

8.- Cinemática de Rotación

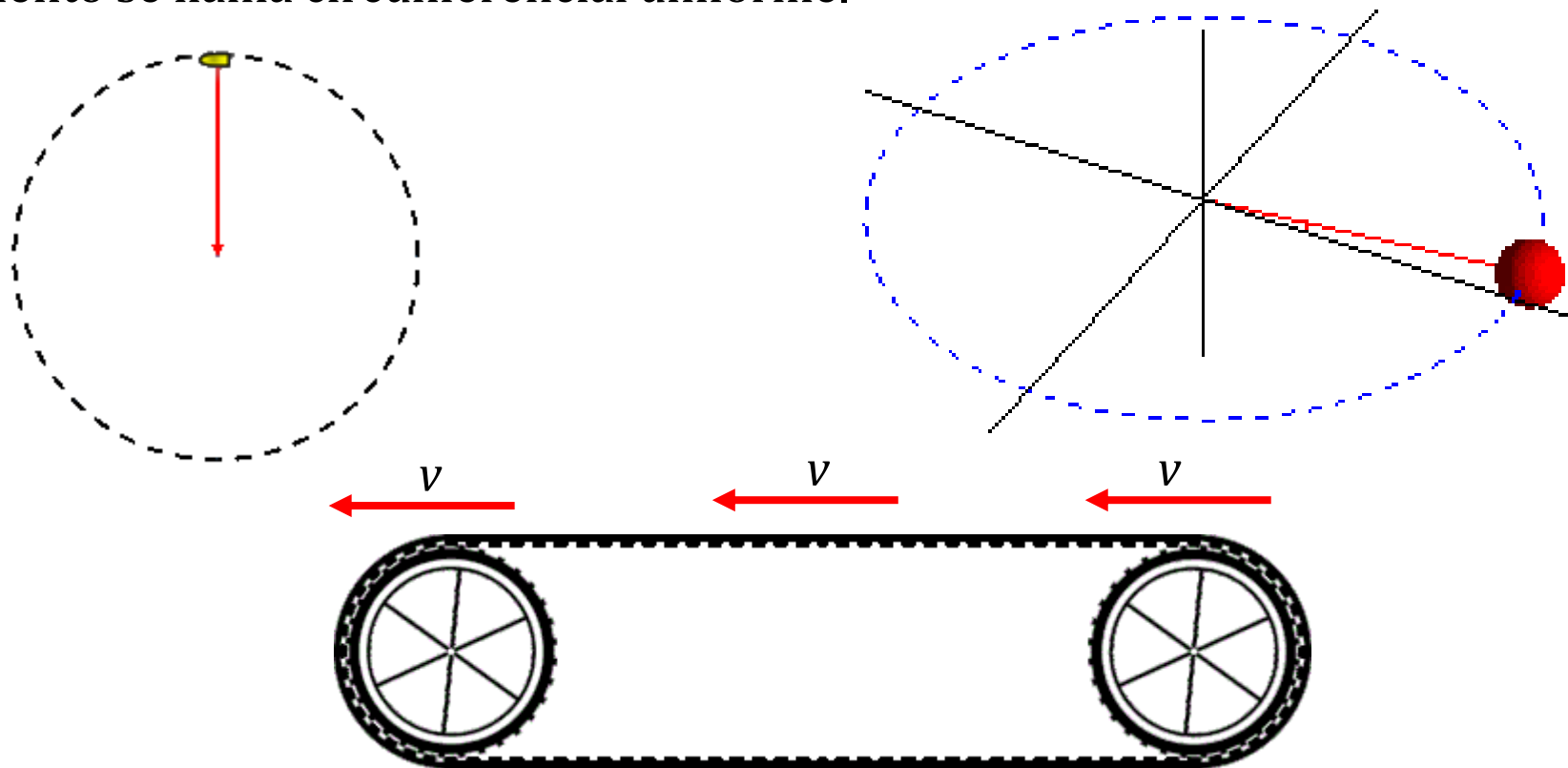


Cinemática de Rotación

Movimiento Circular Uniforme

Es un caso particular del movimiento en dos dimensiones, donde una partícula se mueve describiendo una trayectoria circular, con velocidad v llamada *velocidad lineal o tangencial*.

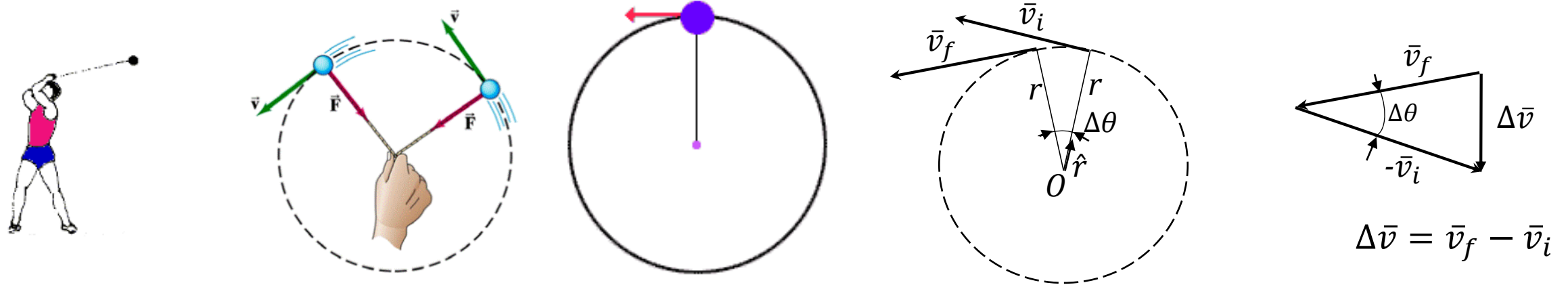
Para un objeto que se mueve en una trayectoria circunferencial, si la *rapidez v es constante*, el movimiento se llama circunferencial uniforme.



Cinemática de Rotación

Movimiento Circular Uniforme

La velocidad v en cada punto de la trayectoria circunferencial, puede entenderse con un ejemplo de una partícula atada a un hilo con movimiento circular, suponiendo que en cierto instante se suelta el hilo y de ésta manera, la partícula saldría despedida con tal velocidad $\vec{v}$.



Si en el instante inicial t_i el objeto tiene una velocidad inicial $\vec{v}_i$ y un instante posterior t_f tiene una velocidad final $\vec{v}_f$, como la rapidez es constante, entonces $|\vec{v}_i| = |\vec{v}_f|$ y cambia sólo la *dirección* del vector velocidad.

De ésta manera existirá una aceleración media $\vec{a}_m$ de la partícula debido al cambio de dirección del vector velocidad:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t}$$

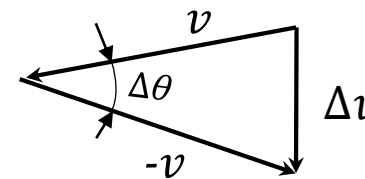
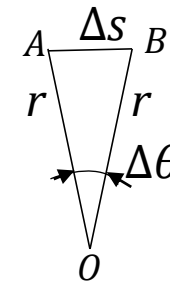
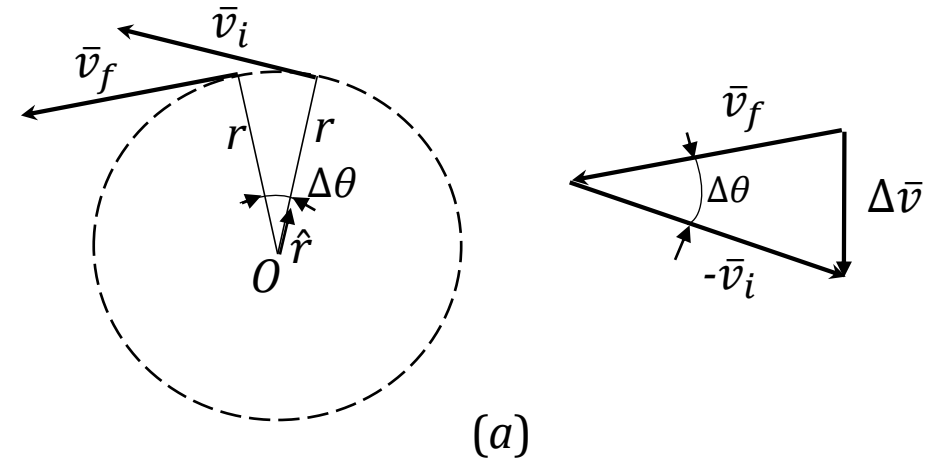
Cinemática de Rotación

Observando la figura *a*, graficando la diferencia entre los vectores velocidad, se puede obtener geométricamente la variación $\Delta \vec{v}$.

En la circunferencia de la figura *a*, la longitud del arco Δs , subtendido por el ángulo $\Delta \theta$, es *aproximadamente* igual al lado del triángulo que une los puntos: (A; O; B), (figura *b*).

Observando que los triángulos de lados $[r; \Delta s; r]$ en la circunferencia y de lados $[-\vec{v}_i; \Delta \vec{v}; \vec{v}_f]$, son semejantes; y como $|\vec{v}_i| = |\vec{v}_f| = v$, se tiene la relación de semejanza de triángulos indicada en la figura *c*.

Movimiento Circular Uniforme



$$\frac{r}{\Delta s} = \frac{v}{\Delta v} \Rightarrow \Delta v = \frac{v}{r} \Delta s$$

Cinemática de Rotación

Movimiento Circular Uniforme

Si relacionamos los desplazamientos con el intervalo de tiempo en el que ocurren, dividimos ambos miembros por Δt , donde el valor $\Delta v/\Delta t$ será la aceleración media, y se obtiene:

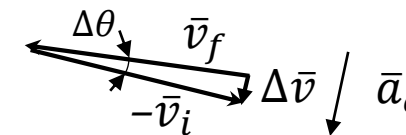
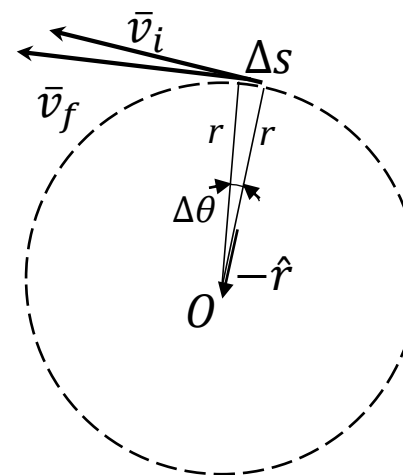
$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{r} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Si Δt es muy pequeño, tendiendo a cero, Δs y Δv también lo son, y Δv se hace perpendicular a v , por lo tanto apunta hacia el centro de la circunferencia.

En el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$, $a_m \rightarrow a_c$; y se puede escribir:

$$a_c = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v}{r} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{r} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{r} \cdot v$$

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$



Donde a_c es llamada: aceleración centrípeta o radial.

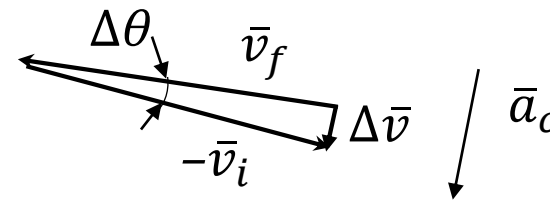
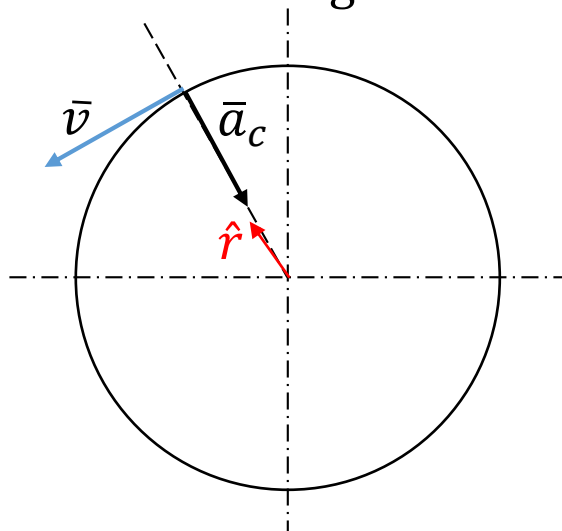
Cinemática de Rotación

Aceleración radial o centrípeta

Entonces, en el movimiento circunferencial con rapidez constante, existirá aceleración, la cual tiene dirección radial y sentido hacia el centro de la circunferencia (ya que en el límite, $\Delta\vec{v}$ apunta hacia el centro), y el vector con su magnitud es:

$$\vec{a}_c = \frac{v^2}{r}(-\hat{r}) \quad \text{ó} \quad a_c = \frac{v^2}{r}$$

Donde $\hat{r}$ es un vector unitario (versor) radial dirigido desde el centro de la circunferencia hacia fuera, mostrado en la figura.

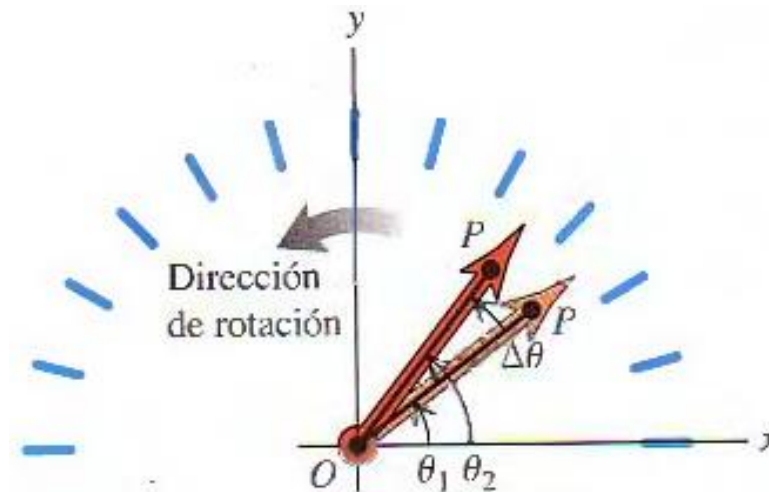
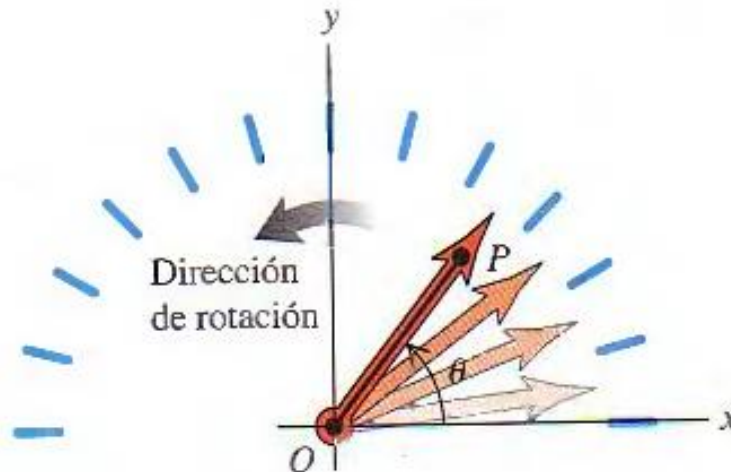


Cinemática de Rotación

Velocidad angular

La coordenada θ de la figura izquierda, nos indica la posición de la partícula en un instante dado en el movimiento rotacional.

Definimos el movimiento rotacional del cuerpo como la razón de cambio de θ respecto al tiempo transcurrido.



En la figura derecha, una línea de referencia OP en un cuerpo que gira, forma un ángulo θ_1 con el eje $+x$ en el instante t_1 ; luego en un instante posterior t_2 , el ángulo cambió a θ_2 .

Cinemática de Rotación

Velocidad angular

Definimos velocidad angular media ω_{med} del cuerpo en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ como la razón entre el desplazamiento angular $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ y Δt :

$$\omega_{med} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Recordar que el movimiento de rotación se produce en un plano perpendicular al eje de rotación.

La velocidad angular instantánea ω , es el límite cuando Δt tiende a cero, o sea, la derivada de θ respecto a t :

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad [rad/s]$$

Cuando nos referimos a velocidad angular, lo haremos utilizando el concepto de velocidad angular instantánea, la cual puede ser positiva o negativa según el sentido de rotación. Además la velocidad media será igual a la instantánea en el movimiento circular uniforme.

Cinemática de Rotación

Velocidad tangencial y angular

Una partícula que gira ubicada en un punto P a una distancia r del origen, describe una circunferencia en torno al origen.

La posición de la partícula se puede expresar en coordenadas polares $(r ; \theta)$, donde la única coordenada que cambia en el tiempo es el ángulo θ .

Si la partícula se mueve desde el eje x positivo, donde $\theta = 0^\circ$ hasta un punto P , el arco de longitud Δs recorrido por la partícula cuando barre cierto ángulo $\Delta\theta$, como se ve en la figura, se definen como:

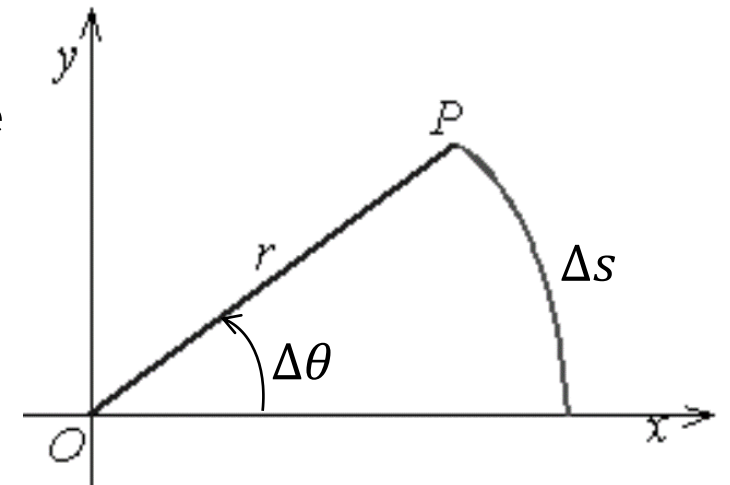
$$\Delta s = r \cdot \Delta\theta$$

Luego, si relacionamos desplazamiento respecto a un intervalo de tiempo Δt es:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = r \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Para intervalos infinitésimos tendremos:

$$\frac{ds}{dt} = r \cdot \frac{d\theta}{dt} \longrightarrow \boxed{v = r \cdot \omega}$$

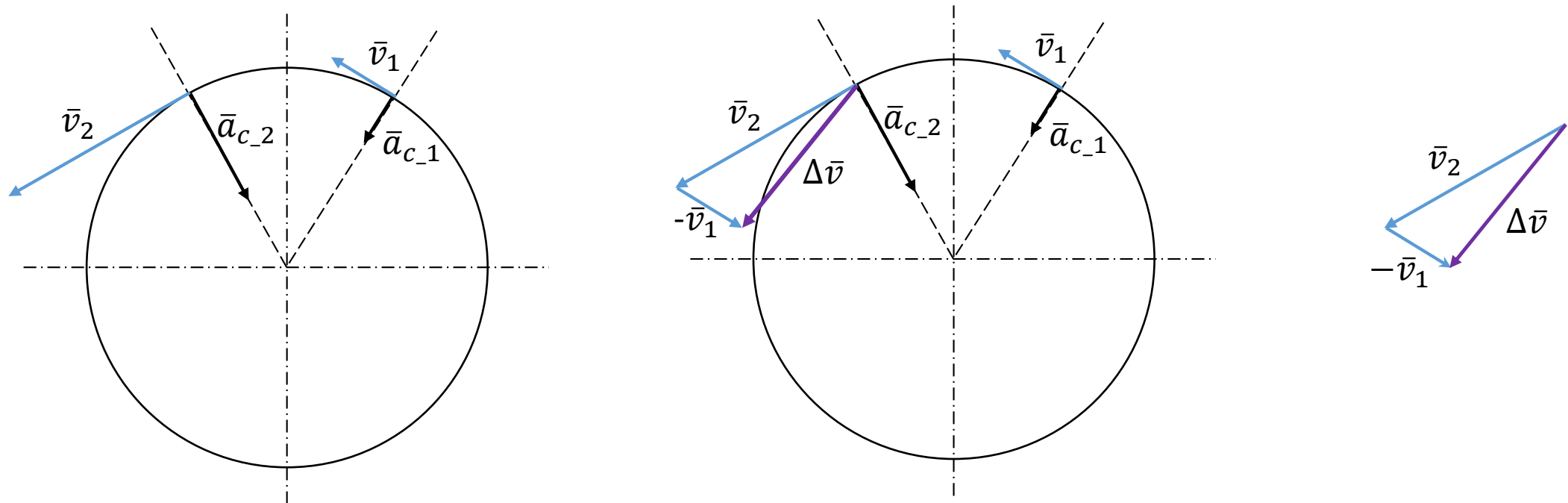


Cinemática de Rotación

Movimiento Circular Variado

Si durante el movimiento circunferencial de la partícula, cambia la velocidad tanto en dirección como en magnitud, la velocidad siempre es tangente a la trayectoria (figura), pero ahora la aceleración ya no es solamente radial, sino que forma cierto ángulo con la velocidad.

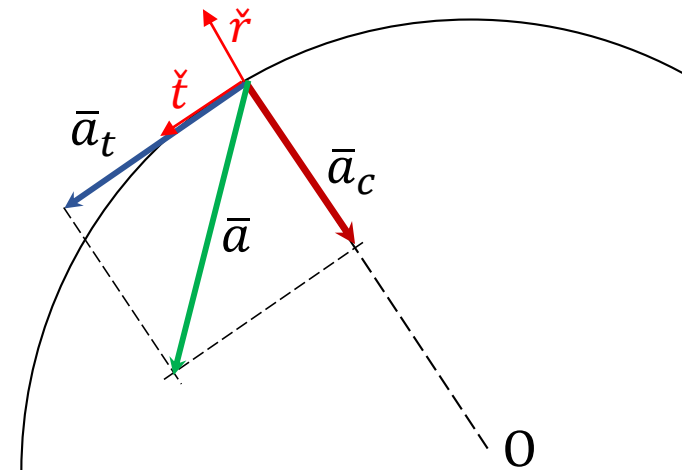
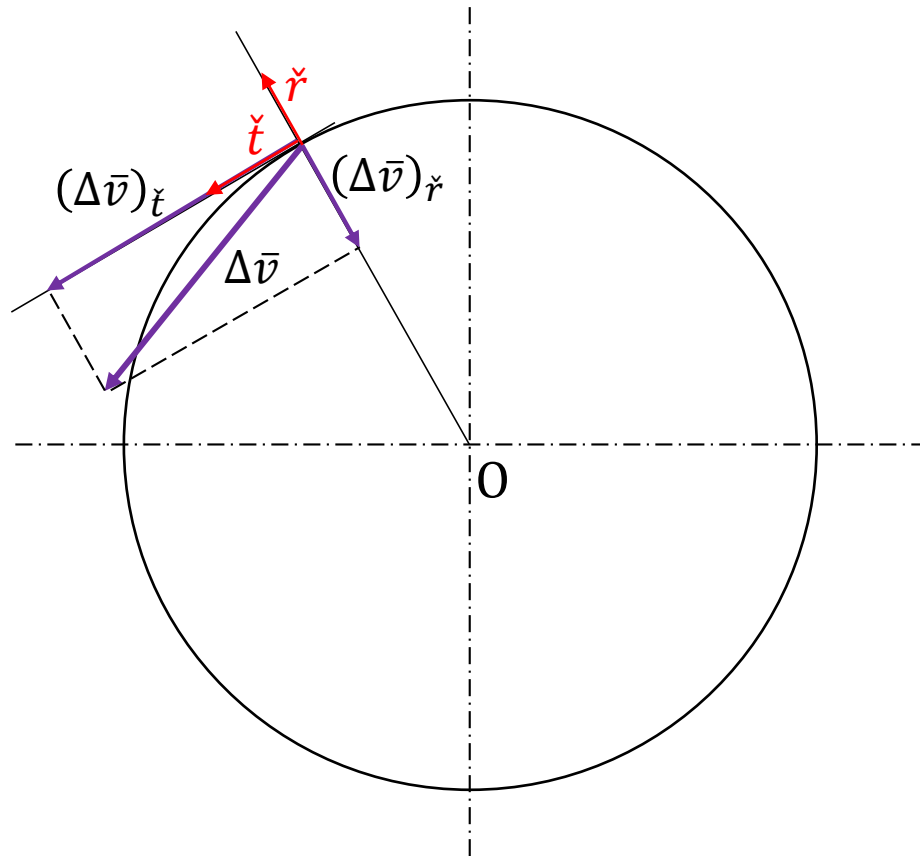
Además existirá una aceleración tangencial debido al cambio en la magnitud de la velocidad tangencial, y dicho cambio tendrá también dirección tangencial



Cinemática de Rotación

Movimiento Circular Variado

Los cambios en dirección y módulo del vector velocidad dan lugar a aceleraciones en dichas direcciones.



Cinemática de Rotación

Movimiento Circular Variado

En este caso es conveniente escribir la aceleración en dos componentes vectoriales, una radial hacia el centro a_r y otra tangente a la trayectoria a_t , entonces a se escribe como:

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_t = a_r(-\check{r}) + a_t(\check{t})$$

Donde $\check{t}$ es un vector unitario tangente a la trayectoria, en igual dirección y sentido del movimiento.

En esta ecuación, la componente radial de la aceleración es la aceleración centrípeta originada por el *cambio en la dirección* de la velocidad y la componente tangencial es producida por el *cambio en la magnitud* de la velocidad. Por lo tanto su valor numérico es:

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

Entonces la aceleración total en el movimiento circunferencial es:

$$\bar{a} = -\frac{v^2}{r}\hat{r} + \frac{dv}{dt}\hat{t}$$

Cinemática de Rotación

Aceleración tangencial y angular

En la figura se ven los vectores unitarios ($\hat{r}$ y $\hat{t}$) para un movimiento circunferencial.

Observar que en el caso del movimiento circunferencial uniforme $v = \text{cte}$, entonces $dv/dt = 0$ y $\bar{a} = \bar{a}_c$.

Y si no cambia la dirección de $\bar{v}$, $r \rightarrow \infty$, $a_r = 0$, el movimiento es en una dimensión con $\bar{a} = \bar{a}_t = d\bar{v}/dt$.

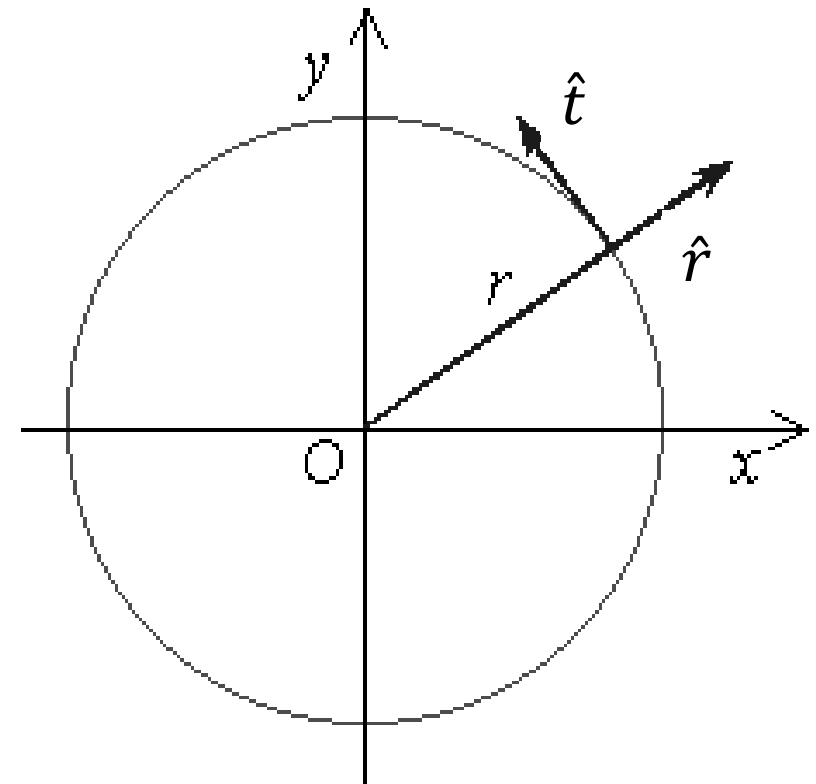
Si relacionamos el cambio del módulo de la velocidad tangencial respecto a un pequeño intervalo de tiempo es:

$$\frac{dv}{dt} = r \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

Luego tendremos:

$$a_t = r \cdot \alpha \quad [\text{rad/s}^2]$$

Donde α se denomina “aceleración angular”.



Cinemática de Rotación

Velocidad y Aceleración Angular

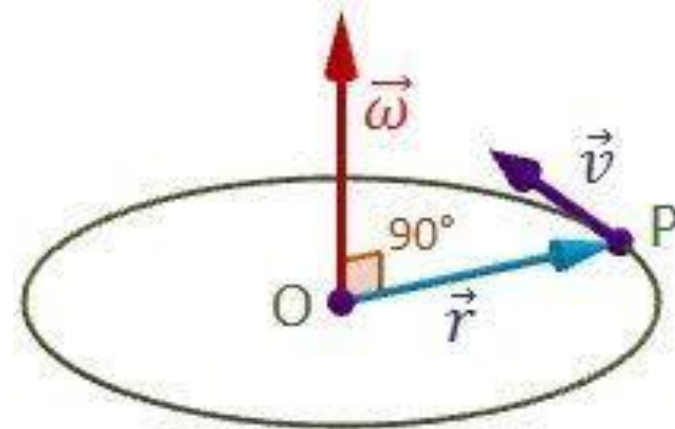
De la definición de estas variables se deduce además que para la rotación de un cuerpo alrededor de un eje, todas las partículas tienen la misma velocidad angular y la misma aceleración angular.

El desplazamiento, velocidad y aceleración angular son similares a las variables lineales.

Así, las ecuaciones cinemáticas del movimiento de rotación con aceleración angular constante tienen la misma forma que las correspondientes al movimiento lineal haciendo los reemplazos x por θ , v por ω y a por α , por lo que las ecuaciones cinemáticas del movimiento angular son:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot (t - t_0)^2$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot (t - t_0)$$



Cinemática de Rotación

Velocidad y Aceleración Angular

Para toda partícula que gira describiendo una trayectoria circunferencial, existe una relación entre las magnitudes angulares con las correspondientes lineales.

Si la partícula recorre una distancia lineal s , moviéndose un ángulo θ sobre una trayectoria circunferencial de radio r , tiene una velocidad que, según vimos por ser tangente a la trayectoria, se llama velocidad tangencial, y tiene aceleración tangencial y centrípeta; entonces las relaciones entre las variables son:

$$s = r\theta$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v = r\omega$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_t = r\alpha$$

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

$$\left. \begin{array}{l} a_t = r\alpha \\ a_c = r\omega^2 \end{array} \right\} a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$$