Universidad Nacional de Misiones

Facultad de Ingeniería
OBERA

SISTEMAS DE CONTROL 2

Profesor: Fernando Botterón

Ingeniería Electrónica - 2020

Facultad de Ingeniería - U.Na.M

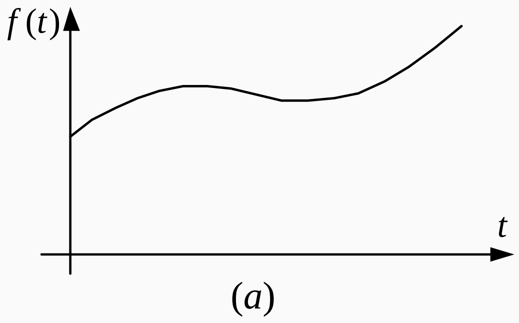
Temas de la Unidad 2

Unidad 2: Análisis de Señales en Sistemas Muestreados

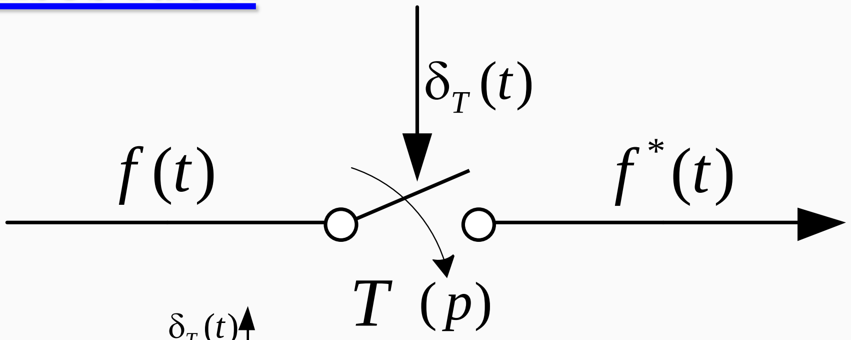
- ☑ Muestreador y Retenedor de datos.
- ☑ Reconstrucción de Señales muestreadas.
- ☑ Retenedor de orden cero (ZOH)
- ☑ Retenedor de orden uno (FOH).
- ☑ Efectos del ZOH en los sistemas de control a LC.
- ☑ Aproximación del ZOH.
- ☑ Determinación de la frecuencia de muestreo en sistemas de control a LC

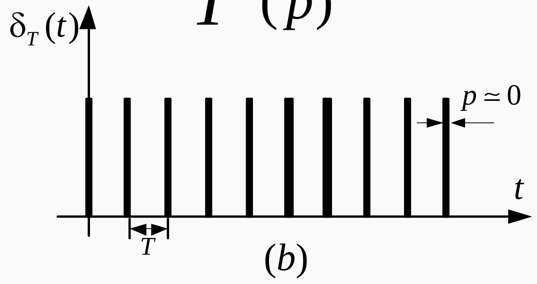
Muestreador y Retenedor de Datos

Muestreador por Impulsos ideal

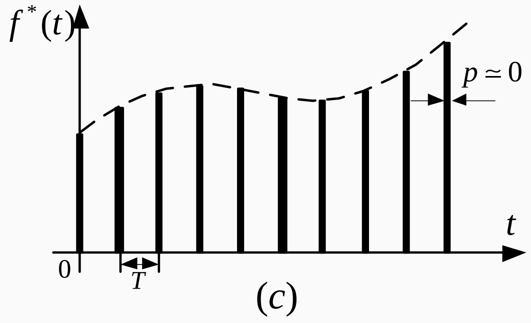


Señal de Entrada





Señal Portadora



Señal Muestreada Resultante

$$Se\ asume\ que: \ f(t) = 0 \ \ \forall \ t < 0$$

En *t* = *kT*: $$f^*(t) = f(kT)\delta(t-kT), \quad con \ \ \delta(t-kT) = 0 \ \ \forall \ t \neq kT$$

Definiéndose la señal portadora como: $$\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT)$$

El procedimiento de muestreo de una señal en tiempo continuo, es un proceso de modulación digital.

Muestreador y Retenedor de Datos

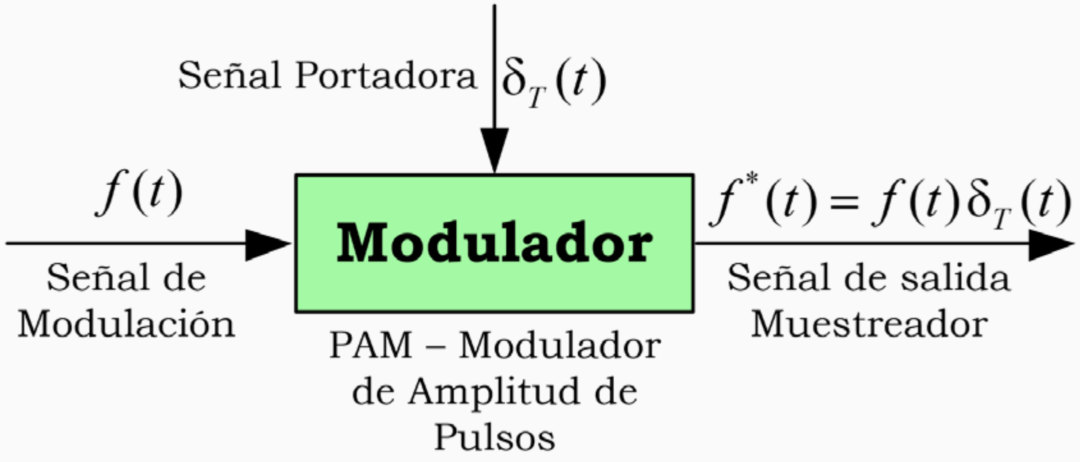
El tren de impulsos a la salida del muestreador, puede representarse por la siguiente sumatoria infinita

(c)

$$f^*(t) = f(0)\delta(t) + f(T)\delta(t-T) + \ldots + f(kT)\delta(t-kT) + \ldots$$

o en forma compacta:

$$f^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\delta(t-kT)$$



El Muestreador puede ser considerado como un Modulador de Amplitud de Pulsos

(PAM, de sus siglas en inglés)

Reconstrucción de Señales Muestreadas

Aplicándose la Transformada de Laplace a la señal muestreada, $f^*(t)$ se tiene:

$$F^*(s) = \mathscr{L}[f^*(t)] = f(0)\mathscr{L}\left[\delta(t)\right] + f(T)\mathscr{L}\left[\delta(t-T)\right] + f(2T)\mathscr{L}\left[\delta(t-2T)\right] + \ldots$$

$$F^*(s) = \mathscr{L}[f^*(t)] = f(0) + f(T)e^{-sT} + f(2T)e^{-2sT} + \ldots$$

$$F^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-ksT}$$

Usando la transformación de variable compleja $z = e^{sT}$ se tiene que:

$$\boxed{F^*(s) = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}}$$

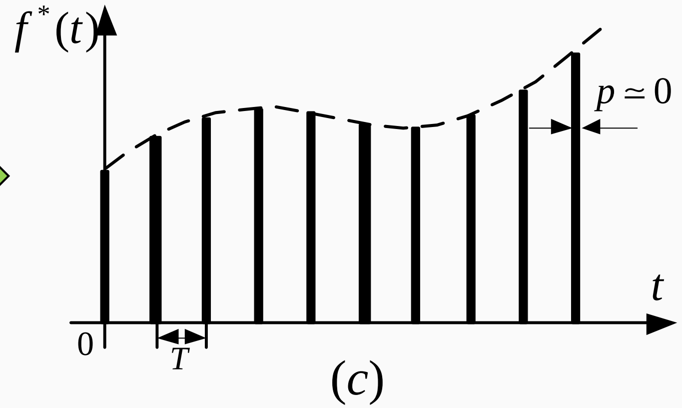
Se obtiene así la Transformada *Z* de la secuencia numérica a intervalos discretos $f(0)$; $f(T)$; $f(2T)$;…

Muestreador y Retenedor de Datos

Reconstrucción de Señales Muestreadas

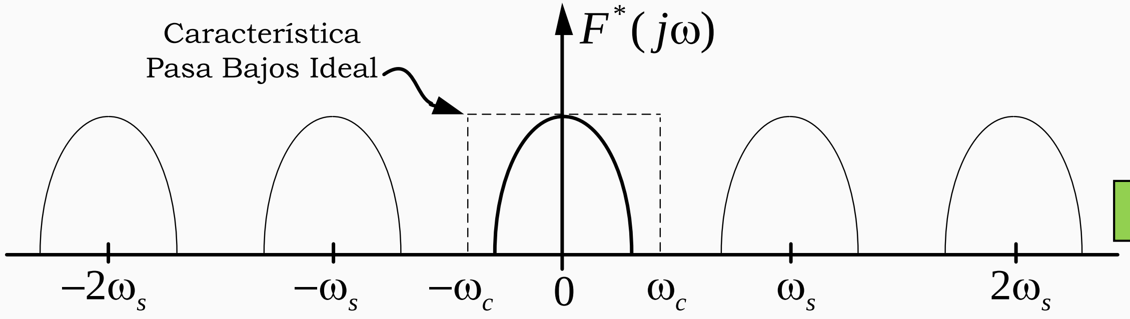
El retenedor de datos es un proceso de generación de una señal de tiempo continuo con valores finitos, que llamaremos $h(t)$, a partir de una secuencia de valores de tiempo discreto $f(kT)$. Esta señal $h(t)$, reproduce aproximadamente la señal aplicada al muestreador.

La señal de salida del muestreador posee armónicos de alta frecuencia



Deben ser filtrados para ser aplicados a la planta

Filtro Pasa Bajos



Circuito de Retención

Muestreador y Retenedor de Datos

Dado que es imposible recuperar una señal continua perfectamente una vez muestreada, lo que puede hacerse es aproximarla lo mejor posible.

Este proceso de Aproximación o Reconstrucción de los Datos Muestreados, puede ser considerado como un proceso de extrapolación, basada en la información disponible en los instantes de muestreo pasados.

La aproximación de la señal $f(t)$ alrededor de la muestra $f(kT)$, entre dos instantes de muestreo kT y $(k+1)T$ puede efectuarse mediante la expansión en serie de potencia de $f(t)$:

$$f_k(t) = f(kT) + f'(kT)(t-kT) + \frac{f''(kT)}{2!}(t-kT)^2 + \ldots \quad donde \quad f_k(t) = f(t) \quad para \quad kT \le t < (k+1)T$$

$$y \quad f'(kT) = \left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=kT} \qquad f''(kT) = \left.\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right|_{t=kT}$$

Muestreador y Retenedor de Datos

Una estimativa de la derivada primera y de la derivada segunda en $t = kT$ es:

$$f'(kT) = \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=kT} \cong \frac{f(kT) - f[(k-1)T]}{T}$$

$$f''(kT) = \left.\frac{d^2 f}{dt^2}\right|_{t=kT} \cong \frac{f'(kT) - f'[(k-1)T]}{T}$$

$$f''(kT) = \frac{1}{T}\left[\frac{f(kT) - f[(k-1)T]}{T} - \frac{f[(k-1)T] - f[(k-2)T]}{T}\right]$$

$$f''(kT) = \frac{1}{T^2}\left[f(kT) - 2f[(k-1)T] + f[(k-2)T]\right]$$

Se observa que a mayor orden de la derivada de *f*(*t*), mayor es el número de pulsos atrasados requeridos. O sea, en general, para un orden de derivada

$$f^{(n)}(kT) \quad \text{el número de pulsos necesarios es } (n+1)$$

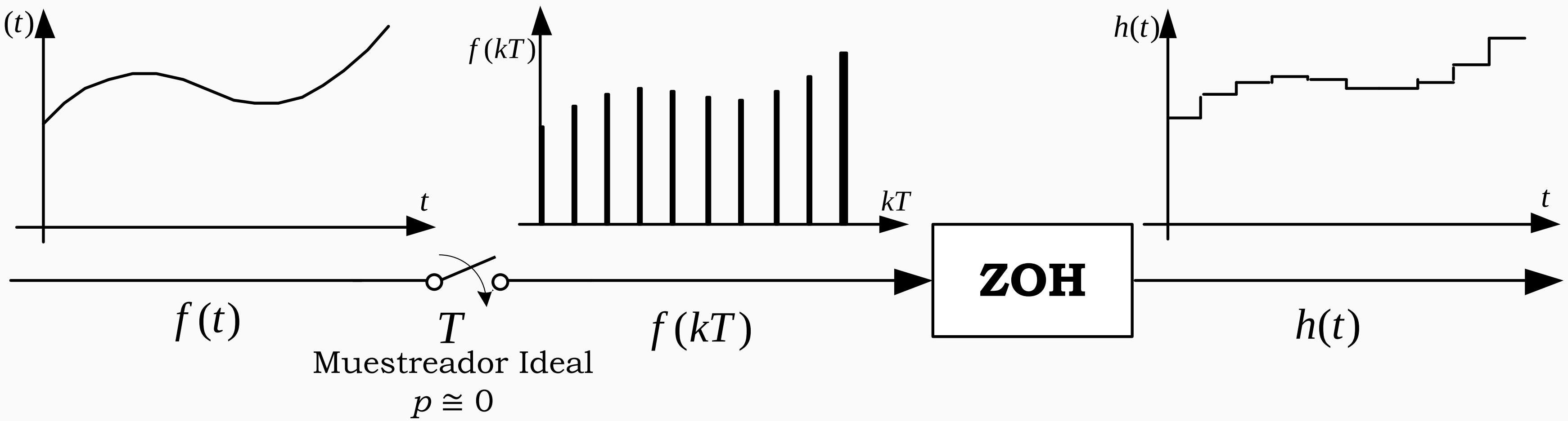
A mayor aproximación requerida, mayor es el atraso de tiempo involucrado para reconstruir la señal.

Muestreador y Retenedor de Datos

En la práctica usual se utiliza la primera aproximación:

$$f_k(t) = h(t) = f(kT)$$

El circuito retiene la amplitud de la muestra durante un periodo de muestreo



Este dispositivo se denomina: Extrapolador o Retenedor de Orden Cero, ya que utiliza el término de orden cero de la extrapolación lineal.

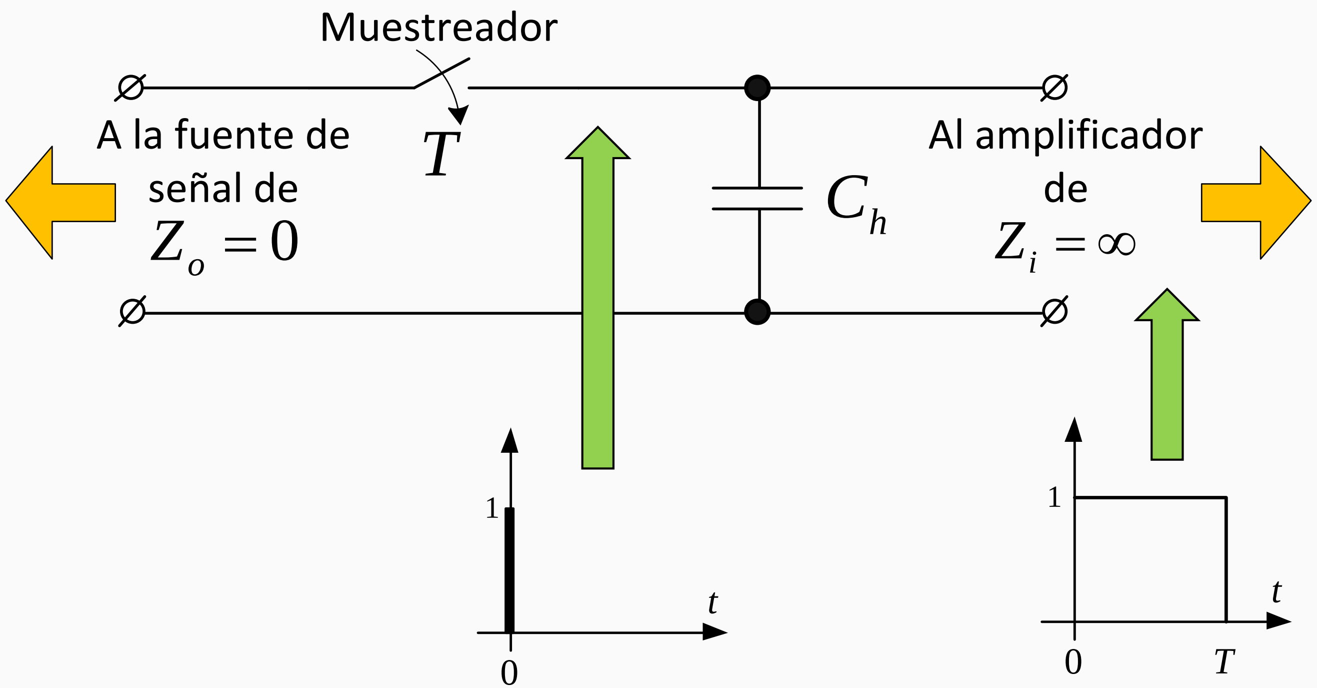
Si el dispositivo de aproximación, utiliza los dos primeros términos de la extrapolación:

$$f_k(t) = f(kT) + \frac{1}{T}[f(kT) - f[(k-1)T](t - kT)$$

Retenedor de Orden Uno (FOH)

Muestreador y Retenedor de Datos

Diagrama simplificado de un Muestreador/Retenedor de Orden Cero (ZOH)



$$f_k(t) = h(t) = f(kT)$$

Impulso Unitario

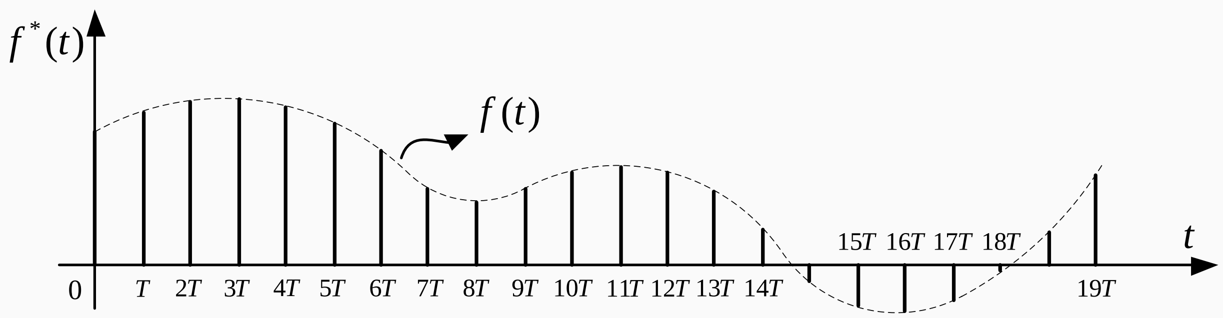
Respuesta del ZOH

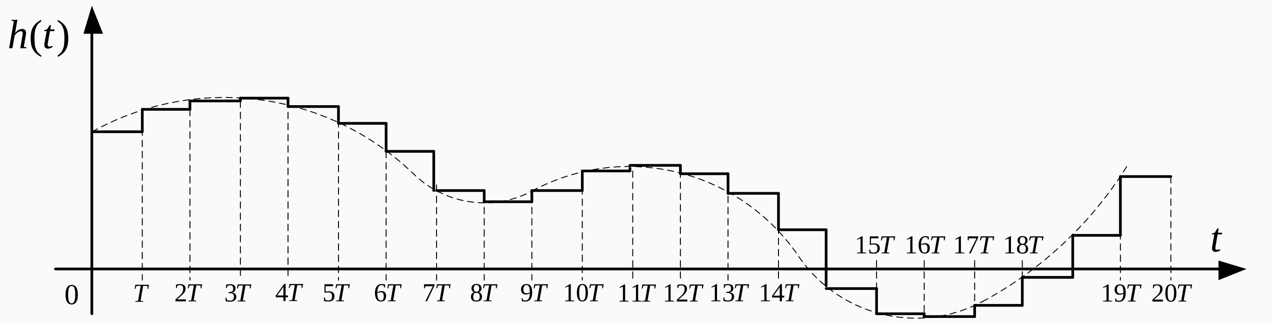
$$h(t) = \int_{t-T}^{t} f^*(\tau)\,d\tau$$

Efecto de la acción integral del capacitor de retención.

Muestreador y Retenedor de Datos

Formas de onda de entrada y salida de un Muestreador/Retenedor de Orden Cero Ideal:





A mayor frecuencia de muestreo (menor *T*) mejor será la aproximación a *f*(*t*).

Se observa que la señal *h*(*t*) se relaciona con la señal *f*(*t*) de la siguiente forma:

$$h(t) = f(0)[r(t) - r(t-T)] + f(T)[r(t-T) - r(t-2T)] + f(2T)[r(t-2T) - r(t-3T)] + \ldots$$

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)[r(t-kT) - r(t-(k+1)T)]; \quad donde: \quad \mathscr{L}[r(t-kT)] = \frac{1}{s} e^{-skT}$$

Muestreador y Retenedor de Datos

Función de Transferencia Retenedor de Orden Cero (ZOH)

Aplicándose la T.L a la señal *h(t)* se tiene:

$$\mathscr{L}[h(t)] = H(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)\left[\frac{e^{-skT} - e^{-s(k+1)T}}{s}\right]$$

O también:

$$H(s) = f(0)\left[\frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s}\right] + f(T)\left[\frac{e^{-sT}}{s} - \frac{e^{-2sT}}{s}\right] + f(2T)\left[\frac{e^{-2sT}}{s} - \frac{e^{-3sT}}{s}\right] + \ldots$$

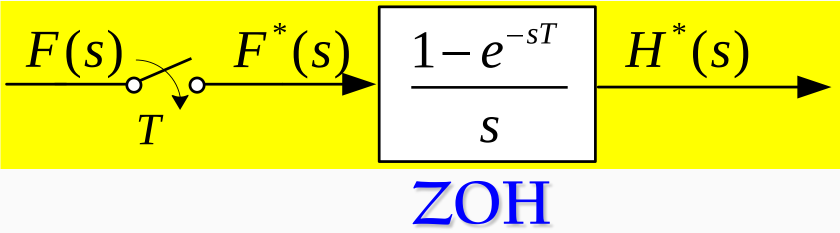
Sacando factor común $\frac{1-e^{-sT}}{s}$ $\Rightarrow$ $H(s) = \left(\frac{1-e^{-sT}}{s}\right)\sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-skT}$

$$H(s) = G_{zoh}(s)F^{*}(s)$$

Donde: $G_{zoh}(s) = \frac{1-e^{-sT}}{s}$ $\Rightarrow$ Función de Transferencia del ZOH.

Muestreador y Retenedor de Datos

Retenedor de Orden Cero (ZOH): Análisis en frecuencia



En régimen permanente sinusoidal se tiene $G_{zoh}(j\omega) = \dfrac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega}$

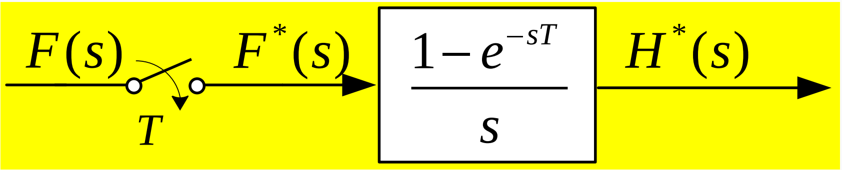
Puede ser reescrita de la siguiente forma: $G_{zoh}(j\omega) = e^{\frac{-j\omega T}{2}} \times \left(\dfrac{e^{\frac{j\omega T}{2}} - e^{\frac{-j\omega T}{2}}}{2j} \right) \times \dfrac{2}{\omega}$

Reemplazando: $\left(\dfrac{e^{\frac{j\omega T}{2}} - e^{\frac{-j\omega T}{2}}}{2j} \right) = sen\left(\omega T/2\right)$ y multiplicando y dividiendo x T

$$\boxed{G_{zoh}(j\omega) = Te^{-j\omega T/2}\,\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}}$$

Muestreador y Retenedor de Datos

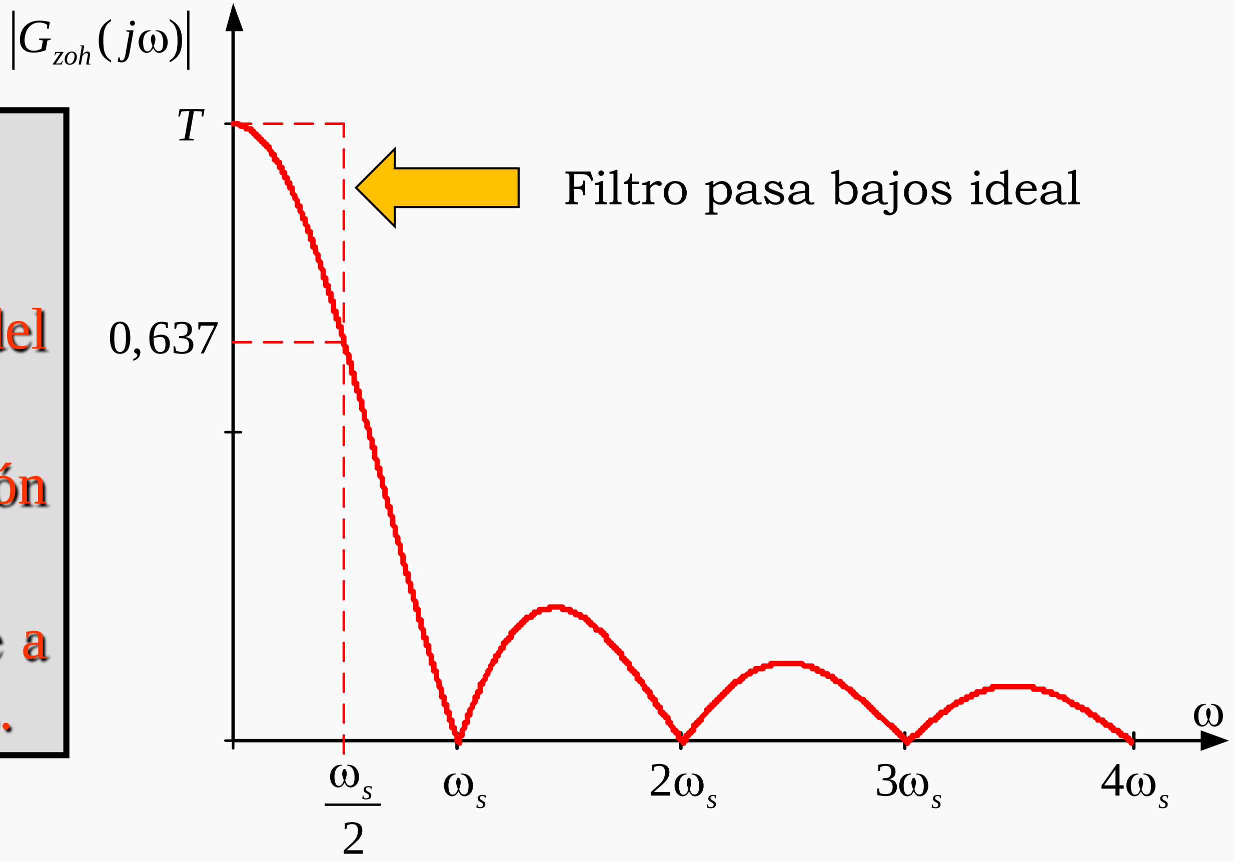
Retenedor de Orden Cero (ZOH): Análisis en frecuencia



$$G_{zoh}(j\omega) = Te^{-j\omega T/2}\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}$$

- Se comporta como un filtro pasa bajos
- No presenta un corte abrupto en $\omega_s/2$
- Y su valor a esta frecuencia es del 63,7 % del valor a frecuencia cero.
- La precisión del ZOH en la aproximación depende de la frecuencia de muestreo.
- A pequeños valores de T el tercer factor tiende a 1 y el ZOH introduce un atraso de $T/2$ segundos.

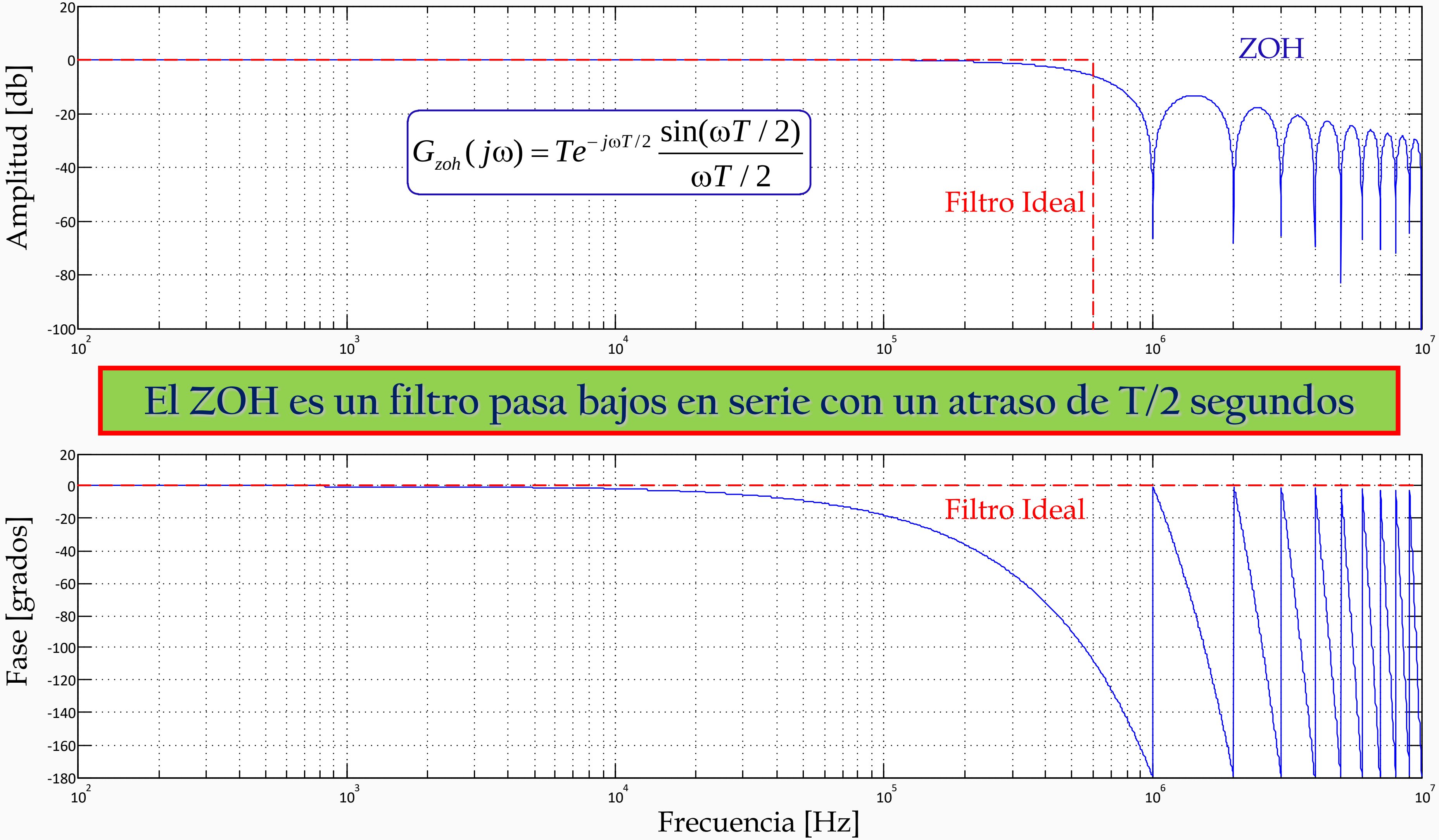
Respuesta en Frecuencia de $G_{zoh}(j\omega)$



Muestreador y Retenedor de Datos

Retenedor de Orden Cero (ZOH): Análisis en frecuencia

Respuestas de Magnitud y fase de un ZOH



$$G_{zoh}(j\omega) = Te^{-j\omega T/2}\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}$$

El ZOH es un filtro pasa bajos en serie con un atraso de T/2 segundos

Muestreador y Retenedor de Datos

La función de transferencia del ZOH está afectada por el periodo de muestreo *T*, pero normalmente se la expresa normalizada respecto *T* :

$$G_{zoh}(s) = \frac{1-e^{-sT}}{sT}$$

Se incluye el muestreador

Considérese el primer término de la aproximación de Padé de un atraso puro:

$$e^{-st_o} \approx \frac{1-s\frac{t_o}{2}}{1+s\frac{t_o}{2}}$$

haciendo $t_o = T,\quad e^{-sT} \approx \dfrac{1-s\frac{T}{2}}{1+s\frac{T}{2}} = \dfrac{2-sT}{2+sT}$

Reemplazando en la FT del ZOH:

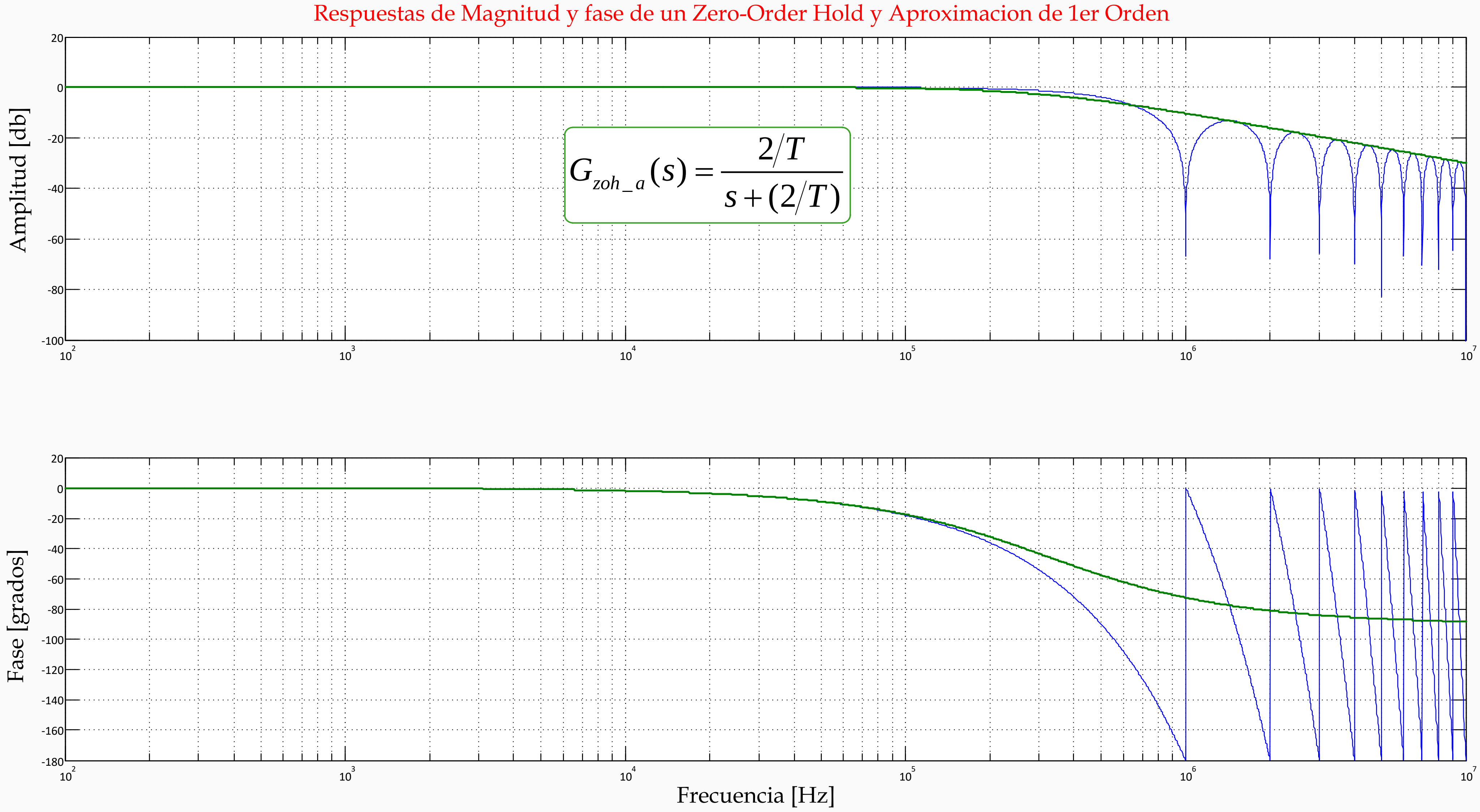
$$G_{zoh}(s) = \frac{1}{sT}\left(1-\frac{2-sT}{2+sT}\right) = \frac{2}{sT+2}$$

$$G_{zoh\_a}(s) = \frac{2/T}{s+(2/T)}$$

Aproximación de 1° orden del ZOH

Muestreador y Retenedor de Datos

Respuesta en frecuencia del ZOH aproximado con una aproximación de Padé de 1° orden



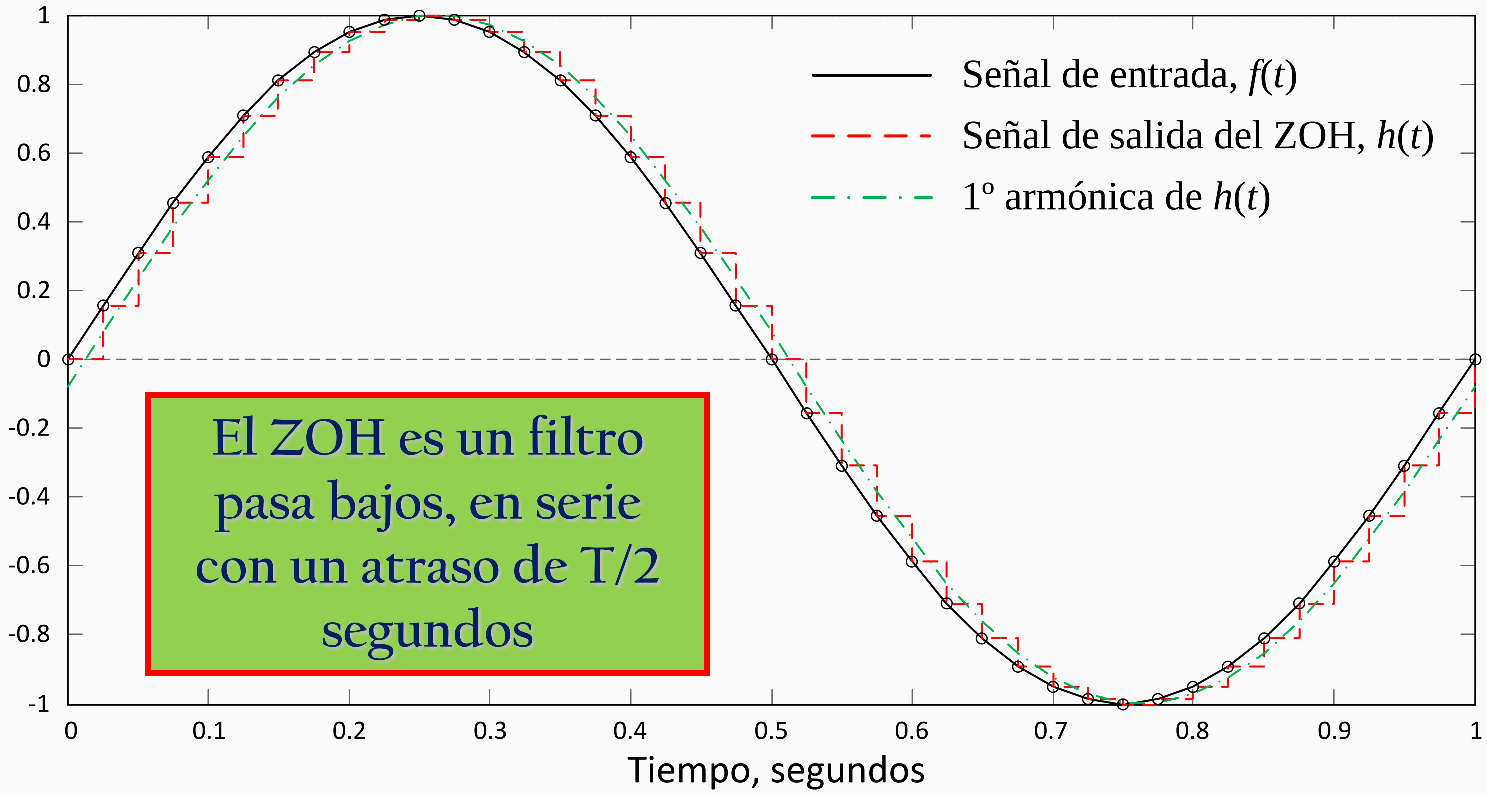
Muestreador y Retenedor de Datos

Reescribiendo la función de transferencia del ZOH

$$G_{zoh\_a}(s) = \frac{1}{1 + s\frac{T}{2}}$$

Y teniéndose en cuenta la expansión en serie de Taylor de una exponencial e^x, donde $x = sT/2$, se tiene:

$$G_{zoh\_a} \cong \frac{1}{e^{s(T/2)}} = e^{-s(T/2)}$$

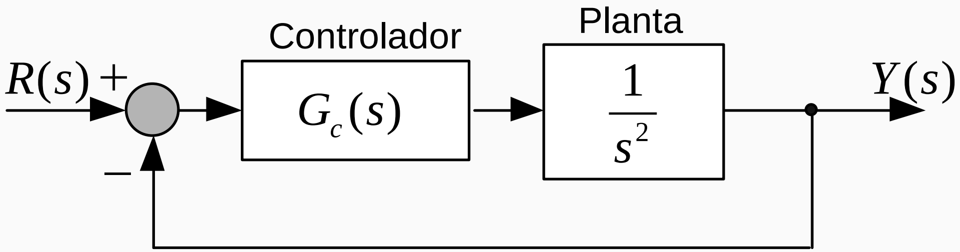


El ZOH es un filtro pasa bajos, en serie con un atraso de T/2 segundos

La salida del ZOH presenta componentes de alta frecuencia, debido a los pulsos del retenedor.

El efecto del ZOH es desplazar a la componente fundamental; 1º armónico de $h(t)$, en T/2 segundos.

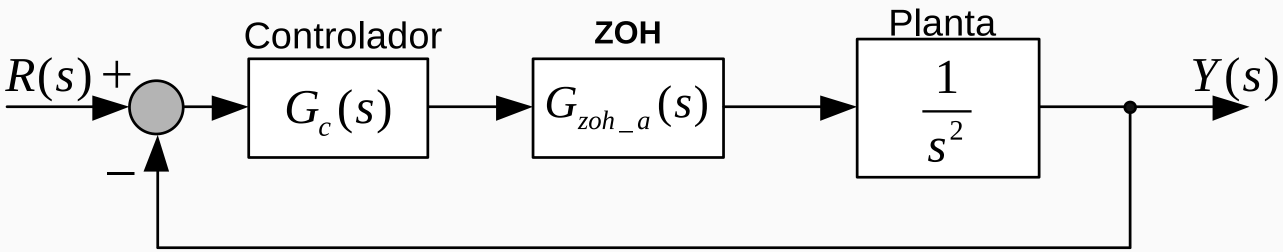
Efectos del Retenedor de Orden Cero en Sistemas de Lazo Cerrado



Controlador diseñado para las siguientes especificaciones: $\omega_n = 4 \text{ rad/s} \;\; y \;\; \xi = 0,5$

$$G_c(s) = 52\frac{(s+2,77)}{(s+13)}$$

FTLCC resulta: $$G_{lcc}(s) = \frac{52(s+2,77)}{(s+9)(s^2+4s+16)}$$



$T = 0,2 \text{ seg} \;\; \rightarrow$ $$G_{zoh\_a}(s) = \frac{2/T}{s+2/T} = \frac{10}{s+10}$$

$T = 0,1 \text{ seg} \;\; \rightarrow$ $$G_{zoh\_a}(s) = \frac{2/T}{s+2/T} = \frac{20}{s+20}$$

$T = 0,01 \text{ seg} \;\; \rightarrow$ $$G_{zoh\_a}(s) = \frac{2/T}{s+2/T} = \frac{200}{s+200}$$

$T = 0,001 \text{ seg} \;\; \rightarrow$ $$G_{zoh\_a}(s) = \frac{2/T}{s+2/T} = \frac{2000}{s+2000}$$

Efectos del Retenedor de Orden Cero en Sistemas de Lazo Cerrado

Polos de LC dominantes y No dominantes

$$G_{lcc}(s) = \frac{52(s+2,77)}{\boxed{(s+9)}(s^2+4s+16)}$$

Diseño original en tiempo continuo

$$G_{lcc\_zoh}(s)\Big|_{T=0,2\,\mathrm{seg}} = \frac{520(s+2,77)}{(s+16,8)\boxed{(s+4,62)}(s^2+1,578s+18,55)}$$

Efecto ZOH con T = 0,2 s

$$G_{lcc\_zoh}(s)\Big|_{T=0,1\,\mathrm{seg}} = \frac{1040(s+2,77)}{(s+23,65)\boxed{(s+6,26)}(s^2+3,094s+19,46)}$$

Efecto ZOH con T = 0,1 s

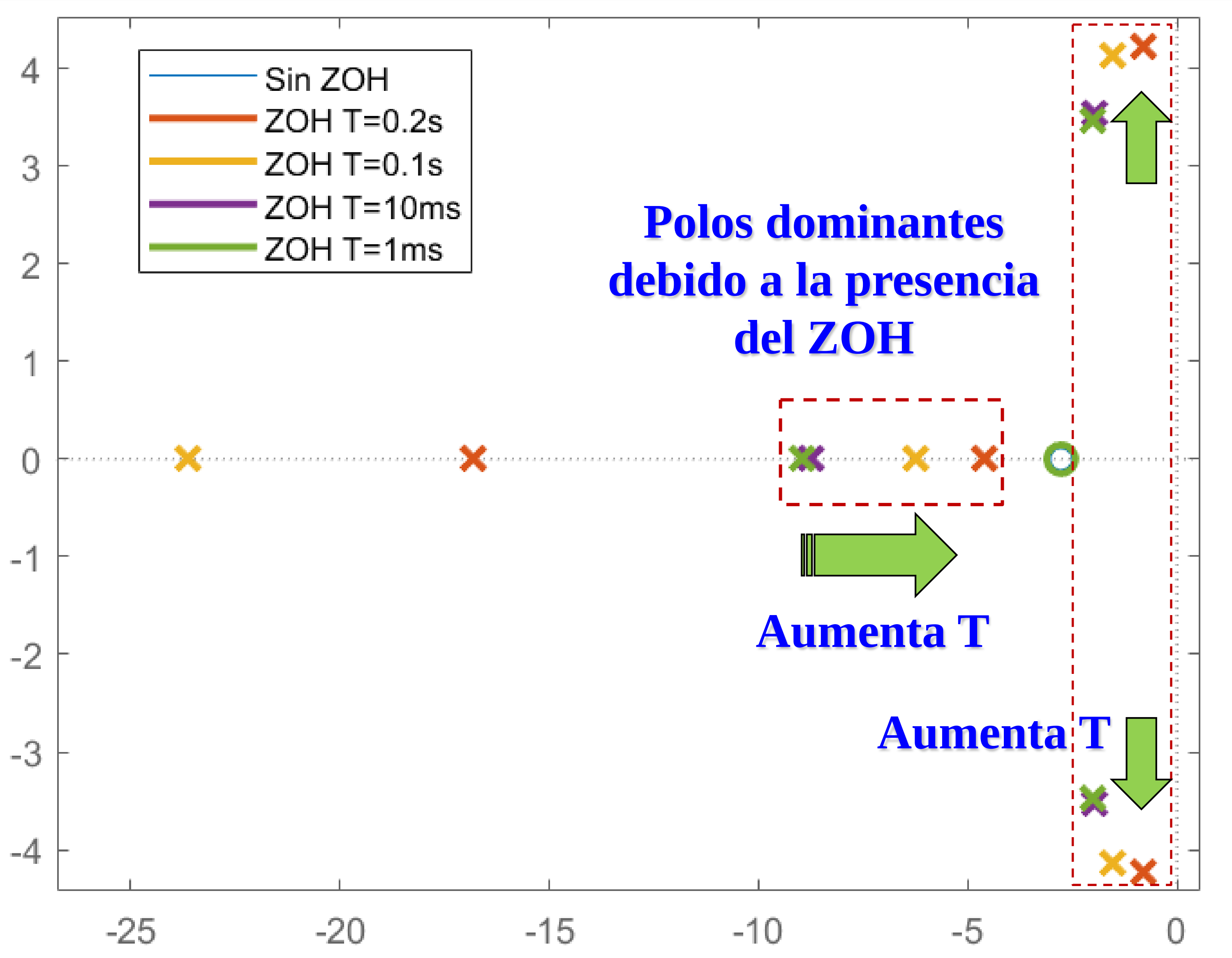
$$G_{lcc\_zoh}(s)\Big|_{T=0,01\,\mathrm{seg}} = \frac{10400(s+2,77)}{(s+200,3)\boxed{(s+8,75)}(s^2+3,97s+16,43)}$$

Efecto ZOH con T = 10 ms

$$G_{lcc\_zoh}(s)\Big|_{T=0,001\,\mathrm{seg}} = \frac{104000(s+2,77)}{(s+2000)\boxed{(s+8,977)}(s^2+3,997s+16,05)}$$

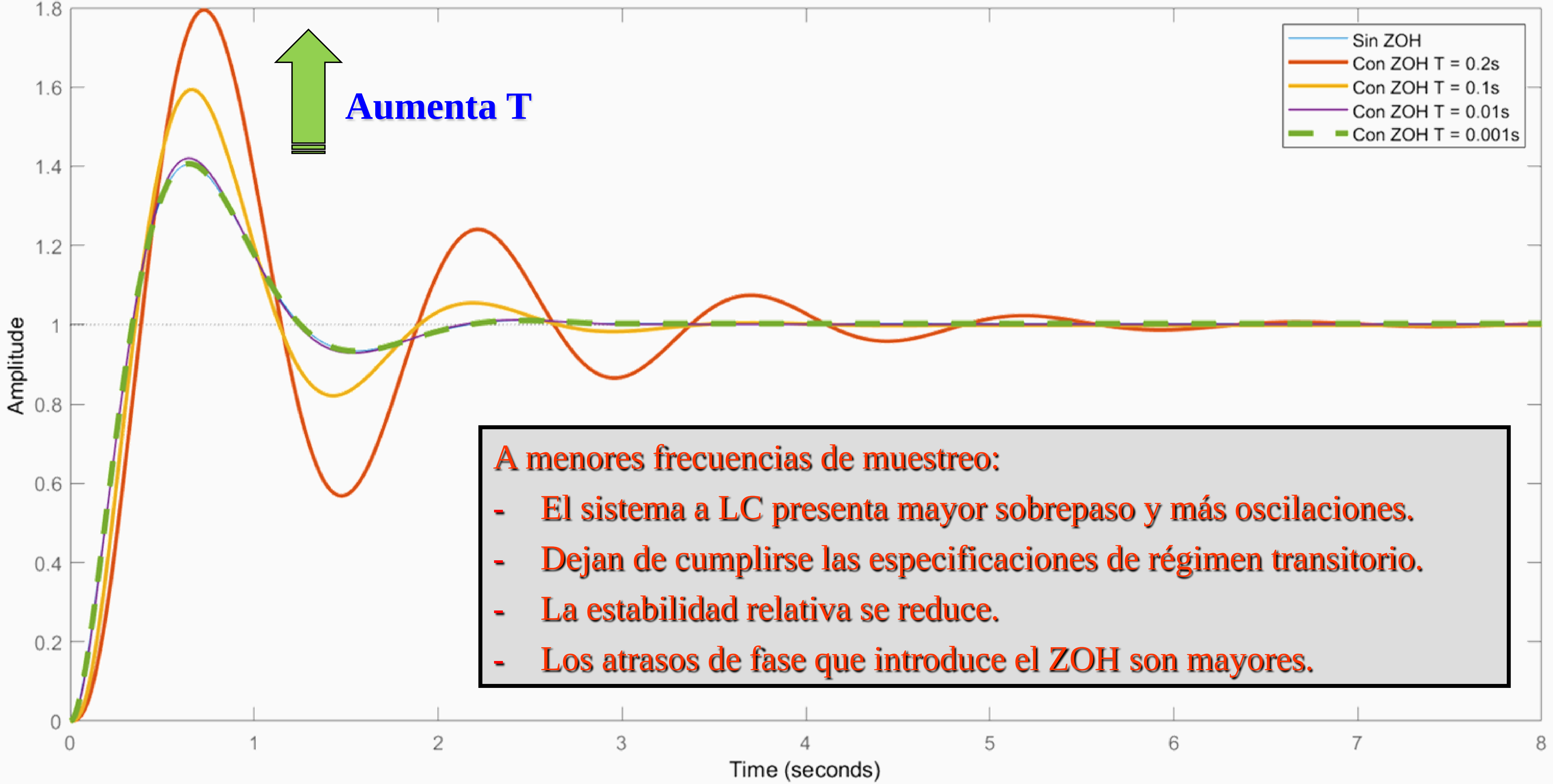
Efecto ZOH con T = 1 ms

Efectos del Retenedor de Orden Cero en Sistemas de Lazo Cerrado



Se observa que al aumentarse el periodo de muestreo (o reducirse la frecuencia de muestreo), el polo que introduce el ZOH se hace más dominante y tiene mayor influencia en la respuesta de salida del sistema.

Efectos del Retenedor de Orden Cero en Sistemas de Lazo Cerrado



A menores frecuencias de muestreo:

- El sistema a LC presenta mayor sobrepaso y más oscilaciones.
- Dejan de cumplirse las especificaciones de régimen transitorio.
- La estabilidad relativa se reduce.
- Los atrasos de fase que introduce el ZOH son mayores.

Determinación de la Frecuencia de Muestreo

¿Cuál debe ser la frecuencia de muestreo adecuada de f(t)?

Si es lo suficientemente alta comparada con la máxima componente de frecuencia de *f(t)*: *pueden preservarse las características de amplitud en la envolvente de la señal muestreada.*

Si las frecuencias de muestreo son menores a los cambios más rápidos de *f(t)*: *hay pérdida de información y no se podrá reconstruir la señal original. Pueden aparecer problemas de inestabilidad.*

Si las frecuencias de muestreo son muy elevadas: *pueden requerir un esfuerzo computacional muy grande.*

Una selección racional de la frecuencia de muestreo en un sistema de control de lazo cerrado, debe estar basada en el entendimiento de su influencia sobre el desempeño del sistema de control.

Determinación de la Frecuencia de Muestreo

En sistemas muestreados, es útil caracterizar al periodo de muestreo, por una variable que sea adimensional y que brinde a la vez una interpretación física.

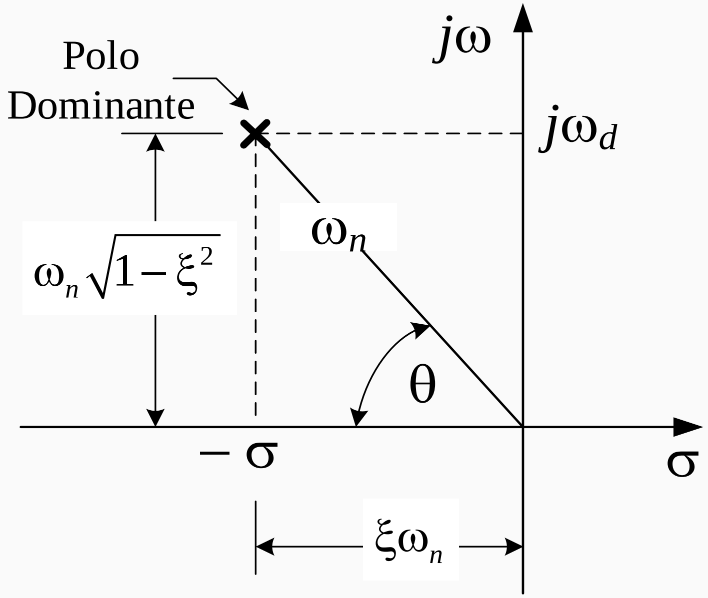
1 - Para sistemas no oscilatorios de primer o segundo orden sobreamortiguados:
Un factor de normalización puede ser el tiempo de subida, t_r.

$$\boxed{N_r = \frac{t_r}{T}}$$

***N_r* es la variable adimensional que puede tomar valores entre**

$$4 \leq N_r \leq 10$$

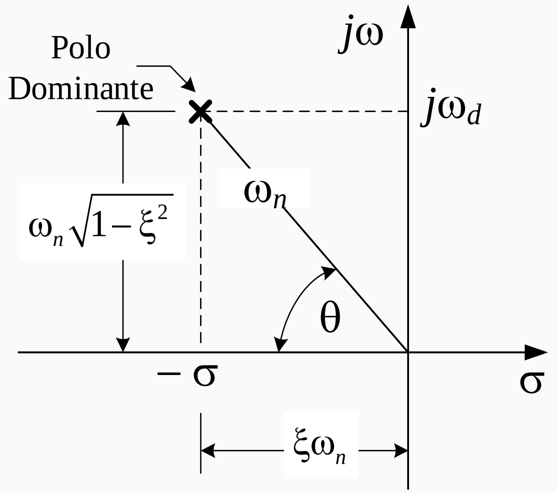
- **Respuesta sin oscilaciones →** $t_r = \dfrac{1}{\xi\omega_n} \equiv \text{Cte. de Tiempo}$
- **Respuesta con oscilaciones →** $t_r = \dfrac{\theta}{T\omega_d}$ $\quad \xi = \cos(\theta) = \dfrac{\sigma}{\omega_n}$



Determinación de la Frecuencia de Muestreo

2 - Para sistemas oscilatorios de segundo orden subamortiguados:
Un factor de normalización puede ser la frecuencia natural deseada de LC, ω_n.

$$\boxed{\omega_n T = 0{,}1 \ \text{a} \ 0{,}6}$$



$$\boxed{T = \frac{0{,}1}{100} = 1\,\text{mseg} \quad \text{o} \quad T = \frac{0{,}6}{100} = 6\,\text{mseg}}$$

Lo anterior, podría escribirse también de la siguiente forma:

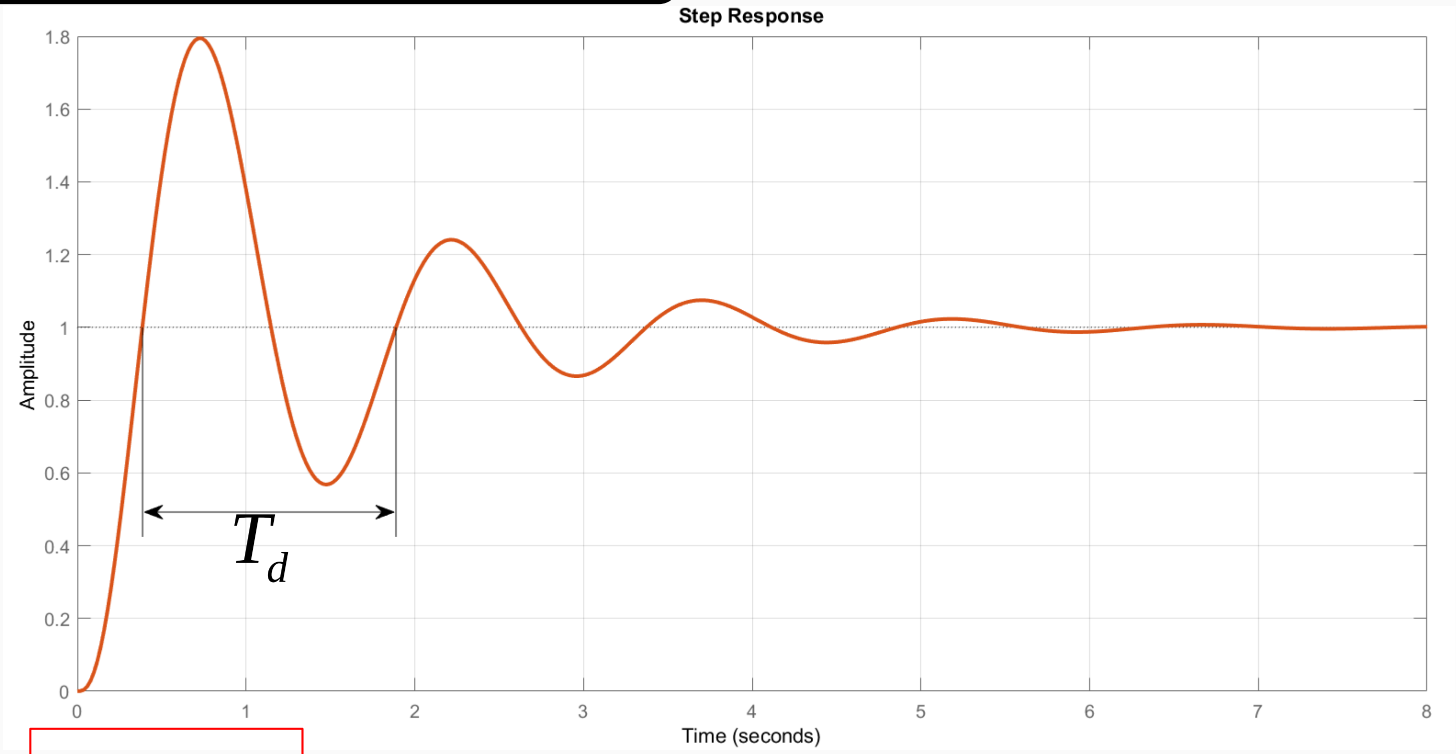
$$\omega_n T = 0{,}1 \ a \ 0{,}6 \ \text{ y sabiendo que } \ \omega_n = \frac{2\pi}{t_n}$$

$$N_n = \frac{t_n}{T}, \quad \text{con } N_n = 62{,}83 \ a \ 10{,}47$$

Determinación de la Frecuencia de Muestreo

3 - Para sistemas oscilatorios de segundo orden subamortiguados:

Un factor de normalización puede ser la frecuencia de oscilación ω_d, o periodo de oscilación T_d deseado. O sea, se especifica una variable adimensional que expresa un determinado número de muestras durante un periodo de la oscilación sinusoidal amortiguada.



$$\boxed{N_d = \frac{T_d}{T}}$$

N_d es la variable adimensional $\quad 8 \le N_r \le 10$

N_d puede expresarse en función de la frecuencia de oscilación y la frecuencia de muestreo

$$\boxed{N_d = \frac{2\pi / \omega_d}{2\pi / \omega_s} = \frac{\omega_s}{\omega_d}}$$

Si el sistema tiene poca estabilidad relativa, puede que se necesite aumentar el valor de N_d para que el sistema a lazo cerrado en tiempo discreto resulte estable.

Determinación de la Frecuencia de Muestreo

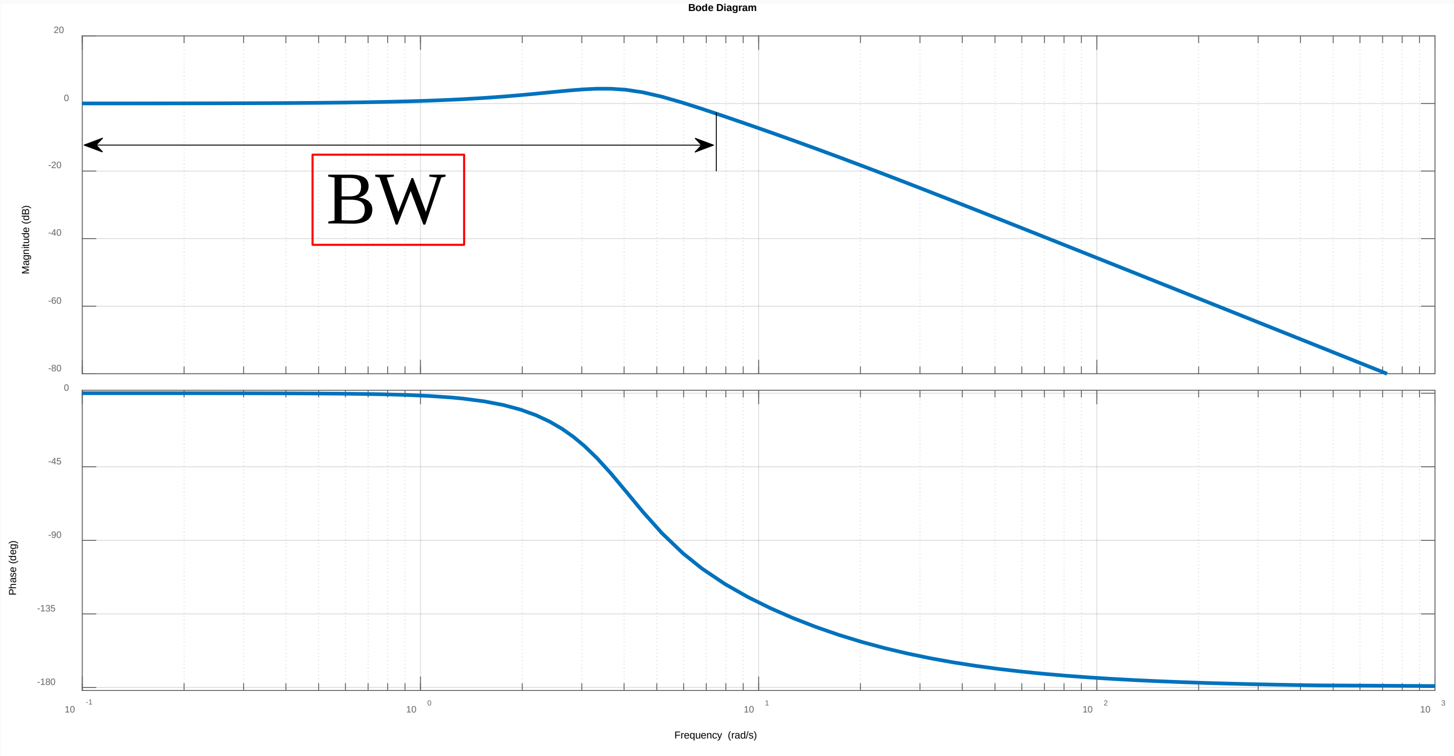
4 – En el dominio de la frecuencia, la frecuencia o periodo de muestreo, puede seleccionarse a partir de la frecuencia de Ancho de Banda o de la Frecuencia de Corte.

- **A partir del ancho de banda deseado de lazo cerrado**

$$\omega_s \approx 10 \text{ a } 30 \text{ veces BW}$$

- **A partir de la frecuencia de corte deseada de lazo cerrado**

$$T\omega_c \approx 0{,}15 \text{ a } 0{,}5$$



Estas relaciones, dan muy buen resultado para obtener un buen rechazo de perturbaciones y una buena robustez antes variaciones paramétricas.

Determinación de la Frecuencia de Muestreo

5 – Independientemente del dominio de análisis, puede establecerse la siguiente relación general y empírica para la frecuencia de muestreo de un sistema de control digital:

$$f_m \geq 10 \times f_{\max}$$

Siendo f_m la frecuencia de muestreo y f_{max}, la máxima componente de frecuencia contenida en la señal de interés o señal a controlar.

- Con esta relación se consigue una adecuada solución de compromiso entre desempeño transitorio, rechazo de perturbaciones exógenas, estabilidad y robustez.

- Igualmente debe analizarse cada caso en particular, de modo tal de no aumentar excesivamente el ancho de banda del sistema compensado, con las consecuencias que esto supone.

Bibliografía

- Sistemas de Control Digital, 1ed, Benjamín C. Kuo - Compañía Editorial Continental, 2002.
- Sistemas de Control en Tiempo Discreto, 2ed, Katsuhiko Ogata - Prentice Hall, 1996.
- Digital Control System Analysis and Design, Phillips, Charles L.; Tagle, Troy H.; Prentice Hall, Fourth Edition.
- Computer-Controlled Systems, Theory and Design, Aström, Karl J.; Wittenmark, Björn; Prentice Hall, Third Edition.
- Controle por Computador de Sistemas Dinâmicos, Elder M. Hemerly, Edgar Blucher Ltda., 1996.
- Digital Control of Dynamic Systems, 3ed., G. F. Franklin; J. D. Powell and M. Workman; Ellis-Kagle Press, 2006.