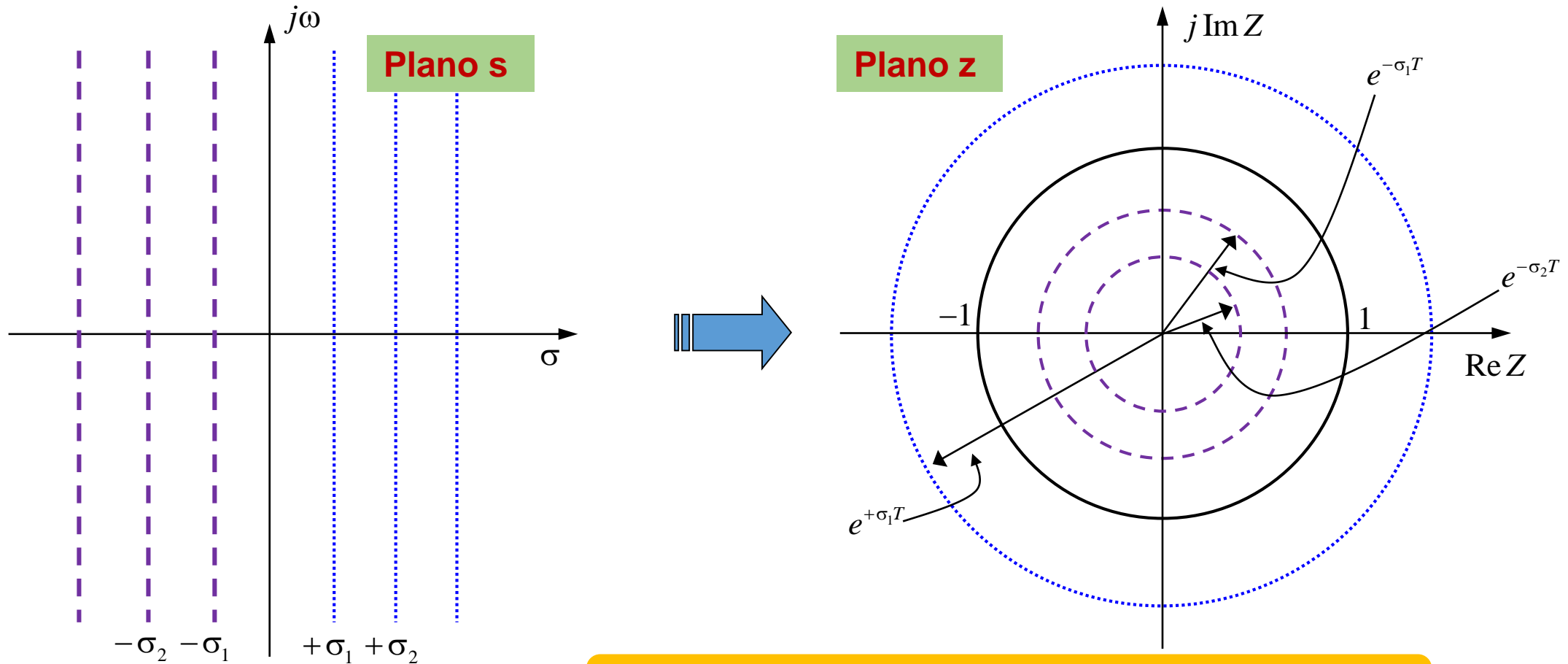
# Relación entre los planos “s” y “z”

Incorporando en el mapeo la banda complementaria próxima a la primaria, se tiene:



# Relación entre los planos “s” y “z”

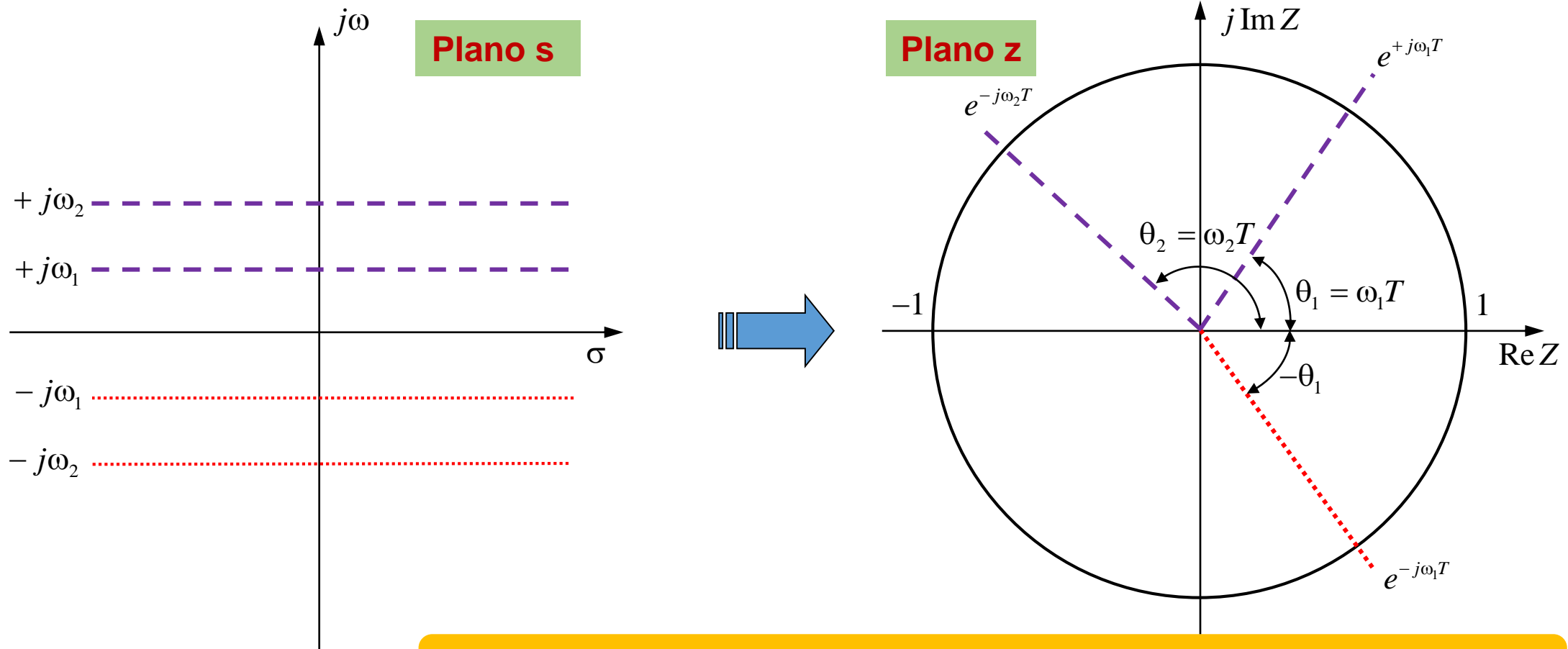
Lugar geométrico de amortiguamiento constante:  $\sigma = \text{cte.}$



Para  $\sigma = \text{cte.}$  el mapeo en el plano z resulta en círculos concéntricos de radio  $e^{\sigma T}$ .

# Relación entre los planos "s" y "z"

Lugar geométrico de frecuencia de oscilación constante:  $\omega_d = \text{cte.}$



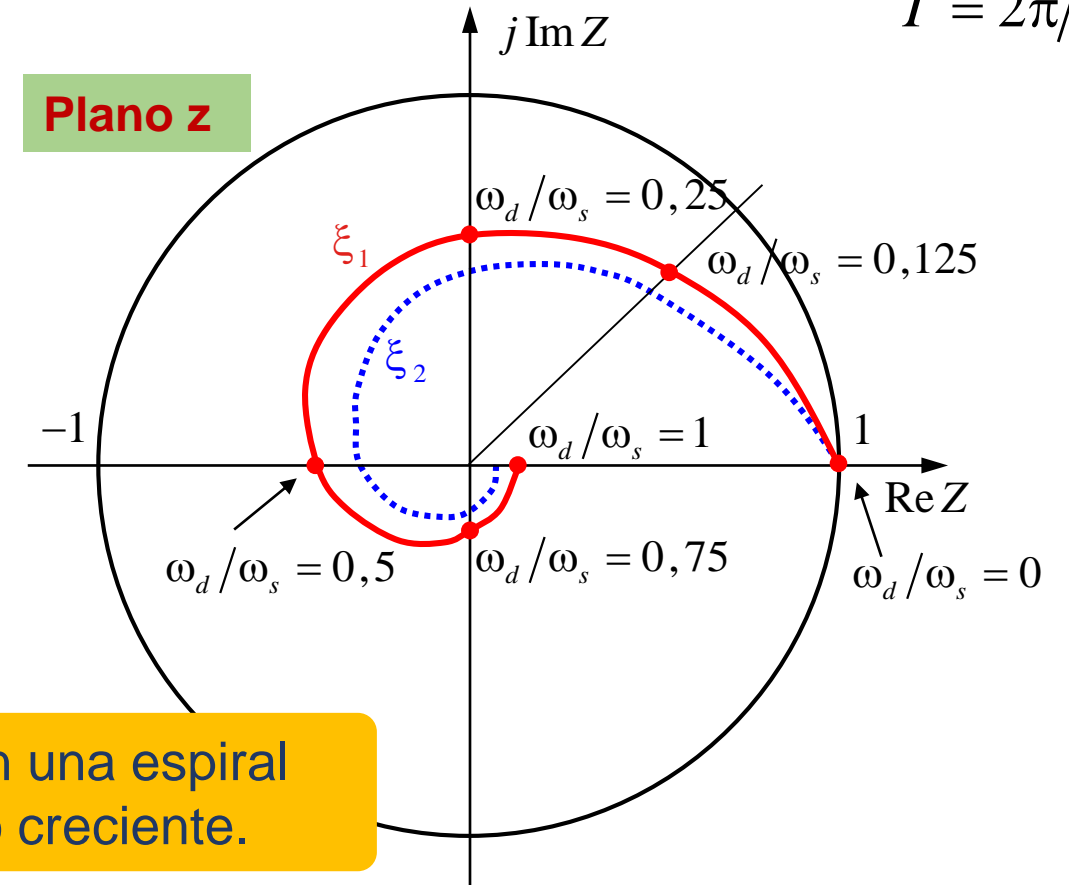
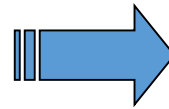
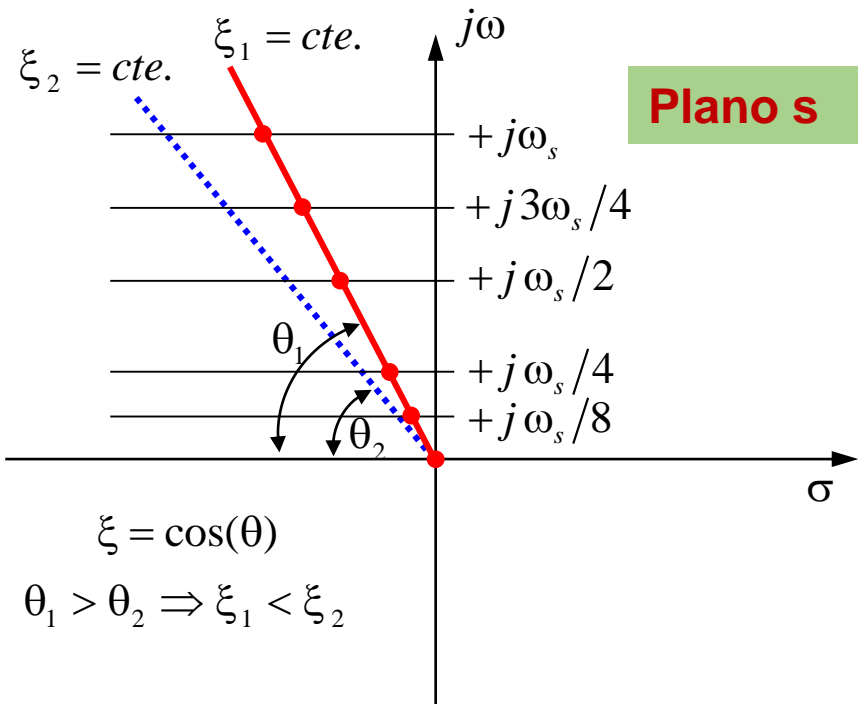
Para  $\omega_d = \text{cte.}$  el mapeo en el plano z resulta en líneas radiales con un ángulo  $\theta = \omega T$ , medido a partir del eje real positivo

# Relación entre los planos "s" y "z"

Lugar geométrico de factor de amortiguamiento relativo constante:  $\xi = \text{cte.}$

$$s = -\xi\omega_n + j\omega_d = -\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\omega_d + j\omega_d \Rightarrow z = e^{sT} = \exp\left[\left(-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\omega_d + j\omega_d\right)T\right] \quad \left\{ \begin{array}{l} |z| = \exp\left(-\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{\omega_d}{\omega_s}\right) \\ \angle z = 2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s} \end{array} \right. \quad \square \quad z = 2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s}$$

$$T = 2\pi/\omega_s$$

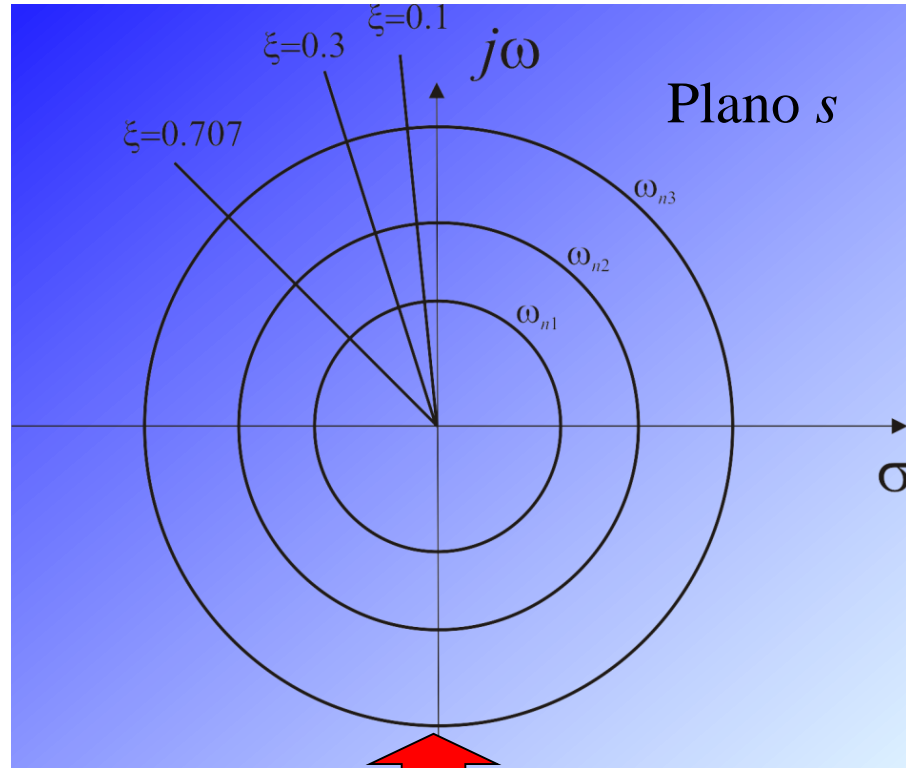


Para  $\xi_d = \text{cte.}$  el mapeo en el plano z resulta en una espiral logarítmica con amplitud decreciente y ángulo creciente.

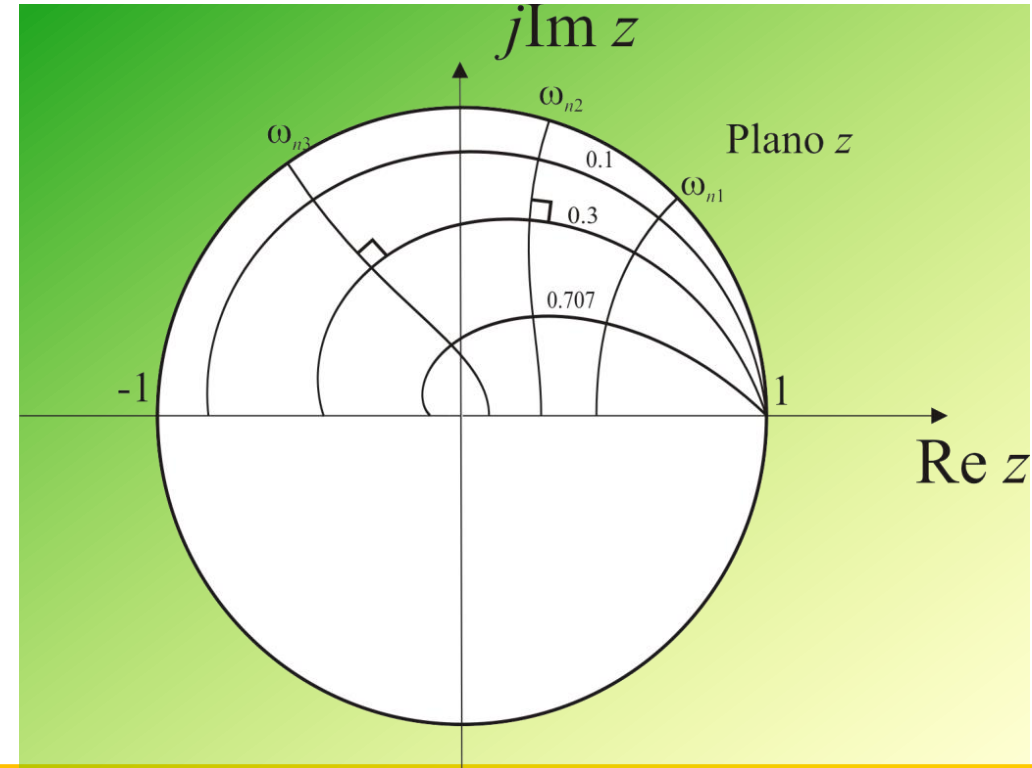


# Relación entre los planos “s” y “z”

Lugar geométrico de frecuencia natural constante:  $\omega_n = \text{cte.}$



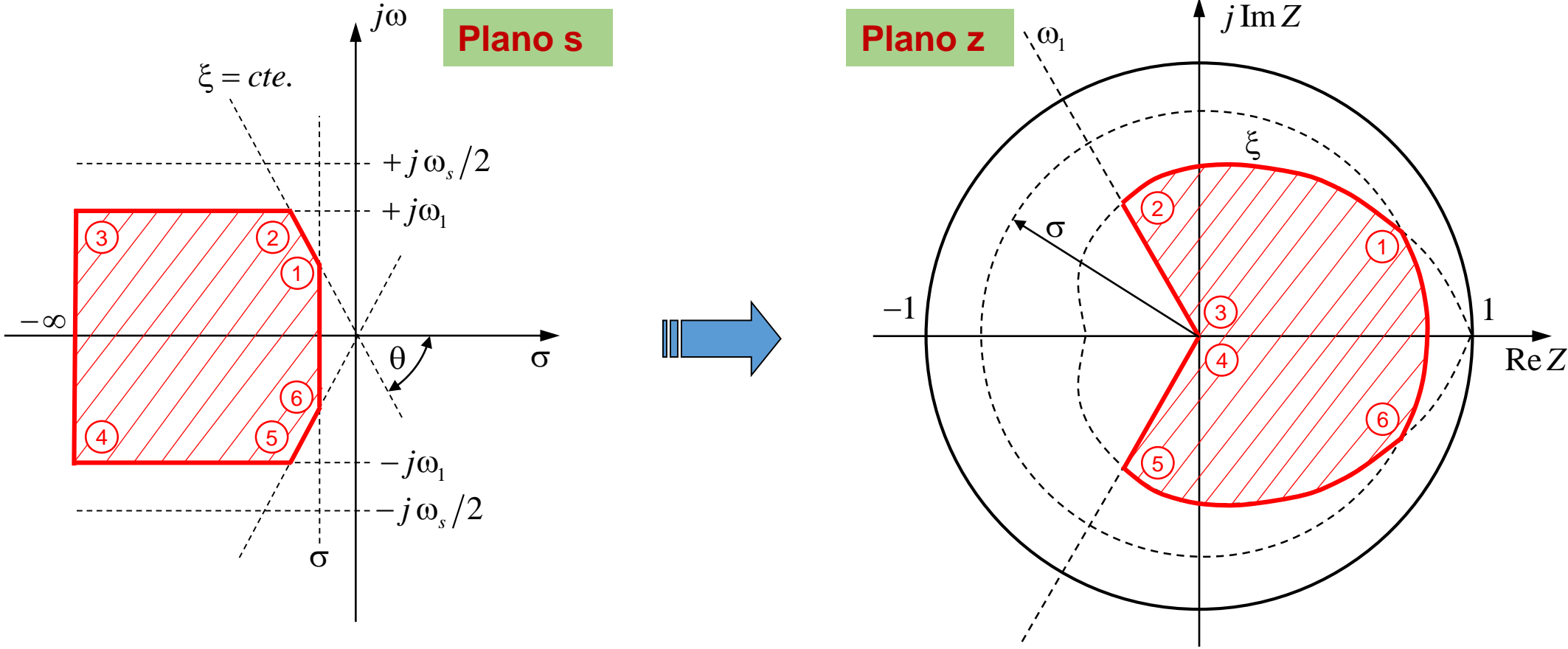
Las regiones a  $\omega_n$  constante son normales a las de  $\xi$  constante



Como en el mapeo conforme los ángulos y sentidos de los lugares se mantienen, en el plano z los lugares a  $\omega_n$  constante serán curvas normales a las espirales logarítmicas a  $\xi$  constante.

# Región deseada de polos de Lazo Cerrado en el plano z

## Mapeo de la región deseada:



Las frecuencias de interés en el plano s, corresponden a la mitad superior de la banda primaria ( $0 \leq \omega \leq \omega_s/2$ ), ya que la misma albergará los polos del sistema y no sus “duplicados” debido al muestreo.

# Aspectos del Diseño de Controladores Discretos

Obtención del Modelo Nominal de la Planta

- MODELOS EN TIEMPO CONTINUO
- MODELOS EN TIEMPO DISCRETO



# Controladores de Tiempo Continuo Discretizados o Aproximados

## ☑ Controladores de Tiempo Continuo:

⇒ Proporcional (P);

⇒ Proporcional + Integral (PI);

⇒ Proporcional + Derivativo (PD) y

⇒ Proporcional + Integral + Derivativo (PID)

⇒ Redes de Atraso o de Adelanto y de Atraso-Adelanto de Fase

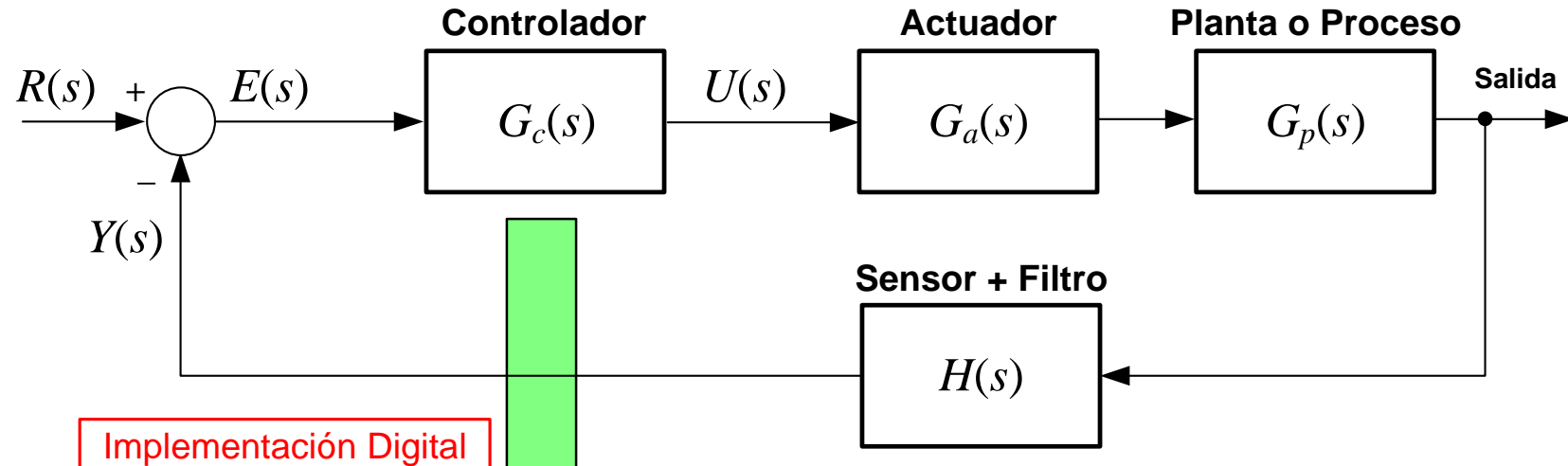
*Discretización del  
Controlador  
Continuo*

- Aproximaciones de Euler
- Utilizando un ZOH o un FOH
- Transformación Bilineal, etc.

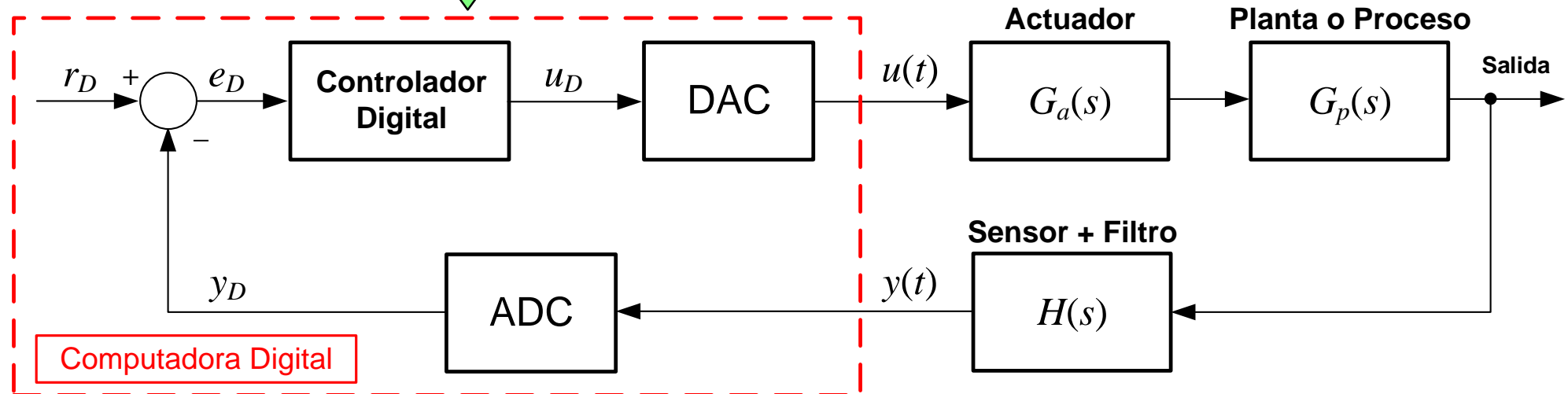
**DESVENTAJA: NO INCLUYE ATRASO INHERENTE A LA IMPLEMENTACIÓN DIGITAL**

# Controladores de Tiempo Continuo Discretizados o Aproximados

**DESVENTAJA:** No incluye el atraso de transporte de la implementación digital



Implementación Digital



Computadora Digital

# Controladores de Tiempo Discreto

## VENTAJAS DEL MODELO de TIEMPO DISCRETO

- Permite modelar los atrasos de la implementación
- El controlador resulta en la forma adecuada para su implementación
- Resulta fácil la implementación de sistemas de múltiples lazos con diferentes frecuencias de muestreo

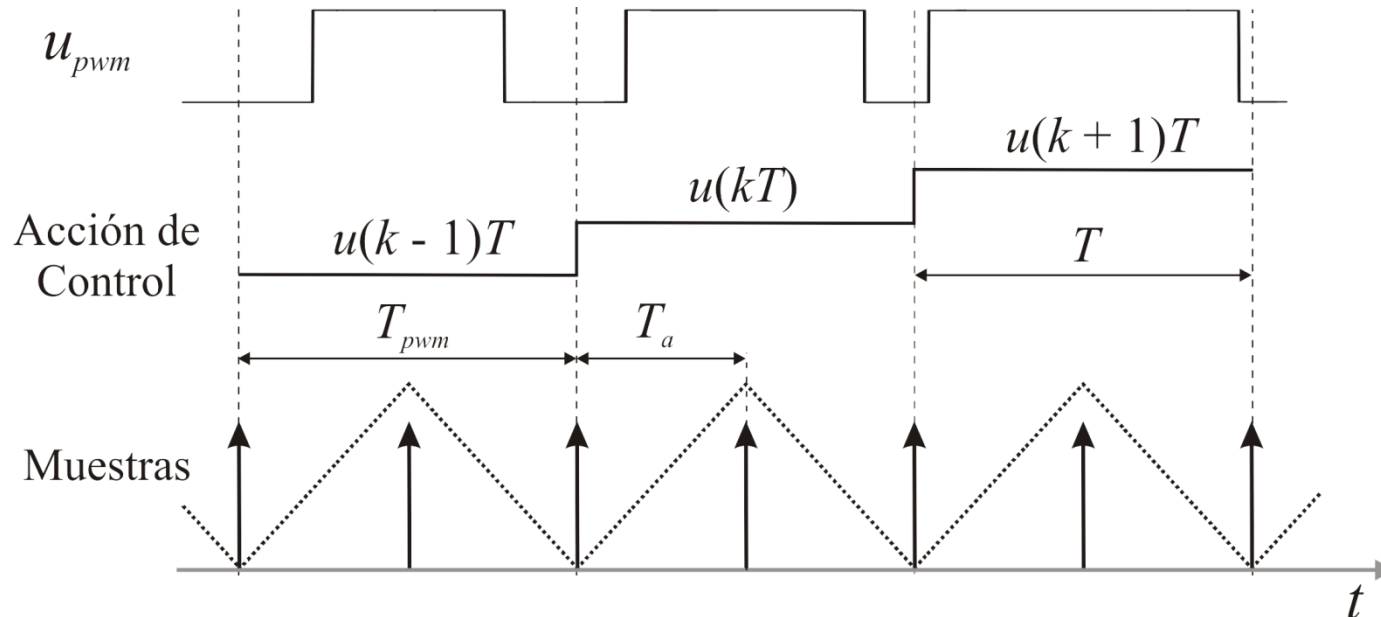


Diagrama de tiempos de ejecución de una estrategia de control digital a partir del modelo en tiempo discreto: El modelo puede estar dado por su Función de transferencia o por su relación en el espacio de estados.

# Controladores en Tiempo Discreto que pueden implementarse

## ☑ Controladores de Tiempo Discreto:

⇒ Proporcional (P);

⇒ Proporcional + Integral (PI);

⇒ Proporcional + Derivativo (PD);

⇒ Proporcional + Integral + Derivativo (PID);

} Predictivos

⇒ De Respuesta de Tiempo Mínimo (por F.T o R.E);

⇒ Regulador Lineal Cuadrático Discreto (Energía Mínima);

⇒ Servo Controlador con Realimentación de Estados;

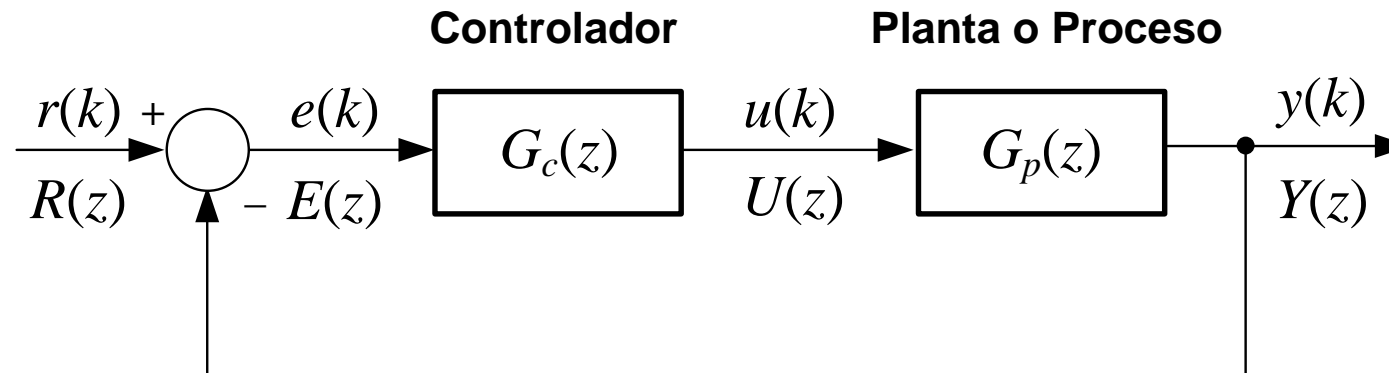
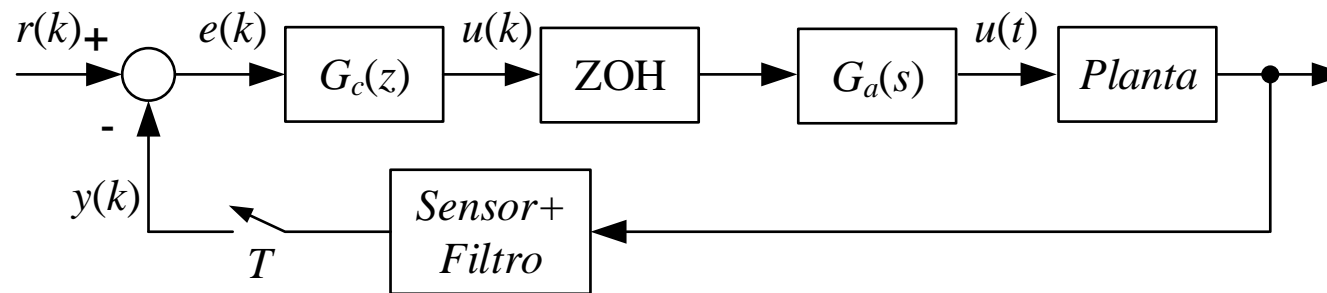
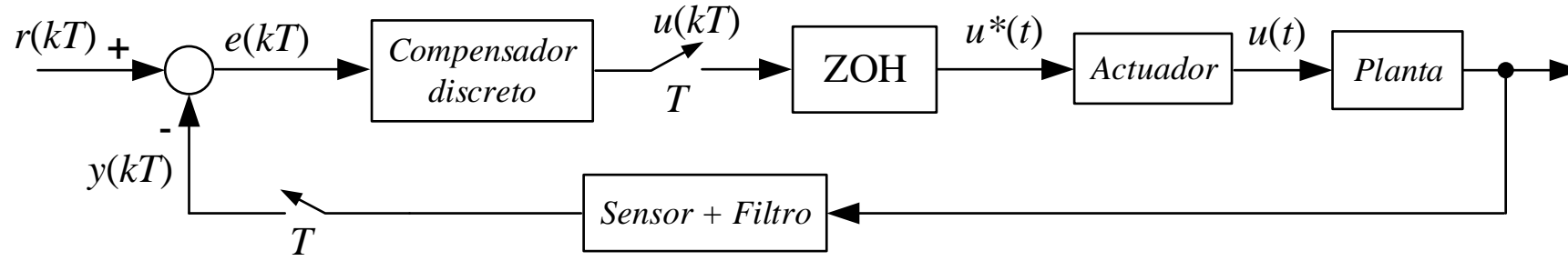
⇒ Modelo Interno;

⇒ Controladores Adaptativos e Identificación Paramétrica;

⇒ Observadores de Estados;

⇒ Sistemas de control con múltiples lazos y diferentes frecuencias de muestreo.

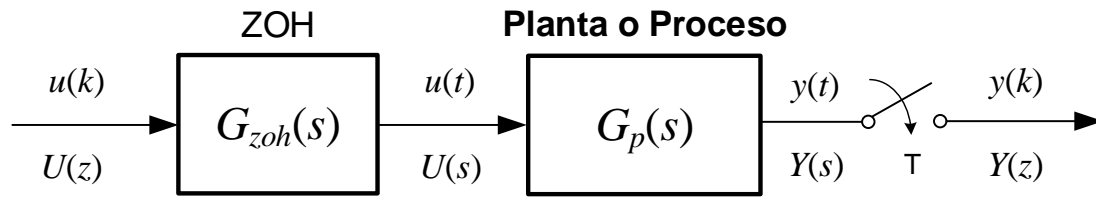
# Sistemas Muestreados en Lazo cerrado





# Modelado de Sistemas de Control Digital

A partir del muestreador, el ZOH y la planta se tiene:



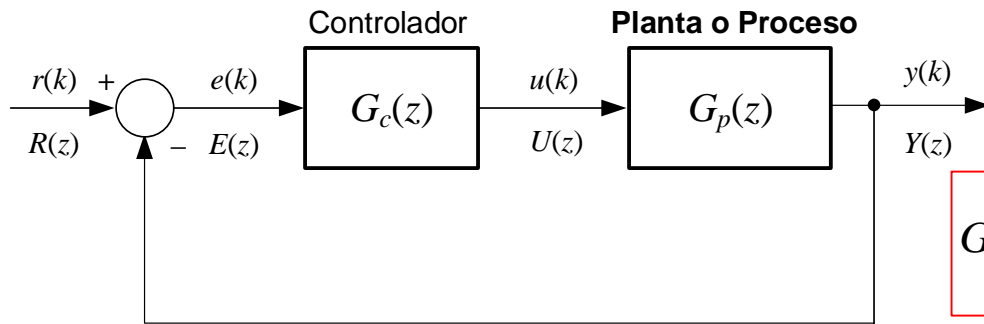
$$G_{zoh}(s)G_p(s) = \left( \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \right) G_p(s) = (1 - e^{-Ts}) \frac{G_p(s)}{s}$$

$$z = e^{Ts} \Rightarrow G_p(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = (1 - z^{-1}) Z \left[ \frac{G_p(s)}{s} \right]$$

FT discretizada de la Planta o Proceso

(Aproximación invariante al escalón, lo que hace Matlab con la función "c2d")

Considerando  $G_p(z)$ , el diagrama de bloques del sistema de control a LC queda:



$$G_{lcc}(z) = \frac{G_c(z)G_p(z)}{1 + G_c(z)G_p(z)}$$

FTLC muestreada con realimentación unitaria  $H(s) = 1$  y  $G_a(z) = 1$

$$G_{lcc}(z) = \frac{G_c(z)G_a(z)G_p(z)}{1 + G_c(z)G_a(z)G_p(z)H(z)}$$

FTLC muestreada con  $H(s) \neq 1$ ,  $G_a(z) \neq 1$ , donde:

La FTLA muestreada para el diseño, con  $H(s) \neq 1$  y  $G_a(z) \neq 1$ , donde:

$$G_a(z)G_p(z)H(z) = (1 - z^{-1}) Z \left[ \frac{G_a(s)G_p(s)H(s)}{s} \right]$$

# Modelado de Sistemas de Control Digital

## Ejemplo 1:

Sea un proceso que está modelado por la siguiente FT:  $G_p(s) = \frac{0,5(s+4)}{(s+1)(s+2)}$

- A) Determinar su aproximación invariante al escalón.
- B) Hallar la FTLC discretizada considerando realimentación unitaria.

### A) Aproximación invariante al escalón:

$$\frac{G_p(s)}{s} = \frac{0,5(s+4)}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{1,5}{(s+1)} + \frac{0,5}{(s+2)}$$

La aproximación se obtiene de:  $G_p(z) = (1-z^{-1})Z\left[\frac{G_p(s)}{s}\right] = \frac{z-1}{z}Z\left[\frac{1}{s} - \frac{1,5}{(s+1)} + \frac{0,5}{(s+2)}\right]$

De tablas, la TZ queda:  $G_p(z) = \frac{(z-1)}{z} \left[ \frac{z}{(z-1)} - \frac{1,5z}{(z-e^{-T})} + \frac{0,5z}{(z-e^{-2T})} \right] \Rightarrow G_p(z) = 1 - \frac{1,5(z-1)}{(z-e^{-T})} + \frac{0,5(z-1)}{(z-e^{-2T})}$

Si la respuesta al escalón del sistema a LC posee un tiempo de subida  $t_r = 1,23s$ , considerando un  $N^0$  de muestras de 8, el periodo de muestreo queda:  $T = \frac{t_r}{N_r} = 0,153s$

A partir del periodo de muestreo, la aproximación invariante al escalón de  $G_p(s)$  queda:

$$G_p(z) = \frac{0,08147z - 0,0437}{z^2 - 1,593z + 0,6303} = \frac{0,08147(z - 0,5364)}{(z - 0,8574)(z - 0,7351)}$$

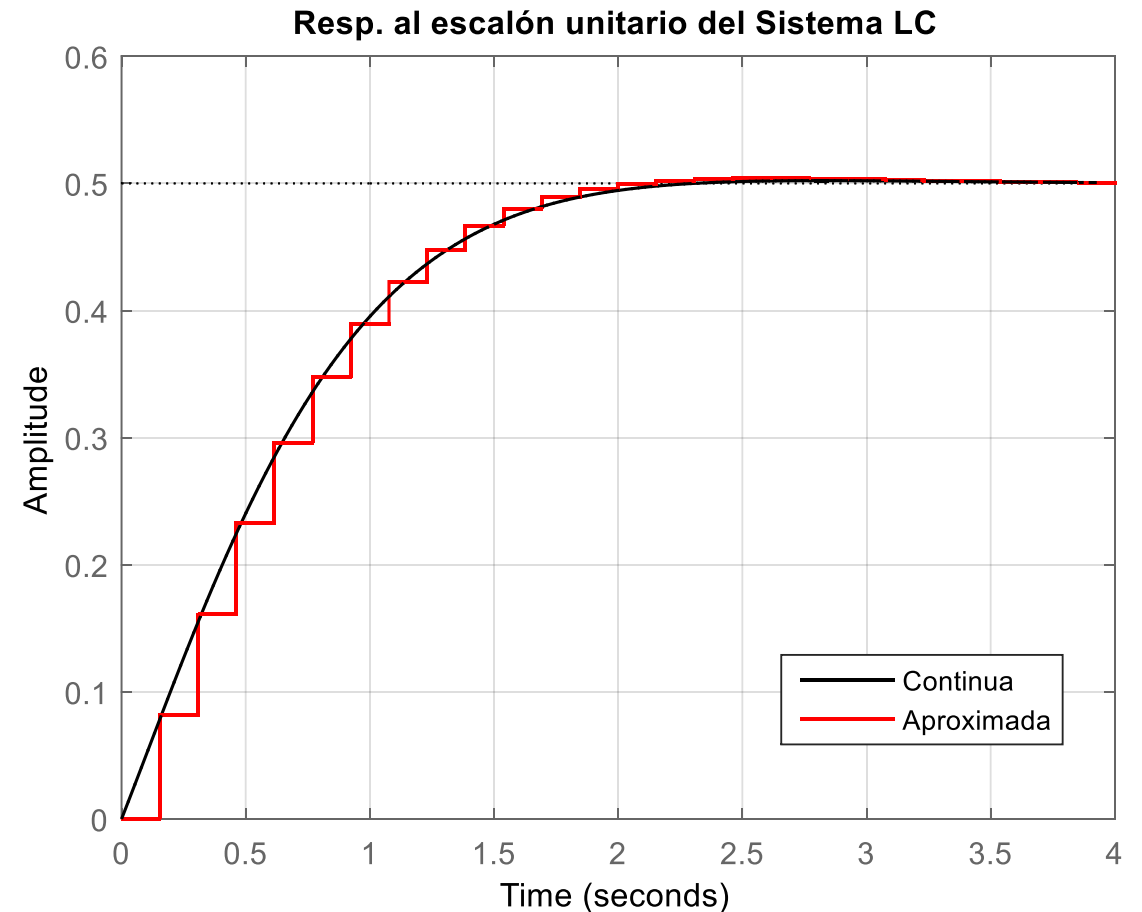
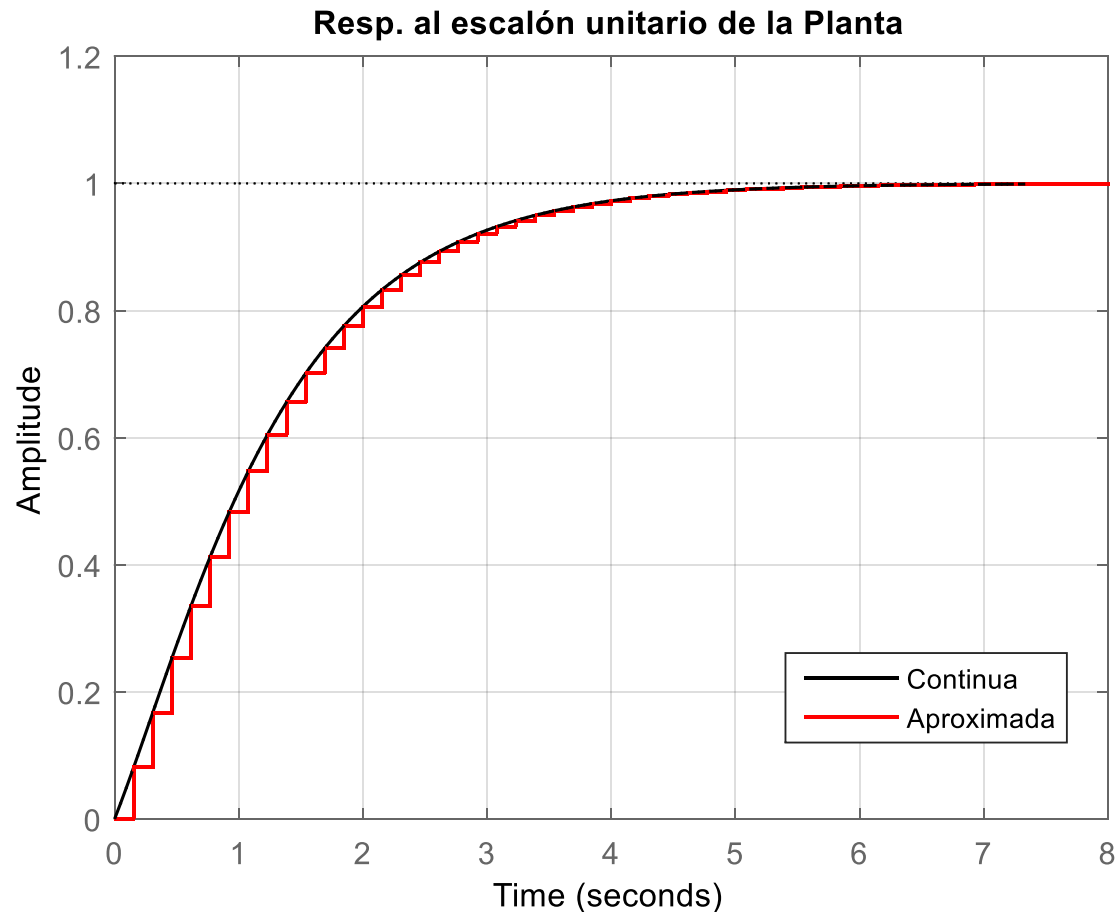
En Matlab se puede obtener directamente con: `Gpd = c2d(Gp,T)`

# Modelado de Sistemas de Control Digital

## Ejemplo 1 (continuación):

### B) FTLC discretizada:

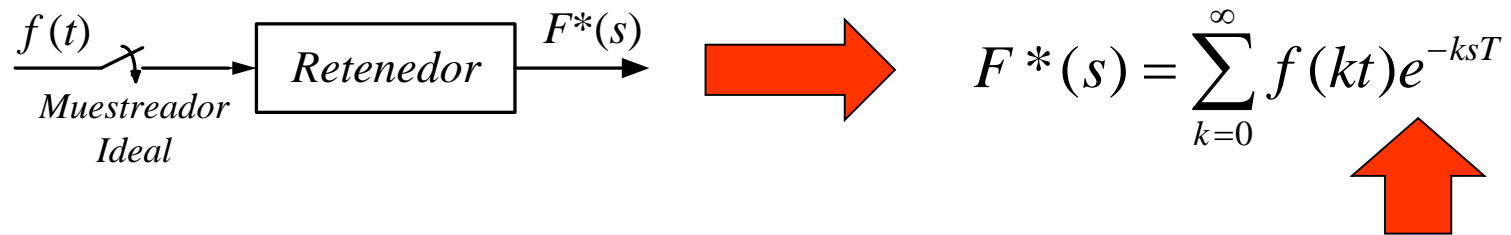
$$G_p(z) = \frac{0,08147z - 0,0437}{z^2 - 1,593z + 0,6303} \Rightarrow G_{lc}(z) = \frac{G_p(z)}{1 + G_p(z)} \Rightarrow G_{lc}(z) = \frac{0,08147z - 0,0437}{z^2 - 1,5115z + 0,5866}$$



# Uso de la Transformada Z

- Herramienta de análisis de sistemas discretos análoga a la transformada de Laplace para sistemas continuos.
- Transforma una secuencia discreta de números en una secuencia de variable compleja “z”
- Útil para el análisis y el diseño clásico de sistemas de control.

Dificultad: Transformadas inversas de funciones irracionales.




Función Irracional de “s”

Aparecen términos exponenciales y dificultad para el manejo de transformadas

# Uso de la Transformada Z

Para facilitar la obtención de la función  $f(t)$  se utiliza la transformación de variable compleja o transformación conforme:  $z = e^{sT}$

Que en  $s$  da:   $s = \frac{1}{T} \ln(z)$

Siendo  $z$ , la variable compleja con partes real e imaginarias:

$$\operatorname{Re}(z) = e^{-\sigma T} \cos(\omega_d T)$$

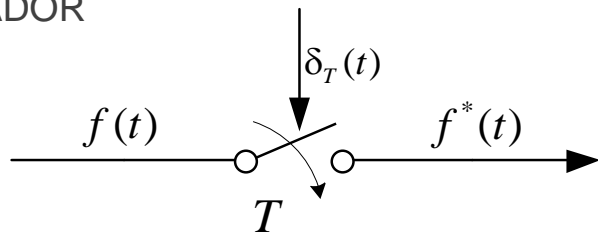
$$\operatorname{Im}(z) = e^{-\sigma T} \sin(\omega_d T)$$

Recordando que:  $s = -\sigma \pm j\omega_d$

# Uso de la Transformada Z

1. Se muestrea  $f(t)$  con un muestreador ideal,  $\Rightarrow f^*(t)$
2. Se toma la transformada de Laplace de  $f^*(t)$  para hallar  $F^*(s)$ ,
3. Se reemplaza  $e^{-sT}$  por  $z^{-k}$  para obtener  $F(z)$ .

MUESTREADOR  
IDEAL



$$f^*(t) = f(t)\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t - kT)$$

$$F^*(s) = \mathcal{L}[f^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-kTs}$$

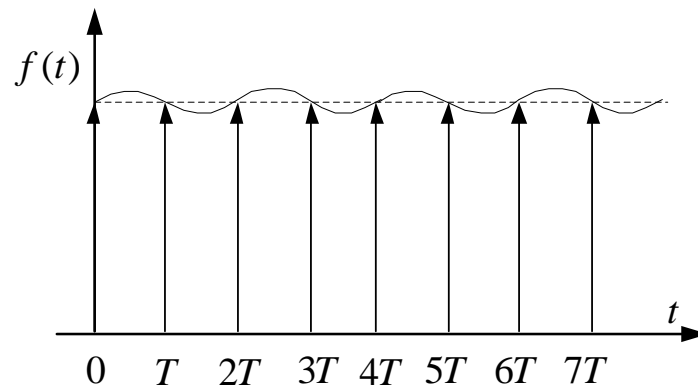
$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = F(z) = Z[f(t)]$$

**Desventaja:** La expresión resulta en una serie infinita en  $z^{-k}$  por lo que es necesario un esfuerzo adicional para obtener  $F(z)$  en forma cerrada.

# Uso de la Transformada Z

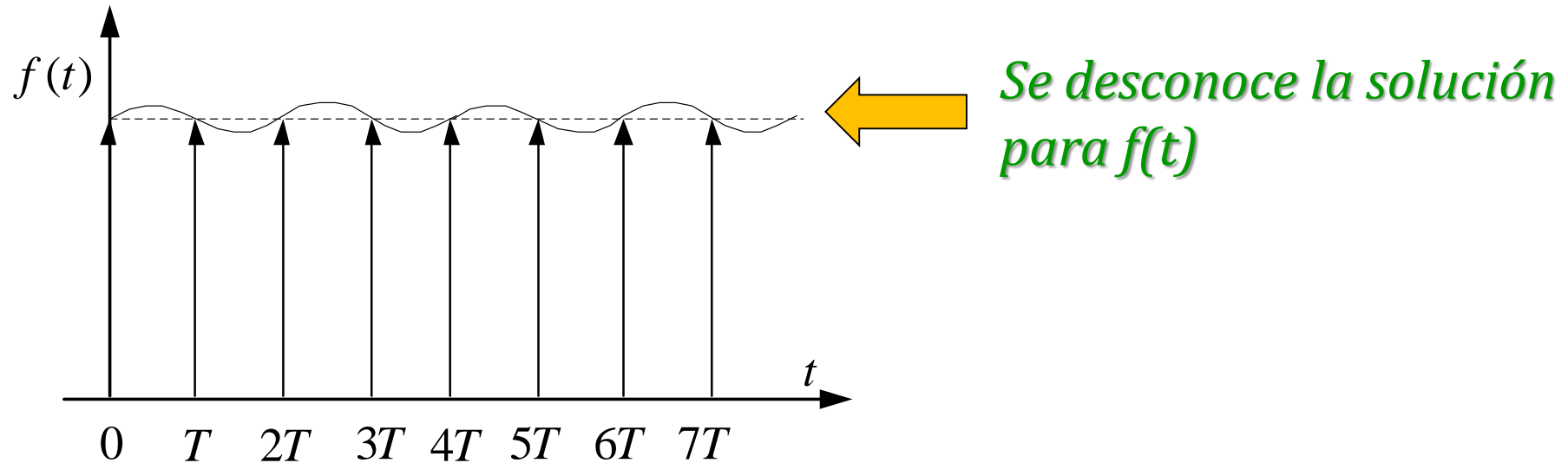
## Limitaciones de la Transformada Z:

1. Hipótesis del Muestreador Ideal:  $F(z)$  representa a  $f(t)$  solo en los instantes de muestreo.
2. Exactitud del método de la transformada Z: *Depende del valor seleccionado de la frecuencia de muestreo respecto de la mayor componente de frecuencia que contenga  $f(t)$ .*
3. No unicidad de la transformada Z inversa: *Dada una  $F(z)$ , la transformada Z inversa de ésta proporciona una solución única  $f(kT)$ , solamente válida para los instantes de muestreo.*



# Uso de la Transformada Z

## Limitaciones de la Transformada Z:



*En resumen, la simplicidad de su uso y ventajas, superan la desventaja de la No Unicidad de la Transformada Z inversa*



# Bibliografía

-  **SISTEMAS DE CONTROL DIGITAL, 1ed, Benjamín C. Kuo - Compañía Editorial Continental, 2002.**
-  **SISTEMAS DE CONTROL DE TIEMPO DISCRETO, 2ed, Katsuhiko Ogata - Prentice Hall, 1996.**
-  **DIGITAL CONTROL ENGINEERING, ANALYSIS AND DESIGN, 2ed - M. S. Fadali, A. Visioli – Elsevier 2013.**