

MOMENTO LINEAL Y COLISIONES



Momento lineal

Introducción

¿Cómo puede un golpe partir un montón de ladrillos?, ¿por qué una caída es más dolorosa sobre el cemento que sobre el pasto?, ¿por qué cuando se salta desde un lugar alto es conveniente flexionar las rodillas al llegar al suelo?.

Para entender y responder estas preguntas hay que recordar el concepto de inercia.

Todos sabemos que es más fácil detener una pelota pequeña que una grande que se mueva con la misma velocidad ¿por qué?.

Estas acciones están relacionadas con la inercia (masa) de los objetos en movimiento, y esta idea de inercia en movimiento está incluida en el concepto de *Cantidad de movimiento* o *Momento lineal*, término que se refiere a los objetos que se mueven.

Momento lineal

Definición

El concepto de cantidad de movimiento que también llamaremos momento lineal se usa para denotar la inercia en movimiento.

El momento lineal $\mathbf{p}$ de una partícula de masa m que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$, se define como el producto de la masa de un objeto por su velocidad:

$$\bar{p} = m \cdot \bar{v}$$

Para una partícula en movimiento en el espacio, las componentes del momento lineal en cada dirección x ; y ; z son:

$$p_x = m.v_x ; p_y = m.v_y ; p_z = m.v_z$$

El momento lineal (muchas veces mencionado como *cantidad de movimiento*) es una magnitud física vectorial porque la velocidad es un vector, su dirección es a lo largo de $\mathbf{v}$, y su unidad de medida en el SI es: $[kg.m/s]$ ó $[N.s]$.

Momento lineal

Relación con la 2º ley de Newton

De esta definición se observa que el momento lineal de un cuerpo en movimiento puede ser grande si su masa es grande, como en el caso de la pelota más grande mencionada al inicio, si su velocidad es grande, o si ambas lo son.

Si un cuerpo está en reposo, su momento lineal es cero. Puesto que el movimiento es producido por fuerzas, si la masa es constante, se puede relacionar el momento lineal con la fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre la partícula usando la segunda Ley de Newton:

$$\bar{\mathbf{F}} = m \cdot \bar{\mathbf{a}} = m \cdot \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d(m \cdot \bar{\mathbf{v}})}{dt}$$

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt}$$

Esta última ecuación dice que la fuerza neta sobre una partícula es igual a la rapidez de cambio del momento lineal de la partícula. También se puede decir que es la segunda ley de Newton expresada en términos de Cantidad de Movimiento.

Momento lineal

Ejemplo

Para el caso particular en que la fuerza neta es cero, esto es para una partícula en equilibrio de traslación, el momento lineal resultante de la partícula debe ser constante, ya que:

$$\vec{F} = 0 = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{constante}$$

Ejemplo1:

- a) ¿Qué cantidad de movimiento tendrá un camión cuya masa es de 24000Kg viajando a 15m/s?
- b) ¿Qué cantidad de movimiento tendrá un automóvil cuya masa es de 2000Kg viajando a la misma velocidad que el camión?
- c) ¿Con que rapidez deberá viajar el automóvil para tener la misma cantidad de movimiento que el camión?



Momento lineal

Ejemplo

$$a) \quad p_{\text{camión}} = m_{\text{camión}} \cdot v_{\text{camión}} = 24.000\text{Kg} \cdot 15\text{m/s} = 360.000\text{Kg.m/s}$$

$$b) \quad p_{\text{auto}} = m_{\text{auto}} \cdot v_{\text{camión}} = 2.000\text{Kg} \cdot 15\text{m/s} = 30.000\text{Kg.m/s}$$

$$c) \quad p_{\text{auto}} = p_{\text{camión}} = m_{\text{auto}} \cdot v_{\text{auto}} \quad \Rightarrow \quad v_{\text{auto}} = p_{\text{camión}} / m_{\text{auto}} = \frac{360.000\text{Kg.m/s}}{2.000\text{Kg}}$$

$$v_{\text{auto}} = 180\text{m/s}$$

Comparación: $v_{\text{camión}} = 15\text{m/s} = 54\text{Km/h}$

$$v_{\text{auto}} = 180\text{m/s} = 648\text{Km/h}$$

Importante: No olvidar que “ p ” es una magnitud vectorial, aún para el caso de este ejemplo que es unidireccional.

Impulso

Definición

Si cambia el momento lineal de una partícula cuya masa permanece constante, su velocidad varía, como casi siempre es el caso, entonces hay aceleración, que necesariamente debe ser producida por una fuerza.

Mientras mayor sea la fuerza, mayor el cambio de velocidad, y por lo tanto mayor el cambio de momento lineal. Pero hay otro factor importante a considerar: el tiempo durante el cual se ejerce la fuerza.

El cambio de momento lineal es mayor si se aplica la misma fuerza durante un intervalo de tiempo largo que durante un intervalo de tiempo pequeño.

Estas afirmaciones se pueden demostrar escribiendo la ecuación de momento lineal de la siguiente forma:

$$d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt$$

Esta ecuación se puede integrar para obtener la variación de momento $\Delta \mathbf{p}$ de la partícula.

Impulso

Definición

Si el momento lineal cambia desde un valor inicial p_i en el instante inicial t_i a un valor final p_f en el instante final t_f , integrando la ecuación anterior, se obtiene:

$$\bar{p}_f - \bar{p}_i = \Delta \bar{p} = \int_{t_i}^{t_f} \bar{F} \cdot dt$$

La cantidad integral de la fuerza por el intervalo de tiempo, se define como el *impulso* I de la fuerza F en el intervalo de tiempo dt , es decir el impulso I es un vector definido por la expresión:

$$\bar{I} = \int_{t_i}^{t_f} \bar{F} \cdot dt = \Delta \bar{p}$$

Cuanto mayor sea el impulso, mayor será el cambio de momento lineal de la partícula.

Impulso

Esta expresión se llama la *aproximación del impulso*, supone que una de las fuerzas que actúan sobre la partícula lo hace en un tiempo muy corto y es de magnitud mucho mayor que cualquier otra fuerza presente.

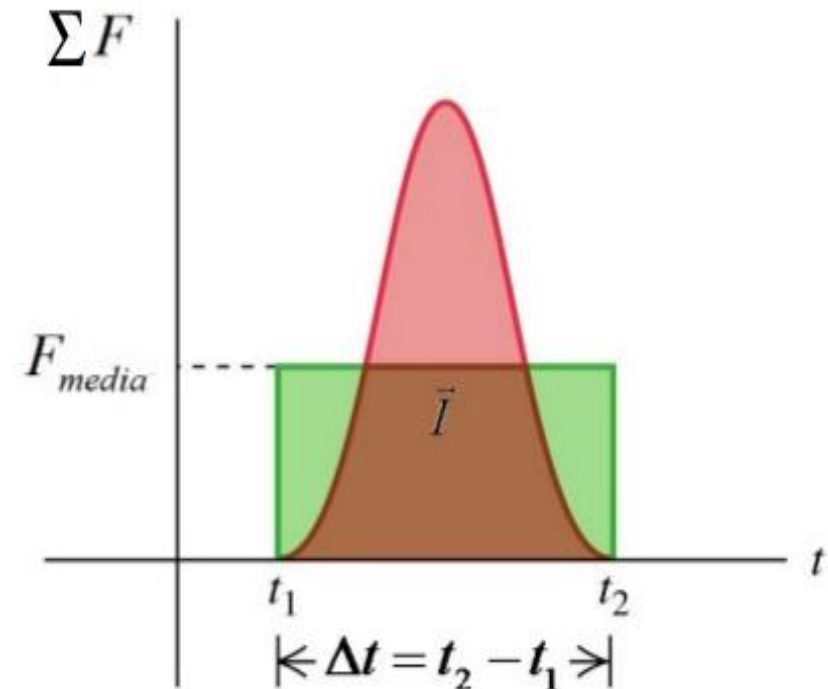
Esta aproximación es muy útil cuando se trabaja con choques (evento en Física que luego definiremos), donde las fuerzas son muy intensas y de muy corta duración, en este caso se les da el nombre de *fuerzas impulsivas o de impacto*.

El área bajo la curva y el área del rectángulo son iguales.

$$\bar{I} = \bar{F}_{med} \cdot \Delta t = \Delta \bar{p}$$

El impulso es igual en ambos casos, por lo tanto también es igual cambio en la cantidad de movimiento, pero actuaron fuerzas de distinta intensidad y en diferentes Δt .

Interpretación gráfica



Impulso

Ejemplos

Ejemplo 2:

Un jugador patea una pelota de futbol de 0,43Kg en un tiro libre, cuando la pelota deja de estar en contacto con el pie tiene una velocidad de 25m/s. Si el pie del jugador estuvo en contacto con el balón por 0,008s; determinar:

- a) El impulso que le dio el jugador a la pelota;
- b) La fuerza media ejercida por el pie sobre el balón;
- c) La distancia que recorre el pie del jugador en contacto con la pelota.

a)
$$I = \Delta p = F_{med} \cdot \Delta t$$

No conocemos la función que expresa la fuerza F aplicada ni el valor de la F_{med} .

Entonces utilizamos el Teorema del impulso y cantidad de movimiento.

$$I = \Delta p = m_{pelota} \cdot \Delta v_{pelota} = m_{pelota} \cdot (v_{final} - v_{inicial}) = 0,43\text{Kg} \cdot (25\text{m/s} - 0\text{m/s})$$

$$I = 10,75 \text{ Kg.m/s}$$

Impulso

Ejemplos

b)

$$F_{med} = I / \Delta t$$

$$F_{med} = \frac{10,75 kg \cdot m/s}{0,008s}$$

$$F_{med} = 1343,75N$$

c)

$$W_{neto} = F_{neta} \cdot \Delta x = \Delta K$$

$$\Delta x = \frac{\Delta K}{F_{med}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_i^2}{F_{med}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 0,43 Kg \cdot (25m/s)^2 - 0}{1343,75N}$$

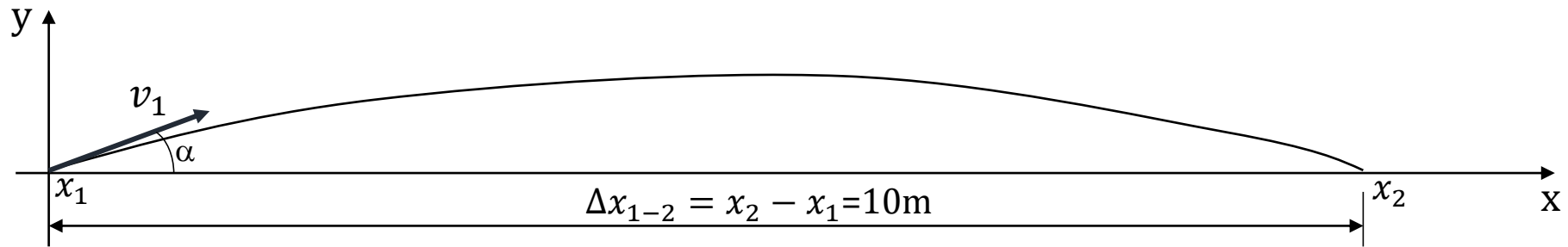
$$\Delta x = 0,1m$$

Impulso

Ejemplos

Ejemplo 3:

En un saque, un jugador de tenis golpea la pelota de 50 gr con la raqueta, proporcionándole una fuerza impulsiva. Suponiendo que la pelota sale de la raqueta en un ángulo de $2,5^\circ$ y recorre 10 m para llegar a la misma altura en el otro sector de la cancha, calcular: a) el impulso; b) la fuerza media sobre la pelota si la deformación de la pelota por el golpe fue de 1 cm; c) la duración del golpe.



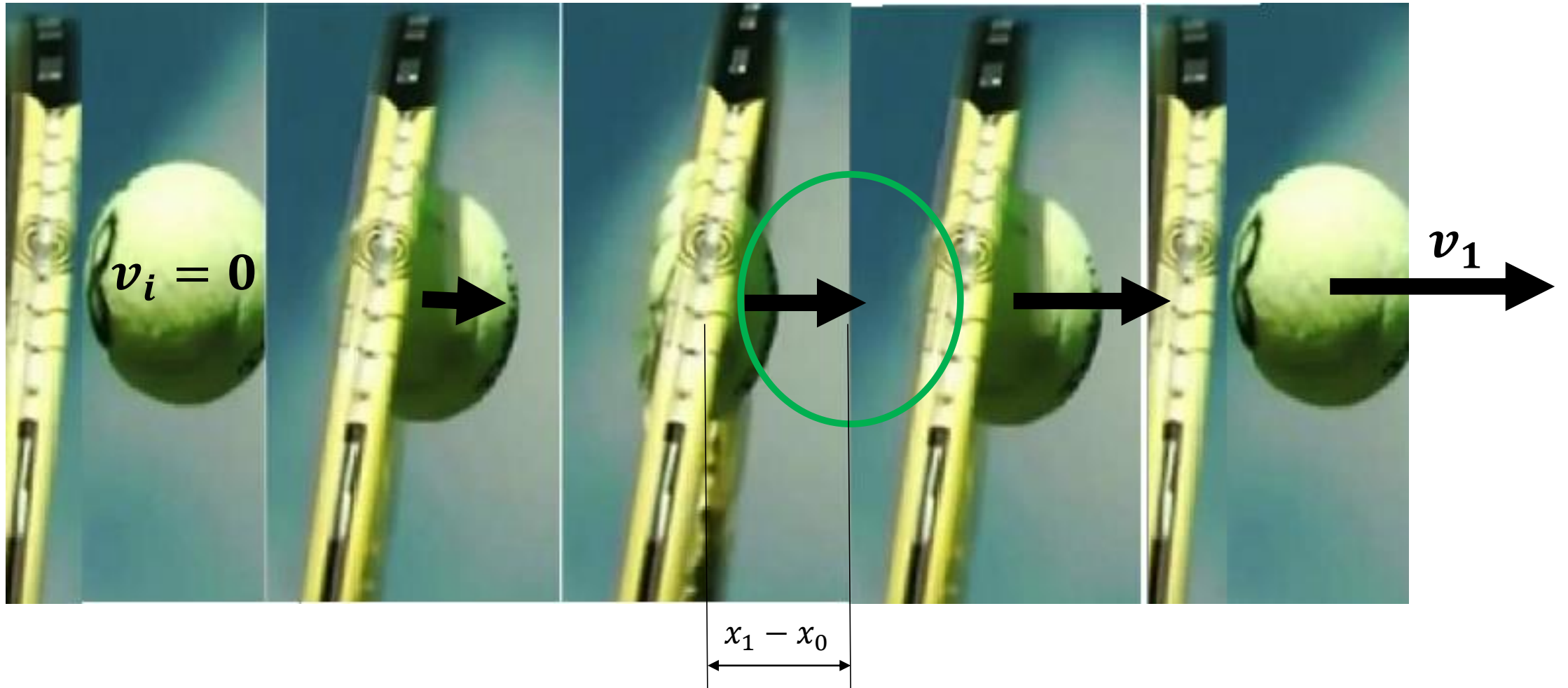
a) Cálculo del impulso, por su definición:

$$I = \Delta p = m \cdot (v_1 - v_0)$$

Donde $v_0 = 0$ es la rapidez de la pelota justo antes del golpe y v_1 es la rapidez con la que sale de la raqueta después del golpe, que no se conoce, pero que se puede calcular con las ecuaciones de cinemática, sabiendo que la pelota recorre $\Delta x_{1-2} = 10\text{m}$ y sale con una inclinación $\alpha = 2,5^\circ$.

Impulso

Ejemplos



Impulso

Ejemplos

Usando las ecuaciones de movimiento vistas en cinemática, se tiene:

$$y_2 = y_1 + v_i \cdot \text{sen}\alpha \cdot t_{1-2} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{1-2}^2 \longrightarrow y_1 = 0 ; y_2 = 0 \longrightarrow v_1 \cdot \text{sen}\alpha \cdot t_{1-2} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_{1-2}^2 \quad (1)$$

$$x_2 = x_1 + v_1 \cdot \text{cos}\alpha \cdot t_{1-2} \longrightarrow x_1 = 0 \longrightarrow t_{1-2} = \frac{x_2}{v_1 \cdot \text{cos}\alpha} \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1), es:

$$\cancel{v_1} \cdot \text{sen}\alpha \cdot \frac{x_2}{\cancel{v_1} \cdot \text{cos}\alpha} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x_2}{v_1 \cdot \text{cos}\alpha} \right)^2$$

$$\text{sen}\alpha \cdot \frac{\cancel{x_2}}{\cancel{\text{cos}\alpha}} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x_2^2}{v_1^2 \cancel{\text{cos}^2\alpha}}$$

Impulso

Ejemplos

$$\text{sen}\alpha = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x_2}{v_1^2 \cos\alpha} \longrightarrow \text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha = 4,9 \cdot \frac{x_2}{v_1^2}$$

$$v_1^2 = 4,9 \cdot \frac{x_2}{\text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha} \longrightarrow v_1 = \sqrt{4,9 \cdot \frac{x_2}{\text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha}}$$

$$v_1 = \sqrt{4,9 \text{ m/s}^2 \cdot \frac{10\text{m}}{\text{sen}2,5^\circ \cdot \cos2,5^\circ}} = 33,53 \text{ m/s}$$

Reemplazando en el impulso, se obtiene:

$$I = m \cdot v_1 - m \cdot v_0 = 0,05\text{kg} \cdot 33,53\text{m/s}$$

$$I = 1,68\text{kg.m/s}$$

Impulso

Ejemplos

b) Si la pelota se deformó 1cm durante el golpe, considerando que cuando comienza la deformación la $v_0 = 0$:

$$\Delta x_{0-1} = x_1 - x_0 = 0,01m$$

$$\Delta K = W_{neto} = F_{neta} \cdot \Delta x_{0-1}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot (v_1^2 - v_0^2) = F_{neta} \cdot \Delta x_{0-1}$$

$$F_{neta} = \frac{m \cdot v_1^2}{2 \cdot \Delta x_{0-1}} = \frac{0,05kg \cdot (33,53 m/s)^2}{2 \cdot 0,01m}$$

$$F_{neta} = 2810,65 N$$

Impulso

Ejemplos

c) la duración del golpe.

$$\bar{I} = \bar{F}_{med} \cdot \Delta t = \Delta \bar{p}$$

$$I = F_{med} \cdot \Delta t_{0-1}$$

$$\Delta t_{0-1} = \frac{I}{F_{med}} = \frac{1,68 kg \cdot m/s}{2810,65 N}$$

$$\Delta t_{0-1} = 0,000598 s$$

Impulso

Ejemplos

Ejemplo 4:

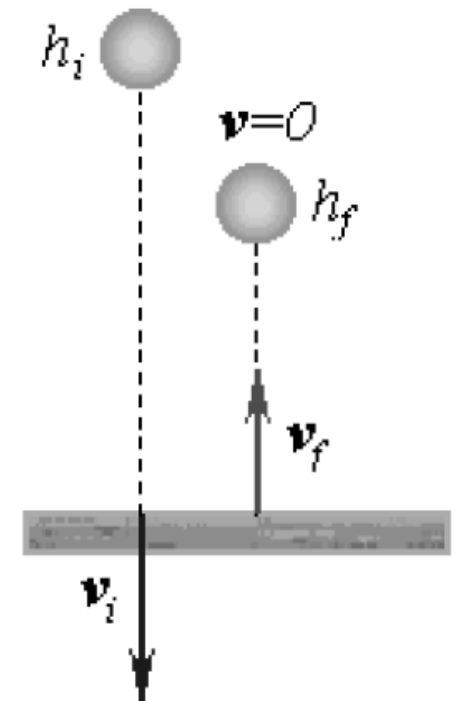
Una pelota de 100 g que se deja caer desde una altura $h = 2\text{m}$, rebota verticalmente después de golpear el suelo hasta $\frac{3}{4}h$ (figura). Calcular: a) el momento lineal de la pelota antes y después de golpear el suelo, b) si la duración del golpe fue de 0,01 s, calcular la fuerza media ejercida por el piso sobre la pelota.

Solución: a) en la figura se muestra el esquema de la situación. El momento lineal inicial y final es:

$$\text{momento inicial: } \vec{p}_i = -mv_i \hat{j}$$

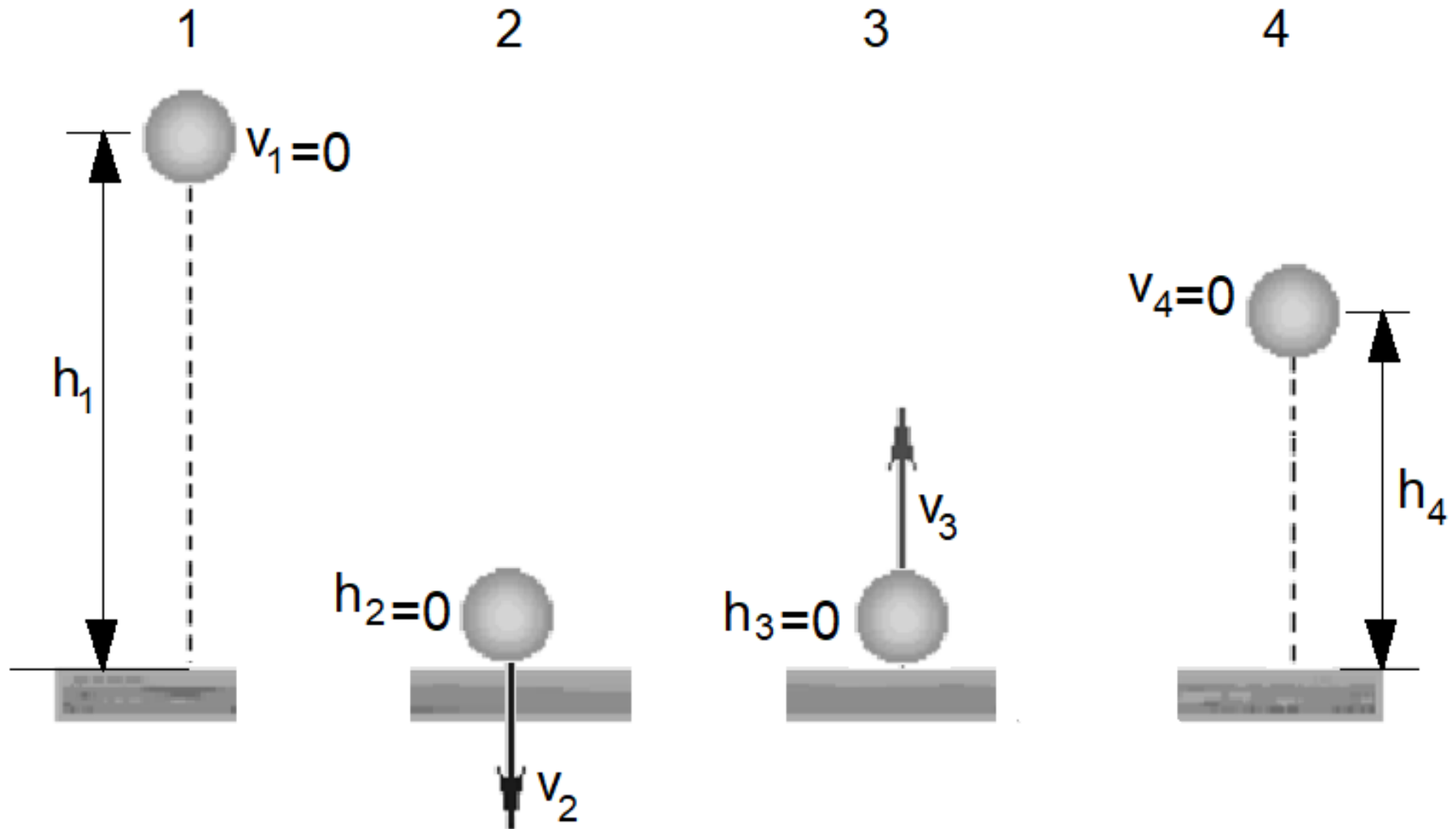
$$\text{momento final: } \vec{p}_f = mv_f \hat{j}$$

Los valores de las velocidades inicial y final se pueden calcular usando el principio de conservación de la energía.



Impulso

Ejemplos



Impulso

Entre 1 y 2, se plantea la ecuación de conservación de energía:

$$E_1 = E_2$$

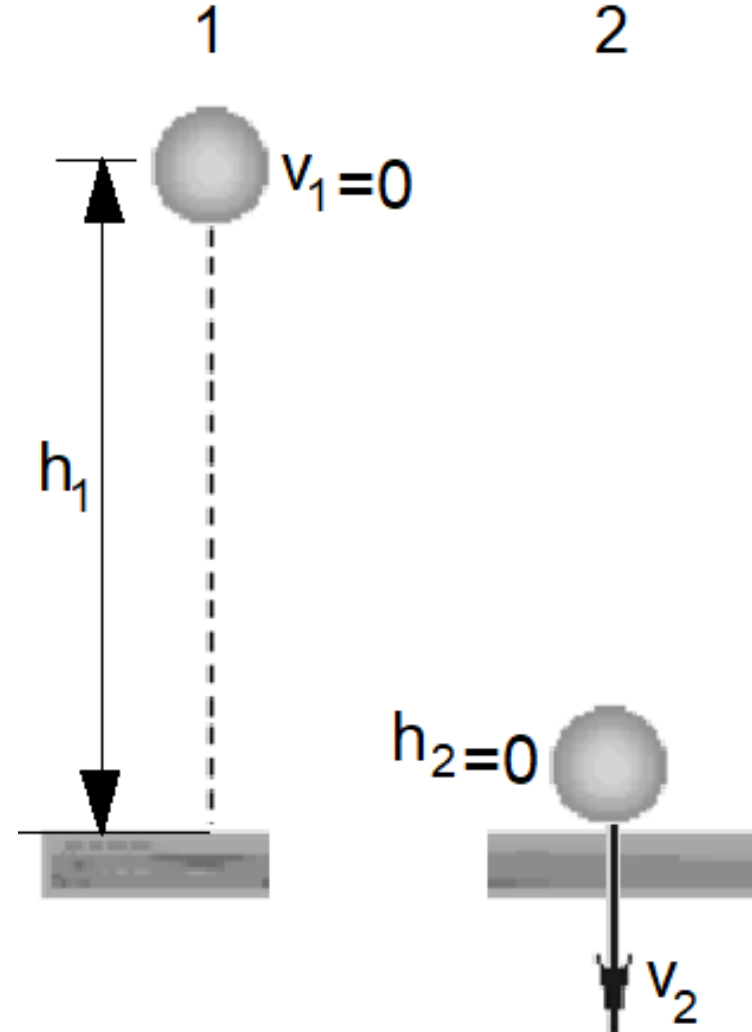
$$K_1 + U_{g1} = K_2 + U_{g2}$$

$$0 + m \cdot g \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 + 0$$

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1}$$

Ejemplos

2



Impulso

Entre 3 y 4, se plantea la ecuación de conservación de energía:

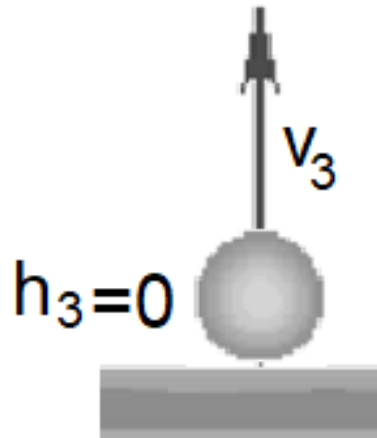
$$E_3 = E_4$$

$$K_3 + U_{g3} = K_4 + U_{g4}$$

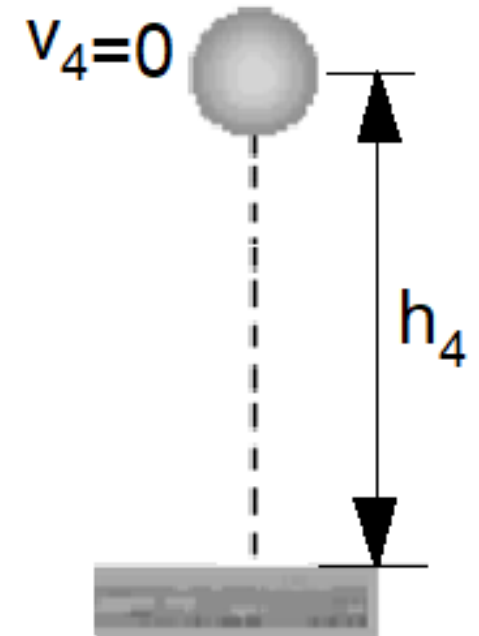
$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_3^2 + 0 = 0 + m \cdot g \cdot h_4$$

$$v_3 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_4}$$

3



4



Impulso

Ejemplos

El momento lineal en cada caso 2 y 3 será:

$$p_2 = m \cdot v_2 \checkmark$$

$$p_3 = m \cdot v_3 \checkmark$$

b) Usando la aproximación del impulso:

$$\bar{I} = \bar{F}_{med} \cdot \Delta t = \Delta \bar{p}$$

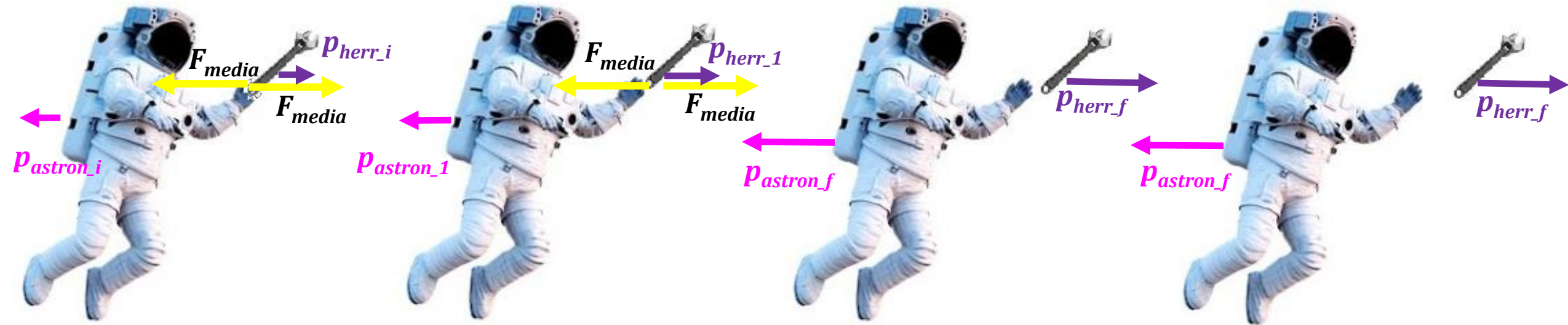
$$I = \Delta p = m \cdot v_3 - m \cdot v_2$$

$$F_{med} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

Momento lineal

Conservación

La segunda ley de Newton afirma que para acelerar un objeto, debe existir una fuerza neta; dicho de otro modo, para cambiar el momento lineal de un objeto hay que aplicarle un impulso, impulso que es producido por una fuerza.



$$\bar{F}_{astron-herram} = \frac{d\bar{p}_{astron}}{dt} \quad y \quad \bar{F}_{herram-astron} = \frac{d\bar{p}_{herram}}{dt}$$

Momento lineal

Conservación

Según la tercera ley de Newton, $F_{astron-herram}$ y $F_{herram-astron}$ son un par de acción y reacción, entonces:

$$\bar{F}_{astron-herram} + \bar{F}_{herram-astron} = 0$$

$$\frac{d\bar{p}_{astron}}{dt} + \frac{d\bar{p}_{herram}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{p}_{astron} + \bar{p}_{herram}) = 0$$

$$d(\bar{p}_{astron} + \bar{p}_{herram}) = 0$$

$$\bar{p}_{astron} + \bar{p}_{herram} = cte.$$

O también:

$$\Delta\bar{p}_{sistema} = \Delta\bar{p}_{astron} + \Delta\bar{p}_{herram} = 0$$

$$(\bar{p}_{astron} + \bar{p}_{herram})_i = (\bar{p}_{astron} + \bar{p}_{herram})_f$$

Momento lineal

Mientras exista una fuerza neta, variará la cantidad de movimiento del objeto al cual se le aplica dicho impulso.

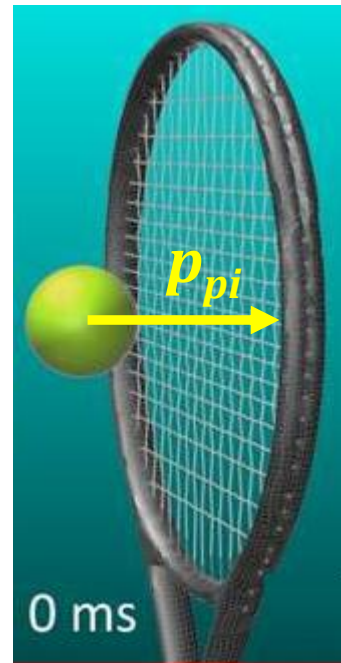
Una vez que finaliza el contacto entre los cuerpos en estudio, el que aplica la fuerza (impulsor) y el que es impulsado, la fuerza neta será nula y la cantidad de movimiento permanecerá constante.

p_{pi} : Momento lineal de la pelota inicial, antes del golpe.

p_{ri} : Momento lineal de la raqueta inicial, antes del golpe.

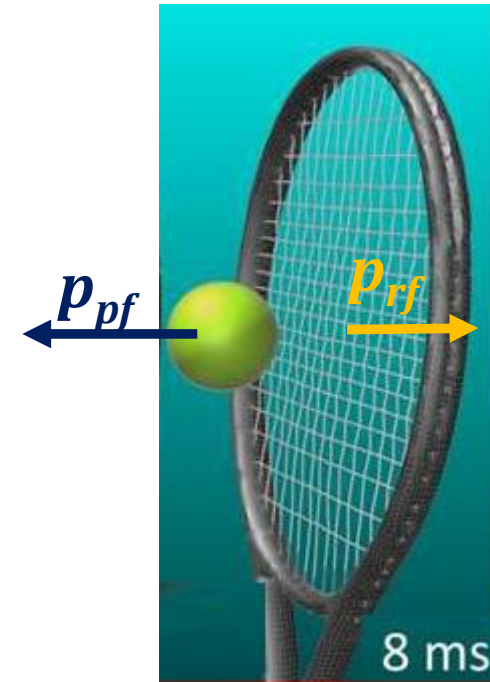
p_{pf} : Momento lineal de la pelota final, después del golpe.

p_{rf} : Momento lineal de la raqueta final, después del golpe.



Antes del golpe

$p_{ri}=0$



Después del golpe

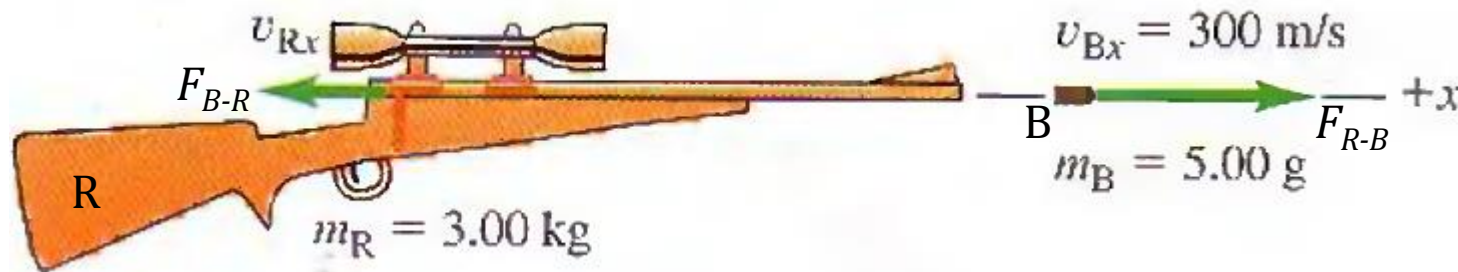
Momento lineal

Conservación

Consideremos un sistema mecánico formado solo por dos partículas que interactúan entre sí (un rifle disparando una bala), pero que están aisladas de los alrededores, y que ejercen fuerzas entre ellas, sin considerar otras fuerzas externas al sistema.

Supongamos que en un cierto instante t el momento lineal de una partícula R (Rifle) es p_R y el momento lineal de la partícula B (Bala) es p_B .

Si F_{R-B} es la fuerza sobre la partícula B producida por la partícula R y F_{B-R} es la fuerza sobre la partícula R producida por la partícula B, como se muestra en la figura siguiente, entonces se puede aplicar la segunda Ley de Newton a cada partícula:



$$\bar{F}_{R-B} = \frac{d\bar{p}_R}{dt} \quad y \quad \bar{F}_{B-R} = \frac{d\bar{p}_B}{dt}$$

Momento lineal

Conservación

Por la tercera Ley de Newton, F_{R-B} y F_{B-R} son un par de acción y reacción, entonces:

$$\bar{F}_{R-B} + \bar{F}_{B-R} = 0$$

$$\frac{d\bar{p}_R}{dt} + \frac{d\bar{p}_B}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{p}_R + \bar{p}_B) = 0$$

$$\bar{p}_R + \bar{p}_B = cte.$$

Se concluye que el momento lineal total es constante. Cuando una cantidad física no cambia, decimos que se conserva, por lo tanto el momento total se conserva.

Momento lineal

Conservación

No hay caso alguno en que el momento lineal de un sistema pueda cambiar si no se aplica una fuerza externa.

Esta es una de las leyes fundamentales de la mecánica, conocida como ***ley de conservación del momento lineal***.

Como es una ecuación vectorial, equivale a tres ecuaciones escalares, una para cada componente x , y y z :

$$p_{1x} + p_{2x} = cte$$

$$p_{1y} + p_{2y} = cte$$

$$p_{1z} + p_{2z} = cte$$

Momento lineal

Conservación

Si p_{i1} y p_{i2} son el momento lineal en el instante inicial de las partículas 1 y 2 y p_{f1} y p_{f2} son el momento lineal en el instante final, entonces la conservación del momento lineal se escribe como:

$$\vec{p}_{i1} + \vec{p}_{i2} = \vec{p}_{f1} + \vec{p}_{f2}$$

$$m_1 \vec{v}_{i1} + m_2 \vec{v}_{i2} = m_1 \vec{v}_{f1} + m_2 \vec{v}_{f2}$$

La conservación de la energía mecánica total se cumple sólo cuando las fuerzas sobre el sistema aislado son conservativas.

El momento lineal para un sistema de partículas se conserva sin importar la naturaleza de las fuerzas internas que actúan sobre el sistema aislado, por lo que el principio de conservación del momento lineal es más general y completo que el de la conservación de la energía, es una de las leyes más importantes de la mecánica, deducido a partir de las Leyes de Newton.

Momento lineal

Conservación

Como el sistema está aislado, las fuerzas internas que actúan son de acción y reacción, en este caso el momento se conserva, por lo que el principio de conservación del momento lineal es un enunciado equivalente a la tercera Ley de Newton.

Notar como intervienen las tres Leyes de Newton en este análisis.

Aunque la anterior deducción del principio de conservación del momento lineal fue formulada en este análisis para dos partículas que interactúan entre sí, se puede demostrar que es válida para un sistema de n partículas y para una distribución continua de masa, aplicada al movimiento del centro de masa del sistema de partículas o de la distribución de masa.

Momento lineal

Conservación

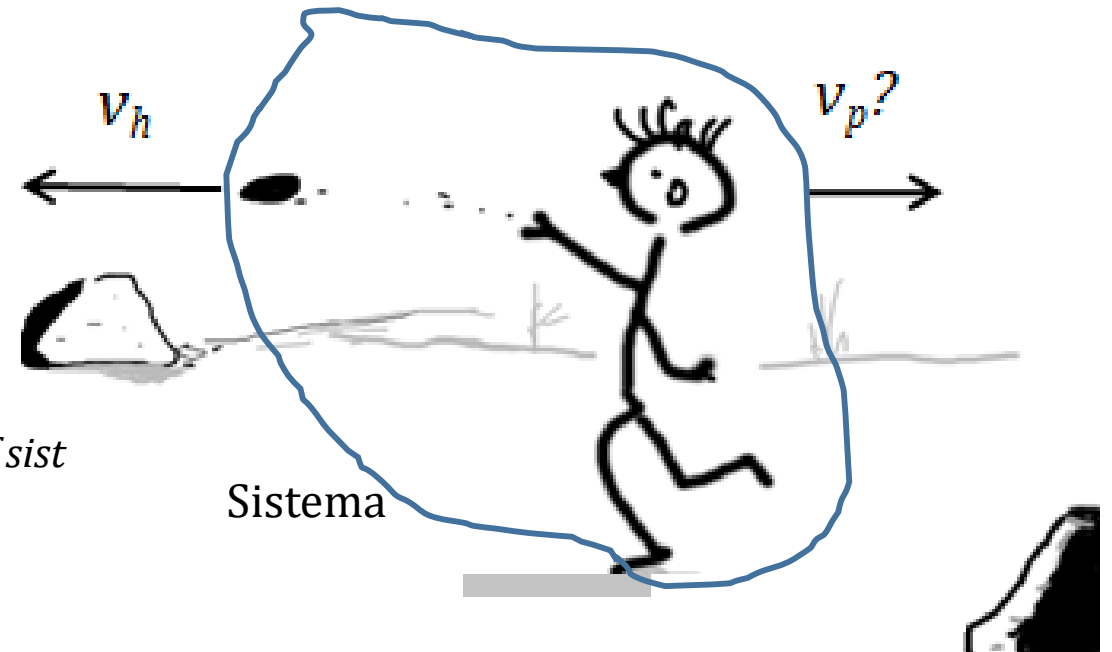
Ejemplo 5:

Una persona, de 75kg, parada sobre una superficie congelada lanza horizontalmente hacia adelante un trozo de hielo de 0,16kg con una rapidez de 20m/s.

- a) Defina que elemento o elementos conforman el sistema de estudio.
- b) Si no hay rozamiento entre la persona y suelo, ¿Este se desplazará como consecuencia del lanzamiento? En caso afirmativo ¿con que velocidad?

a) Hielo y Persona

b) Si: $\Sigma F_{ext} = 0 \rightarrow \Delta p_{sist} = 0 \rightarrow p_{i\ sist} = p_{f\ sist}$



Momento lineal

Conservación

$$m_p \cdot v_{ip} + m_h \cdot v_{ih} = m_p \cdot v_{fp} - m_h \cdot v_{fh}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{0m/s} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{0m/s}$

$$0kg \cdot m/s = 75kg \cdot v_{fp} - 0,16kg \cdot 20m/s$$

$$v_{fp} = \frac{0,16kg \cdot 20m/s}{75kg}$$

$$v_{fp} = 0,04267 \text{ m/s}$$

Analizar el resultado.

Momento lineal

La ley de conservación del momento lineal se puede aplicar muy claramente en lo que en Física se conoce como choque o colisión.

Se usa el término ***choque*** para representar, en escala macroscópica, un evento en el que dos partículas interactúan y permanecen juntas durante un intervalo de tiempo muy pequeño, produciendo fuerzas impulsivas entre sí.

Se supone que la fuerza impulsiva es mucho más grande que cualquier otra fuerza externa. En escala atómica tiene poco sentido hablar del contacto físico; cuando las partículas se aproximan entre sí, se repelen con fuerzas electrostáticas muy intensas sin que lleguen a tener contacto físico.

Cuando dos o mas objetos chocan sin que actúen fuerzas externas, el momento lineal total del sistema se conserva.

La energía cinética en general no se conserva, ya que parte de esta se transforma en energía térmica y en energía potencial elástica interna de los cuerpos cuando se deforman durante el choque.

Choques o Colisiones

Momento lineal

Choques o Colisiones

De acuerdo a lo expuesto, existen diferentes procesos durante los choques, por lo que estos se pueden clasificar en tres tipos:

- a) Cuando dos o mas objetos chocan sin deformarse y sin producir calor, se llama ***choque elástico***. En este caso se conserva tanto el momento lineal como la energía cinética del sistema.
- b) Cuando los objetos que chocan se deforman y producen calor durante el choque, se llama ***choque inelástico***. En este caso se conserva el momento lineal, pero no la energía cinética del sistema.
- c) Un choque se dice ***perfectamente inelástico*** cuando los objetos se deforman, producen calor y permanecen unidos después del choque, por lo que sus velocidades finales son las mismas, y aún es válida la conservación del momento lineal.

Momento lineal

Coeficiente de restitución

El **coeficiente de restitución** (también llamado **cociente**) es una medida del grado de conservación de la energía cinética en un choque entre partículas.

El coeficiente tiene valores en el intervalo de números reales que van desde 0 a 1 es decir:

$$0 \leq C_R \leq 1$$

Su magnitud es una medida de la naturaleza de la colisión: si su valor es cero se supone un choque perfectamente inelástico, mientras que si es 1, es considerado un choque perfectamente elástico.

En la gran mayoría de los choques reales el coeficiente de restitución es inferior a la unidad, lo que supone en una mayor o menor medida una deformación inelástica de los cuerpos sometidos a colisión.

También podemos visualizar a dicho coeficiente como la amplitud de velocidades de acercamiento entre los cuerpos antes de la colisión, respecto a la amplitud de velocidades cuando los cuerpos se alejan después del choque.

Momento lineal

Coeficiente de restitución

El coeficiente de restitución es la razón entre la velocidad relativa de alejamiento y la velocidad relativa de acercamiento de las partículas. Se define coeficiente de restitución como:

$$C_R = - \frac{\textit{Velocidad relativa entre los objetos después de la colisión}}{\textit{Velocidad relativa entre los objetos antes de la colisión}}$$

Donde C_R es el coeficiente de restitución y tiene un valor entre 0 y 1.

$$C_R = - \frac{v_{f1} - v_{f2}}{v_{i1} - v_{i2}}$$

Donde:

v_{i1} : velocidad del objeto 1 antes de la colisión.

v_{i2} : velocidad del objeto 2 antes de la colisión.

v_{f1} : velocidad del objeto 1 después de la colisión.

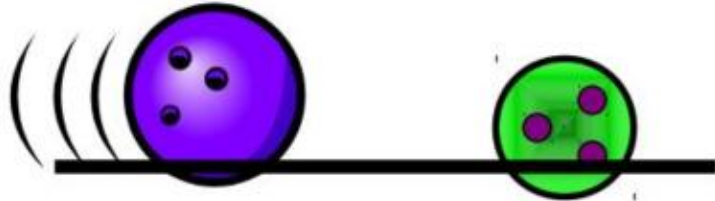
v_{f2} : velocidad del objeto 2 después de la colisión.

Momento lineal

Coeficiente de restitución

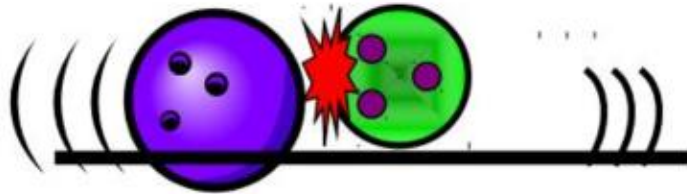
Ejemplo 6:

Una esfera de boliche de 1kg se mueve con una velocidad de 8m/s choca con otra de 0,5kg, que se mueve en la misma dirección pero con sentido contrario y con velocidad de 4m/s. Determinar la velocidad de cada una de las esferas después del choque si $C_R=2/3$.

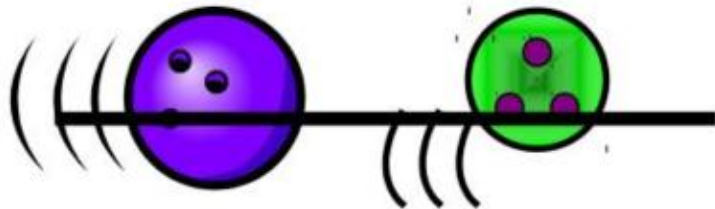


$$p_{\text{antes del choque}} = p_{\text{después del choque}}$$

$$p_{i1} + p_{i2} = p_{f1} + p_{f2}$$



$$m_1 v_{i1} - m_2 v_{i2} = -m_1 v_{f1} + m_2 v_{f2}$$



$$C_R = -\frac{v_{f1} - v_{f2}}{v_{i1} - v_{i2}}$$

Momento lineal

Choque en una dimensión

Ejemplo 7:

Dos partículas de masas m_1 y m_2 que se mueven en la misma línea de acción, con velocidades v_{i1} y v_{i2} , chocan en forma completamente inelástica. Después del choque ambas partículas se mueven juntas; determinar la velocidad final v_f del sistema.

Solución: Supongamos que inicialmente las partículas se mueven en el mismo sentido, y si en este caso lo consideramos hacia la derecha como se muestra en la figura, la velocidad inicial de m_1 debe ser mayor que la de m_2 , dando como resultado una velocidad final del conjunto hacia la derecha.

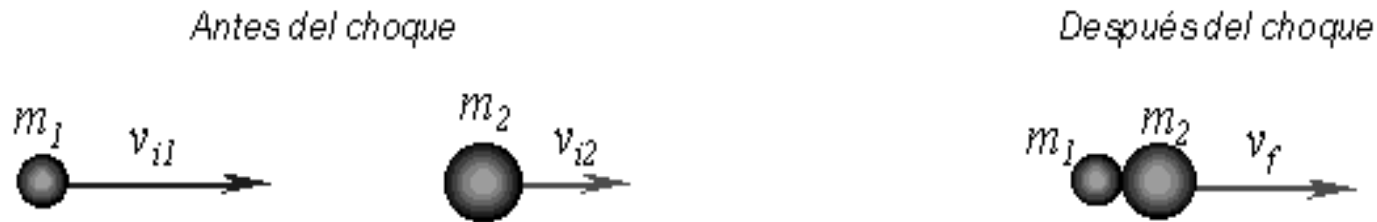


Choque completamente inelástico en una dimensión.

Momento lineal

Choque en una dimensión

En este choque completamente inelástico, el momento lineal del sistema se conserva, y como el movimiento es en una dimensión (por ejemplo, la dirección del eje x), entonces de la figura, se obtiene:



$$p_{\text{antes del choque}} = p_{\text{después del choque}}$$

$$p_i = p_f \Rightarrow p_{i1} + p_{i2} = p_{f1} + p_{f2}$$

$$m_1 v_{i1} + m_2 v_{i2} = (m_1 + m_2) v_f$$

$$v_f = \frac{m_1 v_{i1} + m_2 v_{i2}}{m_1 + m_2}$$

Momento lineal

Choque en una dimensión

Ejemplo 8:

Dos partículas de masas m_1 y m_2 que inicialmente se mueven en línea recta, en sentidos contrarios, con velocidades v_{i1} y v_{i2} , chocan frontalmente en forma elástica. Calcular la velocidad final v_f de cada una, después del choque.

Solución: Como no se conoce ni el valor numérico de las masas ni de las velocidades iniciales, no se puede saber a priori el sentido de las velocidades finales de las partículas, así que supongamos que después del choque se mueven en sentidos opuestos. Como el choque es elástico, se conserva tanto el momento lineal como la energía cinética, aplicando estos principios, y considerando que el choque es en una dirección, se obtiene:



Choque elástico en una dimensión.

Momento lineal

Choque en una dimensión

Conservación del momento lineal:

$$P_{\text{antes del choque}} = P_{\text{después del choque}}$$

$$p_{i1} + p_{i2} = p_{f1} + p_{f2}$$

$$m_1 v_{i1} - m_2 v_{i2} = -m_1 v_{f1} + m_2 v_{f2}$$

Conservación de la energía cinética:

$$E_C \text{ antes del choque} = E_C \text{ después del choque}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{i1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{i2}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{f1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{f2}^2$$

Momento lineal

Choque en una dimensión

Para resolver el sistema de dos ecuaciones, para las dos incógnitas v_{f1} y v_{f2} , en la ecuación de la energía cinética, se puede dividir por $\frac{1}{2}$, reagrupar los términos de m_1 y m_2 en cada miembro de la ecuación y escribirla como:

$$m_1(v_{i1}^2 - v_{f1}^2) = m_2(v_{f2}^2 - v_{i2}^2)$$

$$m_1(v_{i1} + v_{f1})(v_{i1} - v_{f1}) = m_2(v_{f2} + v_{i2})(v_{f2} - v_{i2})$$

Ahora se pueden separar los términos en m_1 y m_2 de la ecuación del momento lineal y escribirla de la siguiente forma:

$$m_1(v_{i1} + v_{f1}) = m_2(v_{f2} + v_{i2})$$

Momento lineal

Choque en una dimensión

Combinando estas dos últimas ecuaciones, se obtienen las expresiones para la rapidez final v_{f1} y v_{f2} de cada partícula:

$$v_{f1} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{i1} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{i2}$$

$$v_{f2} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{i1} + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{i2}$$

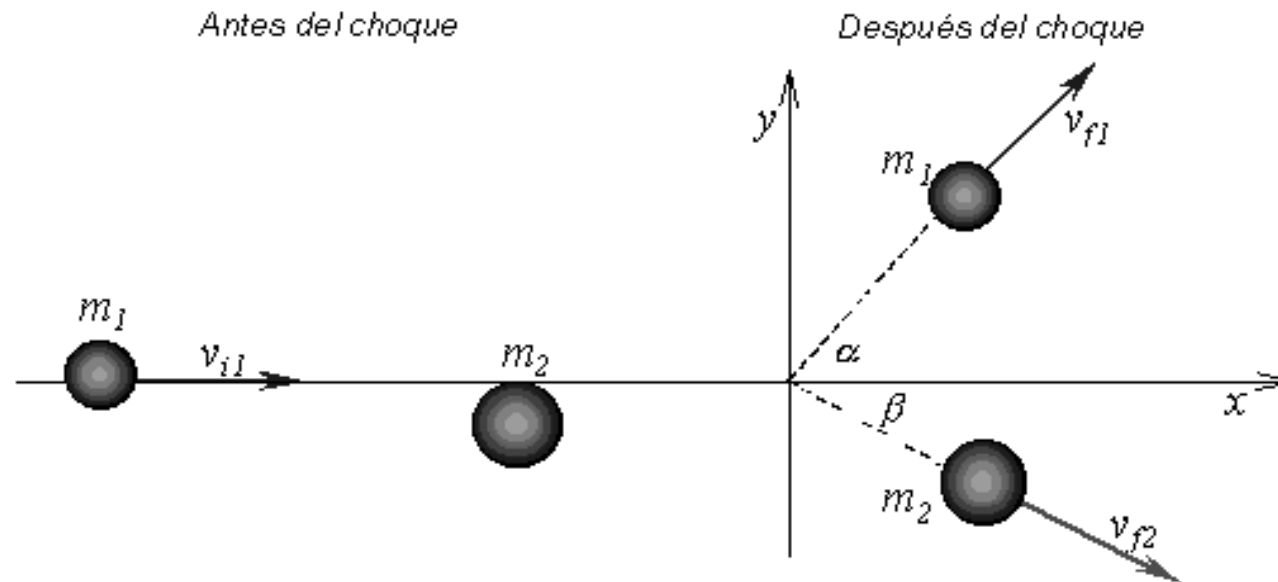
Los resultados anteriores no deben considerarse como generales, ya que fueron deducidas para este caso particular, con los sentidos de las velocidades iniciales dados, por lo tanto no se pueden aplicar como formulas para resolver cualquier problema.

Momento lineal

Choques en dos dimensiones

Si una partícula de masa m_1 que se mueve con una determinada velocidad inicial v_{i1} , choca de costado con otra de masa m_2 inicialmente en reposo (no tiene porque estar en reposo, pero en este caso, considerémosla en ese estado), el movimiento final será bidimensional, por lo que se considera un choque en dos dimensiones.

Después del choque, como se muestra en la figura, m_1 se mueve en un ángulo α sobre el eje x y m_2 en un ángulo β debajo del eje x.



Momento lineal

Choques en dos dimensiones

Por la ley de conservación del momento, desarrollada en sus componentes en cada dirección x e y :

$$\text{Eje } x: \quad p_{ix} = p_{fx} \Rightarrow m_1 v_{i1} + 0 = m_1 v_{f1} \cos \alpha + m_2 v_{f2} \cos \beta$$

$$\text{Eje } y: \quad p_{iy} = p_{fy} \Rightarrow 0 = m_1 v_{f1} \sin \alpha - m_2 v_{f2} \sin \beta$$

Si además el choque es elástico, por la conservación de la energía se tiene:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{i1}^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v_{f1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{f2}^2$$

Este es un sistema de tres ecuaciones, para resolverlo se deben dejar sólo tres incógnitas, por ejemplo v_{f1} , v_{f2} , y α .

Se deja como tarea resolver el sistema, además que en los problemas de final del capítulo se proponen varios donde se debe resolver este sistema.

Momento lineal

Choques en dos dimensiones

Ejemplo 9:

Una esfera de billar blanca que se mueve con una velocidad inicial de 3m/s choca de costado con otra roja, inicialmente detenida. Si después del choque la esfera blanca se mueve en 40° respecto a su dirección inicial, calcular las velocidades de salida de ambas esferas y el ángulo de desviación de la esfera roja.

Solución: suponiendo que el choque es elástico, se conserva la energía cinética del sistema y como la $v_{i2} = 0$, se tiene:

$$\frac{1}{2}m_1v_{i1}^2 + 0 = \frac{1}{2}m_1v_{f1}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{f2}^2$$

También se conserva el momento lineal, que escrito en forma vectorial es:

$$m_1\vec{v}_{i1} + 0 = m_1\vec{v}_{f1} + m_2\vec{v}_{f2}$$

Momento lineal

Choques en dos dimensiones

$$\text{Eje } x: \quad p_{ix} = p_{fx} \Rightarrow m_1 v_{i1} + 0 = m_1 v_{f1} \cos \alpha + m_2 v_{f2} \cos \beta$$

$$\text{Eje } y: \quad p_{iy} = p_{fy} \Rightarrow 0 = m_1 v_{f1} \sin \alpha - m_2 v_{f2} \sin \beta$$

Si además el choque es elástico, por la conservación de la energía se tiene:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{i1}^2 + 0 = \frac{1}{2} m_1 v_{f1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{f2}^2$$

Momento lineal

Centro de Masa

Hasta ahora analizamos las cualidades inerciales de cada partícula, una a la vez, es decir masas consideradas como puntuales cuyo movimiento pudimos describir.

Si consideramos ahora, un sistema de partículas de masas $m_1, m_2, \dots$ como un conjunto, podemos extender los análisis realizados hasta ahora a dicho sistema de partículas considerado como un grupo.

Para ello debemos conocer el concepto de *Centro de Masa*, el cual es un punto hipotético donde se considera concentrada la masa de todas las partículas que componen tal sistema.

Veremos que se puede determinar dicho centro de masa $(x_{CM}; y_{CM})$ y para localizarlo se procede hallando las coordenadas de dicho punto.

$$x_{CM} = \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3 + \dots + m_n \cdot x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}$$

Donde:

x_{CM} : coordenada de la posición del centro de masa según dirección del versor $\hat{i}$.

x : distancia entre la partícula y la dirección del versor $\hat{j}$ del sistema de coordenadas elegido en forma arbitraria.

Momento lineal

Lo mismo para la otra coordenada: y_{CM} :

$$y_{CM} = \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3 + \dots + m_n \cdot y_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}$$

Si queremos expresar la posición del centro de masas respecto al sistema de coordenadas elegido, será:

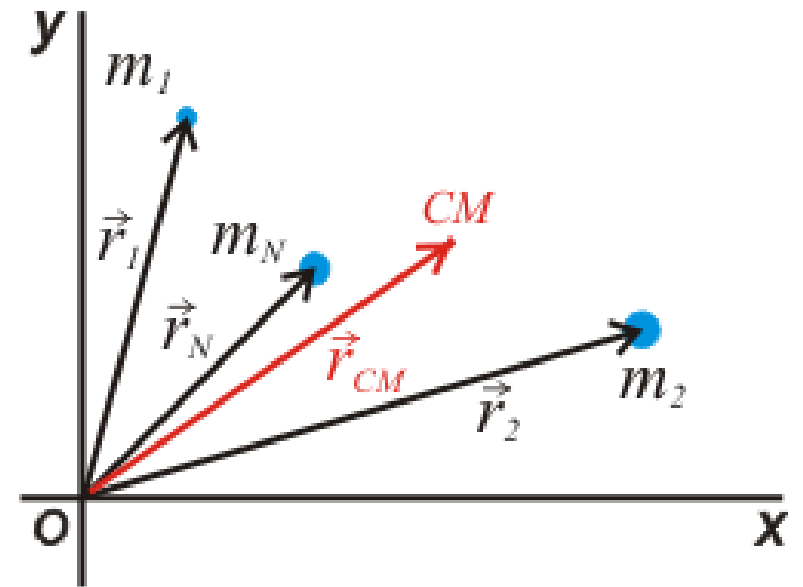
$$\vec{r}_{CM} = x_{CM} \vec{i} + y_{CM} \vec{j}$$

Posición del Centro de Masa

Donde:

y_{CM} : coordenada de la posición del centro de masa según dirección del vector $\vec{j}$.

y : distancia entre la partícula y la dirección del vector $\vec{i}$ del sistema de coordenadas elegido en forma arbitraria.



Momento lineal

Lo mismo para la otra coordenada: y_{CM} :

$$v_{CM} = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 + m_3 \cdot v_3 + \dots + m_n \cdot v_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}$$

Si queremos expresar la velocidad del centro de masas del sistema de partículas, será:

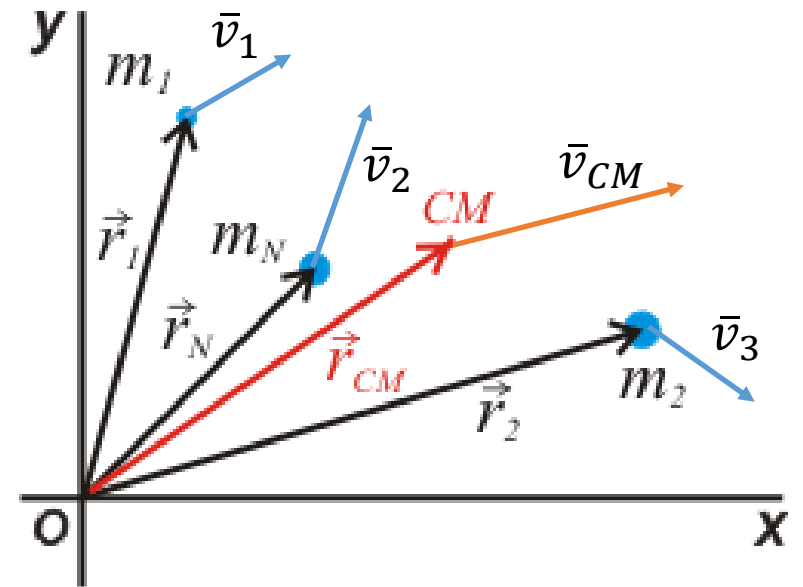
$$\vec{v}_{CM} = v_{CM} \vec{i} + v_{CM} \vec{j}$$

Velocidad del Centro de Masa

Donde:

v_{CM} : coordenada de la velocidad del centro de masa según dirección del versor correspondiente.

v : velocidad de la partícula en la dirección del versor correspondiente.



Momento lineal

Si consideramos dos objetos A y B y un observador en O , utilizando como sistema de referencia a los ejes XY , las velocidades de A y de B respecto a O son:

$$\bar{v}_A = \frac{d\bar{r}_A}{dt} ; \quad \bar{v}_B = \frac{d\bar{r}_B}{dt}$$

Las velocidades relativas de B respecto a A y de A respecto a B estarán definidas por:

$$\bar{v}_{BA} = \frac{d\bar{r}_{BA}}{dt} ; \quad \bar{v}_{AB} = \frac{d\bar{r}_{AB}}{dt}$$

Donde:

$$\bar{r}_{BA} = \overline{AB} = \bar{r}_B - \bar{r}_A$$

$$\bar{r}_{AB} = \overline{BA} = \bar{r}_A - \bar{r}_B$$

Velocidad relativa

