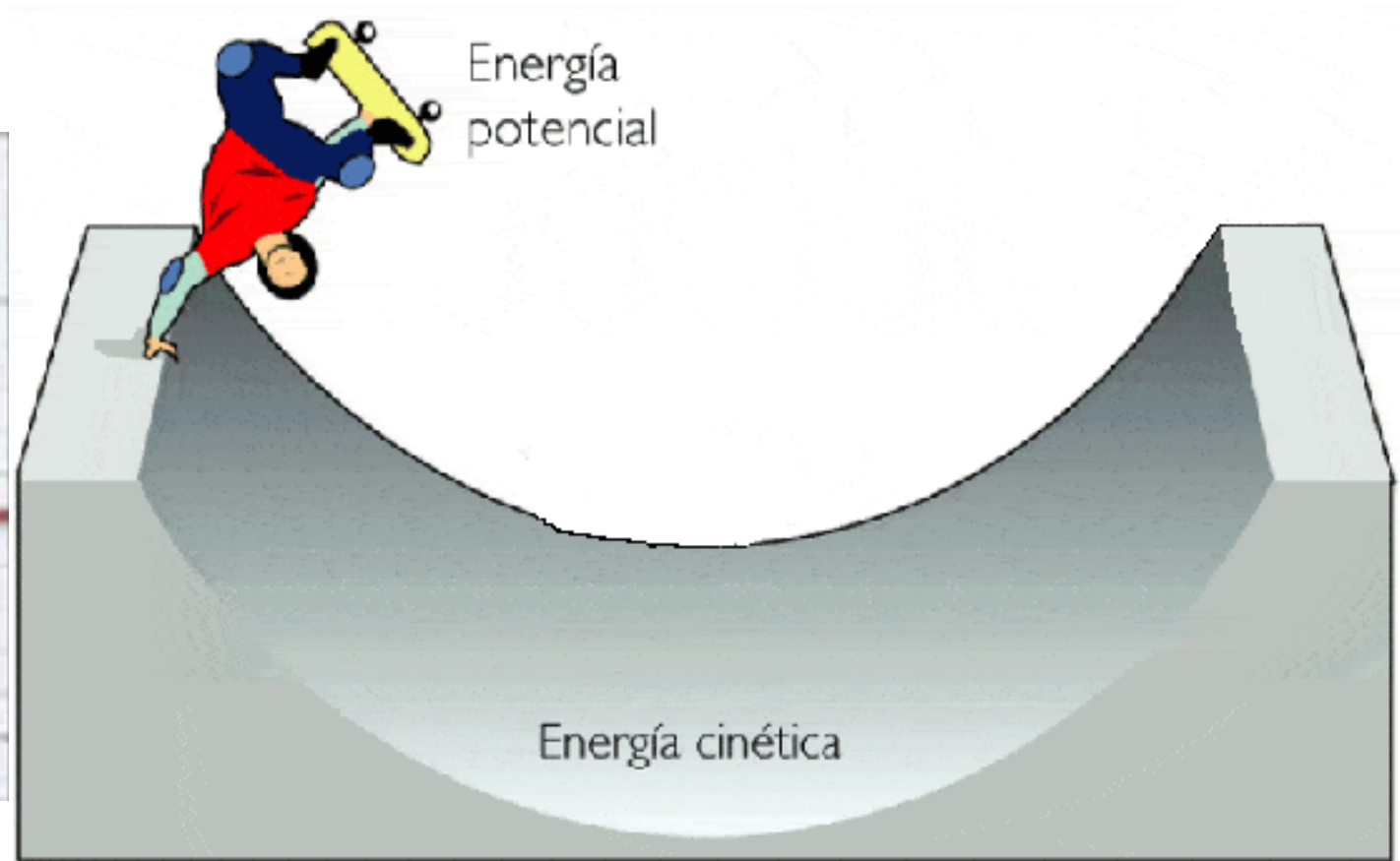


6.- TRABAJO, ENERGÍA Y POTENCIA



TRABAJO Y ENERGIA. INTRODUCCIÓN

El problema fundamental de la Mecánica es describir como se moverá un cuerpo de acuerdo a las causas que provocan dicho movimiento, como ser, fuerzas actuantes sobre él.

Si intentamos resolverlo sólo aplicando la segunda Ley de Newton, si la fuerza no es constante, la aceleración tampoco es constante, de este modo no es sencillo determinar la posición y la velocidad del cuerpo.

Los conocimientos sobre trabajo y energía también se fundamentan en las Leyes de Newton, por lo que no se requiere ningún principio físico nuevo.

Con el uso de estos dos conceptos físicos, se tiene un método alternativo para describir el movimiento y su causa, especialmente útil cuando la fuerza actuante no es constante.

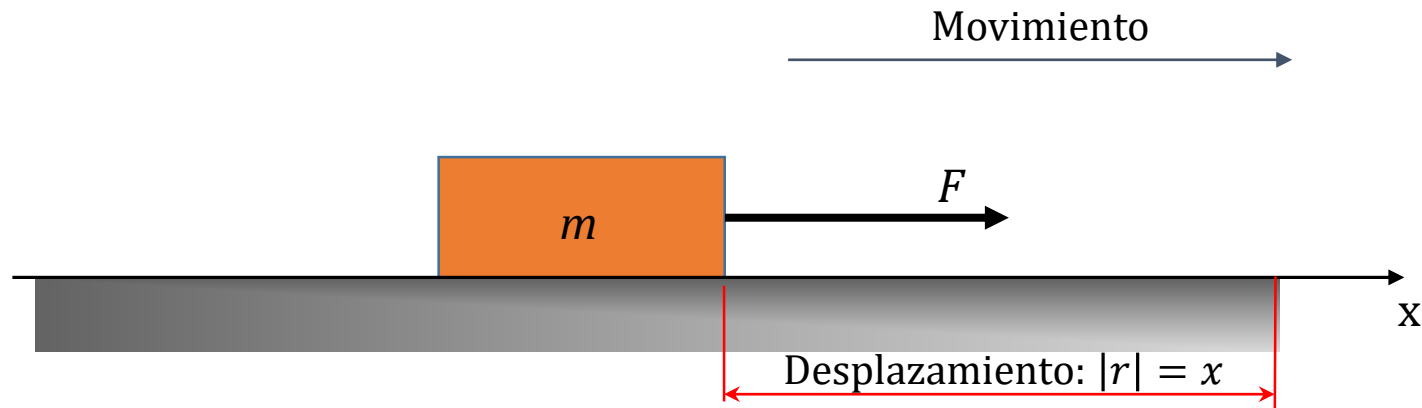
Podemos definir trabajo como toda acción aplicada a un cuerpo de masa m que tiende a provocar un cambio en la situación en cuanto a su movimiento.

TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

Si la fuerza F que actúa sobre una partícula de masa m es constante (en magnitud y dirección) el movimiento se realiza en línea recta en la dirección de la fuerza.

Si la partícula se desplaza una distancia x por efecto de la fuerza F , entonces se dice que la fuerza ha realizado trabajo W sobre la partícula de masa m , que en este caso particular se define como:

$$W = F \cdot x$$



TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

De estas conclusiones se deduce que el trabajo, para una fuerza constante, se puede expresar de la siguiente forma:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r}$$

El trabajo es una magnitud física escalar, obtenido del producto escalar de los vectores fuerza y desplazamiento.

De la expresión anterior, por la definición de producto escalar, queda claro que el trabajo puede ser positivo, negativo o cero.

Su unidad de medida en el SI es $N.m$ que se llama *Joule*, símbolo J .

Otras fuerzas actúan sobre el cuerpo de masa m (peso, roce, normal, etc.), por lo que la ecuación anterior se refiere sólo al trabajo de la fuerza F en particular; las otras fuerzas también pueden o no realizar trabajo.

Las fuerzas peso y normal no realizan trabajo en la partícula de la figura anterior, ya que son perpendiculares al desplazamiento y la fuerza de roce realiza trabajo negativo, ya que siempre se opone al desplazamiento.

TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

Producto Escalar:

Geométricamente, el producto escalar entre dos vectores representa el módulo de la proyección de uno de los vectores sobre el otro.

$$\bar{\mathbf{A}} \cdot \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\bar{\mathbf{A}}| \cdot |\bar{\mathbf{B}}| \cdot \cos\theta$$

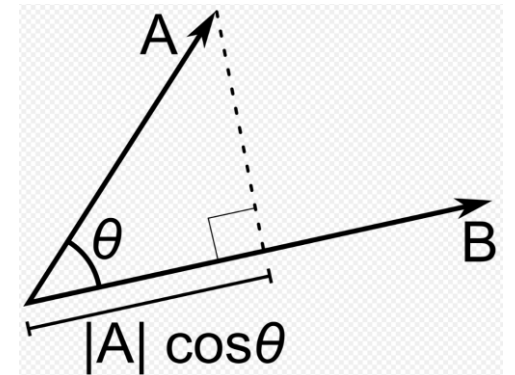
Analíticamente, sean los vectores $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, se expresan en función de sus componentes cartesianas rectangulares, en forma canónica serán:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$$

El producto escalar se realiza como un producto matricial de la siguiente forma:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_x & A_y & A_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$



TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

Ejemplo de Producto Escalar:

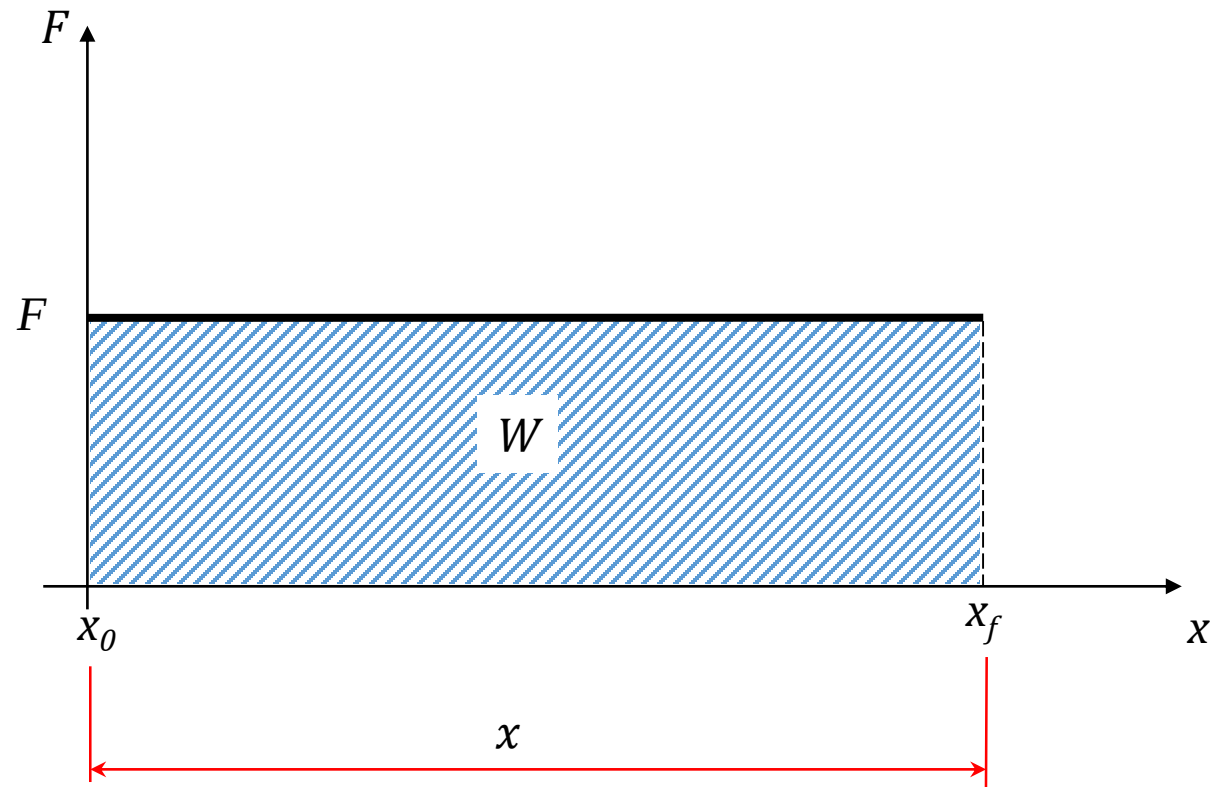
$$\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \overline{-1 \quad 1 \quad -3} \cdot \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 = 2$$

TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

También puede determinarse el trabajo de una fuerza constante como el área bajo la función de F versus x .



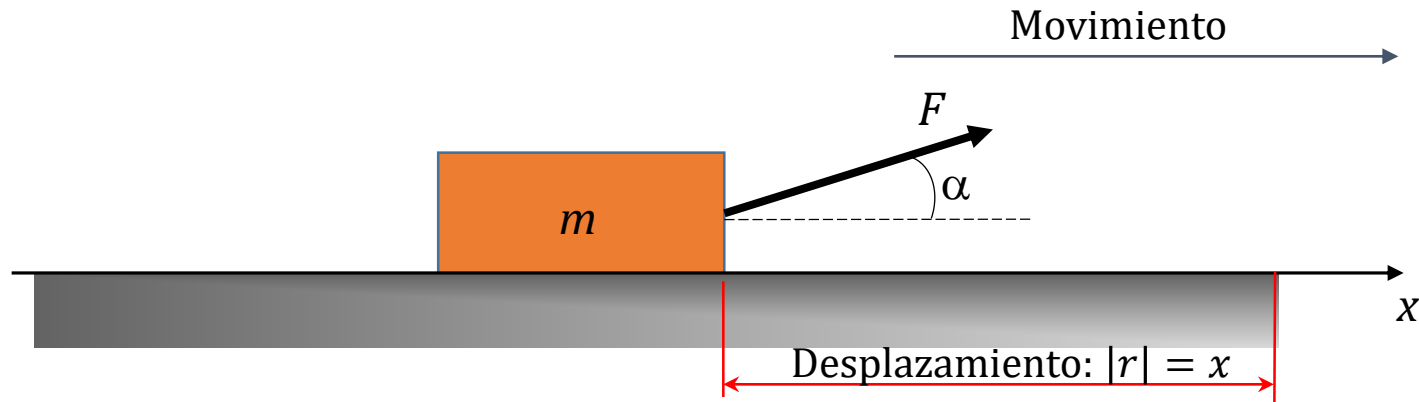
TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

Si la fuerza constante no actúa en la dirección del movimiento, el trabajo que se realiza es debido a la componente en x de la fuerza en la dirección paralela al movimiento, como se ve en la figura.

La componente y de la fuerza, perpendicular al desplazamiento, no realiza trabajo sobre el cuerpo.

Si α es el ángulo medido desde el desplazamiento x hacia la fuerza F , el valor del trabajo W es ahora:

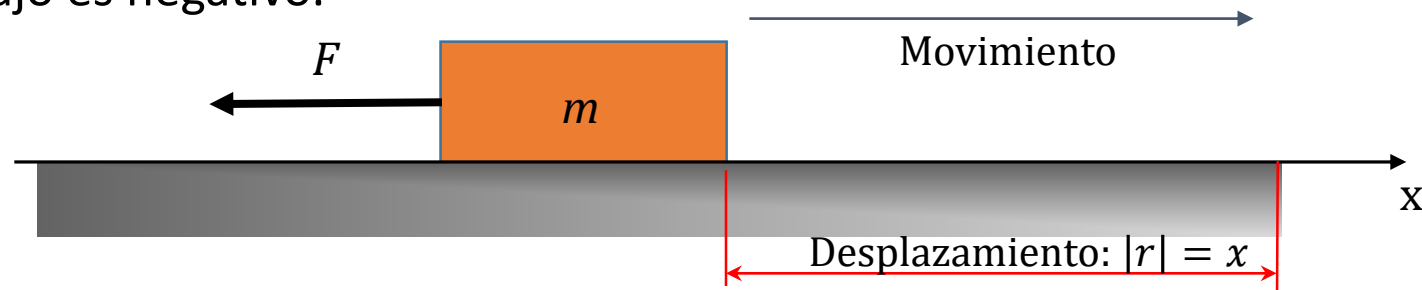
$$W = (F \cdot \cos\alpha) \cdot x$$



TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

De acuerdo a la ecuación anterior, se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- a) si $\alpha = 0^\circ$, es decir, si la fuerza, como vimos al inicio, o una componente de la fuerza, es de igual dirección y sentido al del desplazamiento, $W = (F \cdot \cos 0^\circ) \cdot x = F \cdot x$;
- b) si $\alpha = 90^\circ$, es decir, si la fuerza o una componente de la fuerza es perpendicular a la dirección del movimiento, $W = (F \cdot \cos 90^\circ) \cdot x = 0$, no se realiza trabajo;
- c) si la fuerza aplicada sobre el cuerpo no lo mueve, no realiza trabajo ya que el desplazamiento es cero;
- d) si $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$, es decir, si la fuerza tiene una componente en la misma dirección y sentido del desplazamiento, el trabajo es positivo;
- e) si $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$, es decir, si la fuerza tiene una componente en la misma dirección del desplazamiento y sentido contrario, el trabajo es negativo.



TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

Trabajo Neto (W_{neto})

En cualquier situación real, un cuerpo está sometido a un sistema de múltiples fuerzas simultáneas, tales como: interacciones con la Tierra, con superficies, cuerdas, fricción y/o fuerzas aplicadas.

Cada una de estas fuerzas realiza su propio trabajo (W_i) de manera independiente, según el ángulo que forme con la dirección y sentido del desplazamiento, tal como se analizó hace instantes.

Debido a este conjunto de fuerzas que actúan sobre el cuerpo durante su movimiento, podemos definir el Trabajo Neto (W_{neto}) como el trabajo total realizado sobre el cuerpo, y será el responsable directo de modificar su rapidez (acelerarlo o frenarlo).

Al ser magnitudes escalares, este concepto se cuantifica mediante la suma algebraica de los trabajos realizados por cada fuerza individual actuante sobre el cuerpo:

$$W_{neto} = \sum_{i=1}^n W_i = W_1 + W_2 + W_3 + \cdots + W_n$$

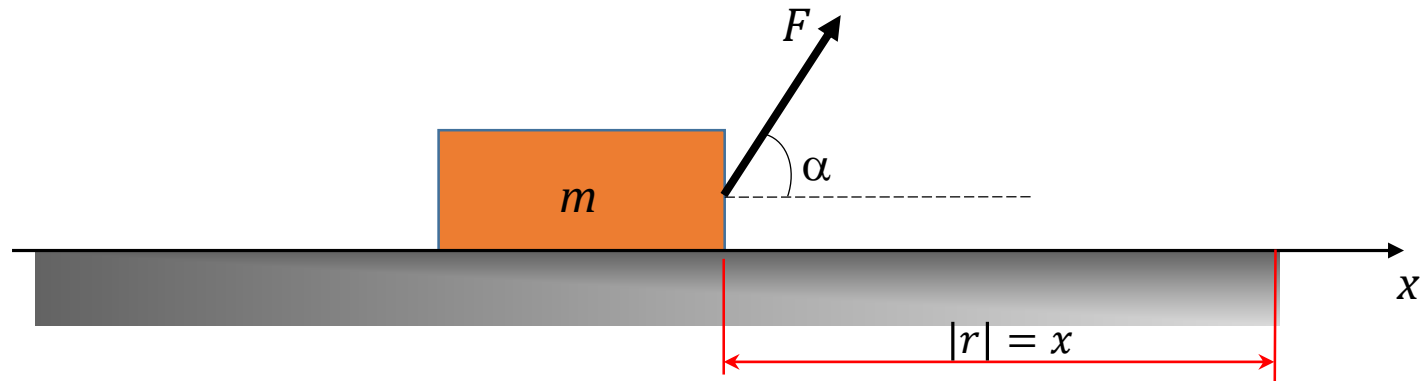
TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

A continuación se ejemplifica el trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan sobre una partícula de masa m .

Ejemplo 1:

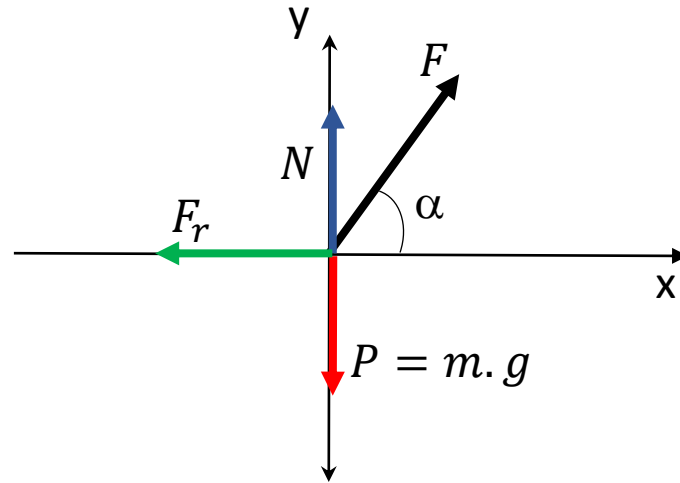
Con una fuerza de 250 N que forma un ángulo de 60° con la horizontal se estira una caja de 50 kg, en una superficie áspera horizontal. La caja se mueve una distancia de 5m con rapidez constante y puede considerarse como cuerpo puntual. Calcular: a) el trabajo realizado por cada fuerza, b) el coeficiente de roce.

Solución: Las fuerzas que actúan sobre la caja son F , normal, roce y peso, el diagrama de cuerpo libre se muestra en base a la siguiente figura:

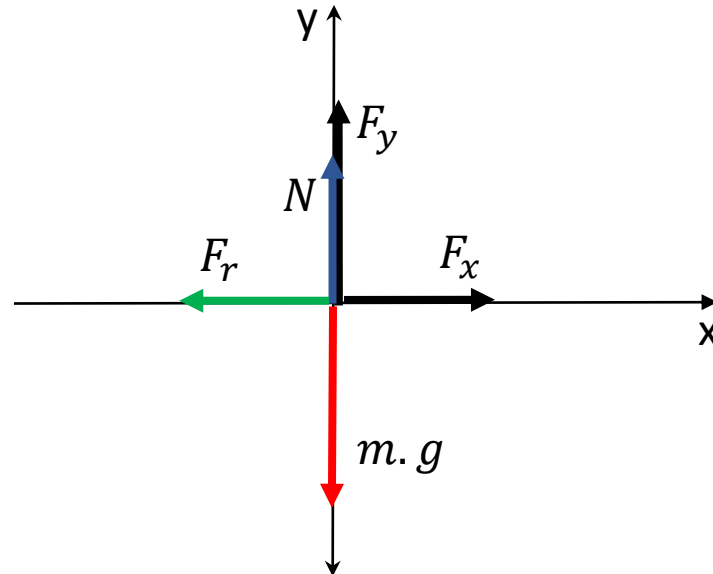


TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

D.C.L.



Descomponiendo fuerzas:



$$F_x = F \cdot \cos \alpha$$

$$F_y = F \cdot \sin \alpha$$

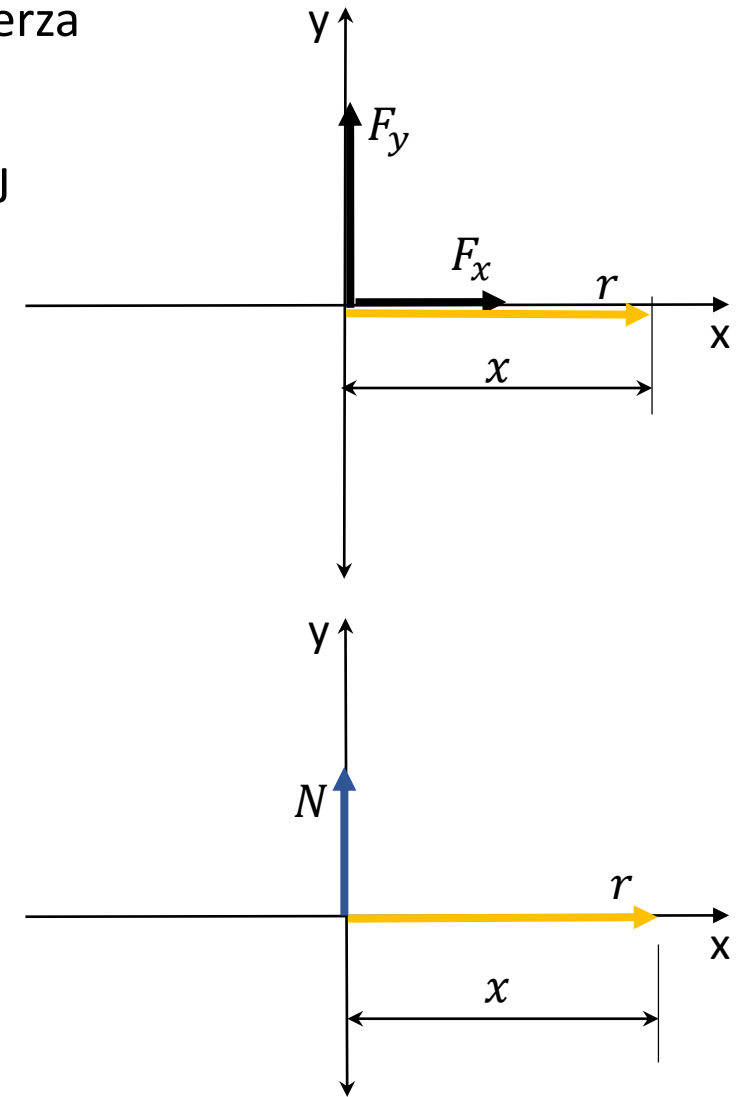
TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

a) La definición de trabajo es; $W = \vec{F} \cdot \vec{r}$, que se aplica a cada fuerza

Para F_x : $W_{F_x} = (F \cdot \cos\alpha) \cdot x = 250\text{N} \cdot (\cos 60^\circ) \cdot 5\text{m} \cdot \cos 0^\circ = 625 \text{ J}$

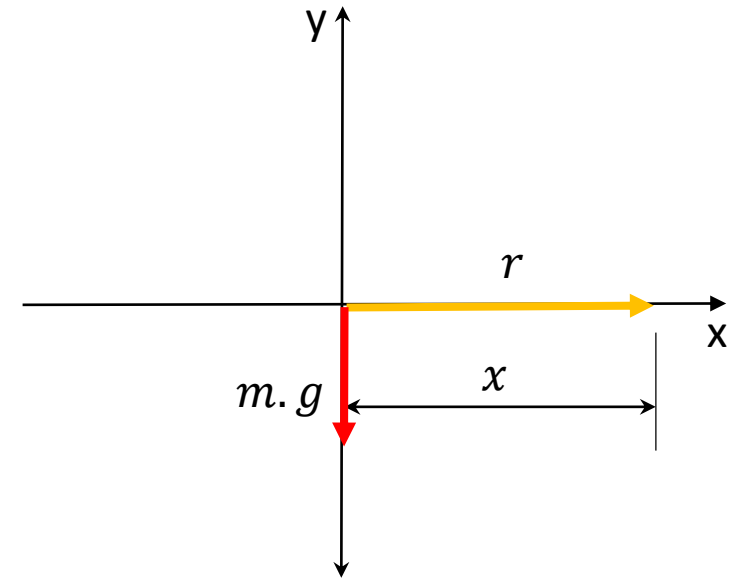
Para F_y : $W_{F_y} = (F \cdot \cos\alpha) \cdot x = 250\text{N} \cdot (\cos 60^\circ) \cdot 5\text{m} \cdot \cos 90^\circ = 0 \text{ J}$

Para N : $W_N = (N \cdot \cos 90^\circ) \cdot x = N \cdot 0 \cdot x = 0 \text{ J}$

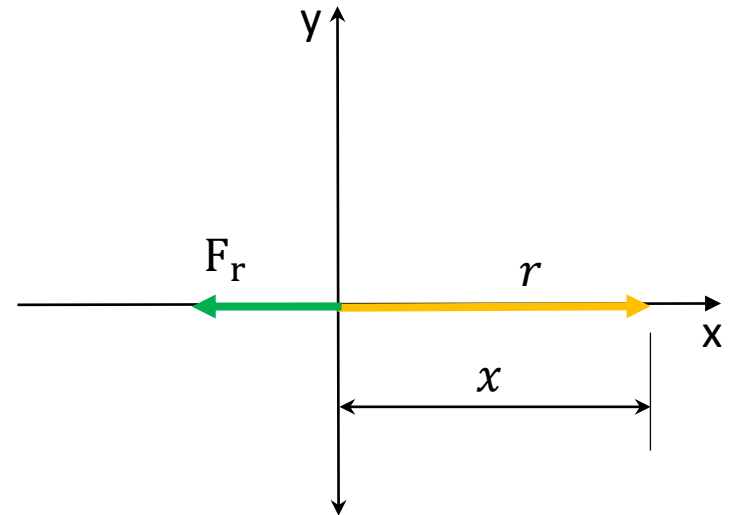


TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

Para $P = m \cdot g$: $W_P = (m \cdot g \cdot \cos 270^\circ) \cdot x = m \cdot g \cdot 0 \cdot x = 0 \text{ J}$



Para F_r : $W_r = (F_r \cdot \cos 180^\circ) \cdot x = F_r \cdot (-1) \cdot 5$



TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

Ahora, como el trabajo neto es la suma de todos los trabajos realizados por cada una de las fuerzas, es:

$$W_{\text{neto}} = W_{Fx} + W_{Fy} + W_N + W_P + W_r$$

$$W_{\text{neto}} = 625J + 0J + 0J + 0J + W_r = 625J + W_r$$

Como la velocidad es constante, no hay aceleración y el trabajo neto es nulo.

$$625J + W_r = 0$$

$$W_r = -625J$$

Entonces, el trabajo de fricción es:

$$W_r = (F_r \cdot \cos 180^\circ) \cdot x = -625J$$

$$F_r \cdot (-1) \cdot 5 = -625J$$

$$F_r = 125 \text{ N}$$

TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA CONSTANTE

b) Por definición, $F_r = \mu \cdot N$, y de la ecuación de sumatoria de fuerzas según dirección vertical, es:

$$\uparrow \oplus \sum F_y = 0 \rightarrow F \cdot \text{sen}\alpha + N - m \cdot g = 0$$

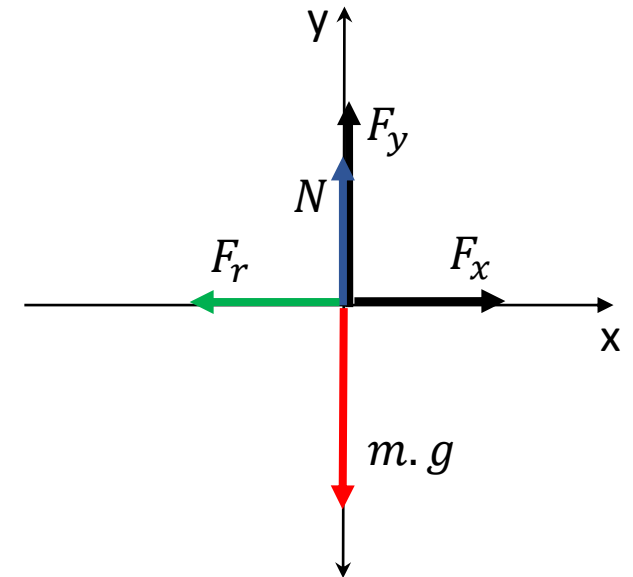
$$N = m \cdot g - F \cdot \text{sen}\alpha$$

Entonces:

$$F_r = \mu \cdot (m \cdot g - F \cdot \text{sen}\alpha)$$

$$\mu = \frac{F_r}{m \cdot g - F \cdot \text{sen}\alpha} = \frac{125\text{N}}{500\text{N} - 250\text{N} \cdot \text{sen}60^\circ}$$

$$\mu = 0,44$$



DEFINICIÓN DE ENERGÍA A PARTIR DE TRABAJO MECÁNICO

Cuando se realiza trabajo para poner en movimiento acelerado un cuerpo de masa m , se observa que al suprimir la fuerza que lo impulsaba, el cuerpo continúa en movimiento durante cierto tiempo (siempre que las fuerzas de oposición no sean muy elevadas).

Este movimiento persiste debido a que el trabajo neto realizado se manifiesta ahora como una capacidad del cuerpo en movimiento, la cual llamaremos *energía*, que en este caso particular es energía debido al movimiento, y la llamaremos *energía cinética*.

Esta energía cinética existirá mientras dure el movimiento. Asimismo, puede transformarse en otros tipos de energía a través del trabajo. Por ejemplo: la energía cinética de un cuerpo en movimiento que va frenando, se transfiere al entorno en forma de energía térmica mediante el trabajo realizado por la fuerza de roce.

En consecuencia, el trabajo es el mecanismo mecánico que permite variar la energía de un cuerpo, ya sea transfiriéndola, disipándola en el entorno o transformándola de una forma a otra.

El concepto de energía invade toda la ciencia y es una de las ideas unificadoras de la física.

DEFINICIÓN DE ENERGÍA A PARTIR DE TRABAJO MECÁNICO

Cuando existe trabajo realizado por las fuerzas de fricción, se observa que en la interfaz de los cuerpos en contacto se produce un aumento de temperatura.

Esto se debe a que el trabajo mecánico disipativo también se transforma en energía térmica (o interna) de los cuerpos, es decir, el movimiento macroscópico del cuerpo se transforma en movimiento microscópico (vibración) de sus átomos.

A partir de esto, el concepto de energía se puede entender como una cantidad escalar que se conserva, pero que cambia constantemente de modalidad (de mecánica a térmica, química, etc.) cada vez que los cuerpos interactúan entre sí.

Existen distintas manifestaciones de energía conocidas como: cinética, potencial gravitatoria, potencial elástica, térmica, química, electromagnética, nuclear, entre otras.

De esta forma, la energía se consolida como el principio unificador de la física, permitiendo estudiar con una misma herramienta tanto el movimiento de un cuerpo, como el calor disipado, las reacciones químicas o los fenómenos eléctricos.

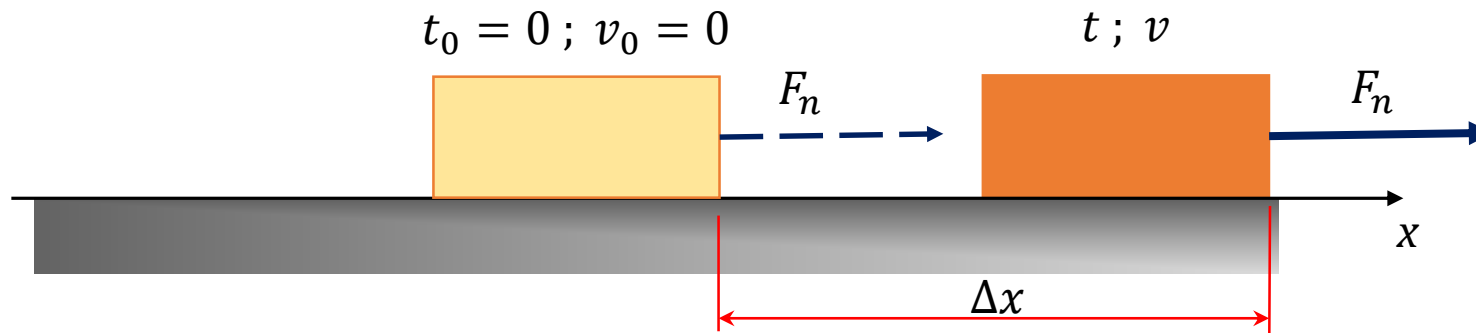
TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA CINÉTICA

Una vez comprendido que el trabajo es el motor de transformación entre diferentes tipos de energía, estudiaremos cuantitativamente nuestro primer caso concreto: la conversión de trabajo mecánico en energía de movimiento.

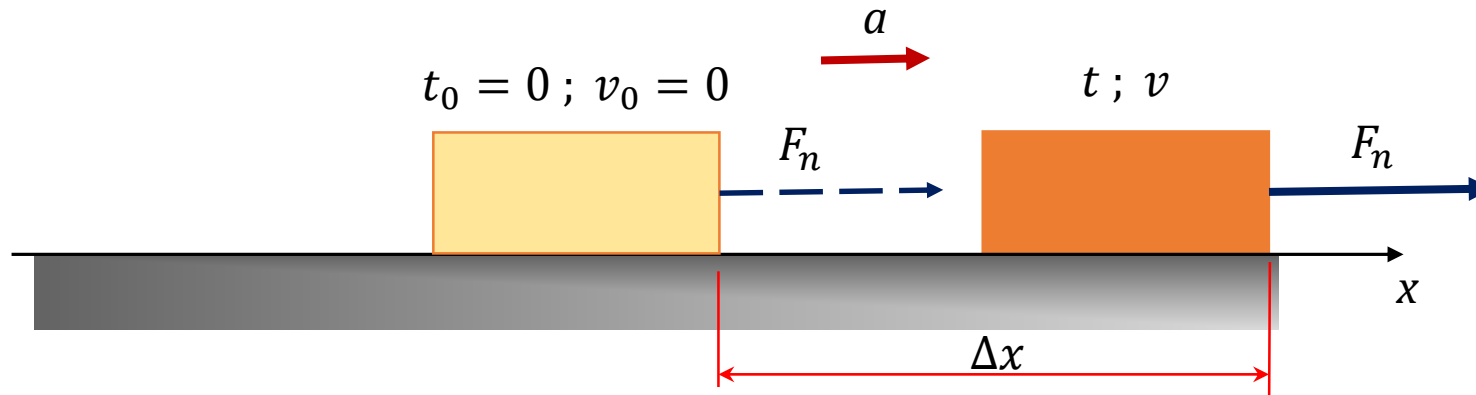
Podemos profundizar el concepto de trabajo si lo interpretamos como un medio para transferir energía a un sistema.

Uno de los posibles resultados de realizar trabajo sobre un sistema es la modificación de su rapidez, situación que nos permitirá definir el primer tipo de energía que estudiaremos, llamado Energía Cinética (K).

Consideremos un sistema formado por un cuerpo de masa m que se mueve en la dirección y sentido indicados en la figura, incrementando su rapidez debido a la acción de una fuerza neta constante $F_n = \Sigma F$.



TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA CINÉTICA



De la Segunda ley de Newton sabemos que el bloque se moverá con cierta aceleración a . Si el bloque se mueve con un desplazamiento Δx , el *trabajo realizado por la fuerza neta*, será:

$$W_n = F_n \cdot \Delta x$$

(A)

Del análisis dinámico de una partícula de masa m con aceleración constante a , es:

$$F_n = m \cdot a$$

(B)

Entonces, reemplazando (B) en (A) es:

$$W_n = m \cdot a \cdot \Delta x$$

TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA CINÉTICA

Por otro lado, para el análisis cinemático de una partícula que se desplaza con aceleración constante, se utilizan las ecuaciones siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x = v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 \\ \Delta v = a \cdot \Delta t \end{array} \right. \longrightarrow \text{Despejo } \Delta t \text{ y lo reemplazo en la ecuación anterior.}$$

$$\Delta x = v_0 \cdot \frac{\Delta v}{a} + \frac{1}{2} \cdot \cancel{a} \cdot \frac{\Delta v^2}{\cancel{a^2}}$$

Multiplicamos ambos miembros por $2 \cdot a$ y nos queda:

$$2 \cdot a \cdot \Delta x = 2 \cdot v_0 \cdot (v - v_0) + (v - v_0)^2$$

$$2 \cdot a \cdot \Delta x = \cancel{2 \cdot v_0} \cdot v - 2 \cdot v_0^2 + v^2 - \cancel{2 \cdot v_0} \cdot v + v_0^2$$

$$2 \cdot a \cdot \Delta x = v^2 - v_0^2$$

Entonces nos queda:

$$\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot a} \quad \text{C}$$

TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA CINÉTICA

Reemplazamos (C) en (A) y queda:

$$W_n = m \cdot \cancel{a} \cdot \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot \cancel{a}}$$

$$W_n = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$$

La cantidad $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$, representa la energía asociada al movimiento de una partícula y se la ha denominado “energía cinética”.

$$W_n = \text{Energía cinética final} - \text{Energía cinética inicial}$$

$$W_n = K - K_0 = \Delta K$$

Entonces, el trabajo neto W_n realizado por una fuerza neta sobre una partícula de masa m , desplazándola una distancia Δx con aceleración a , es igual al cambio de energía cinética ΔK que experimenta dicha partícula; enunciado que se conoce como el **Teorema del Trabajo y la Energía Cinética**.

TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA CINÉTICA

El Teorema del Trabajo y la Energía Cinética no tiene ninguna restricción respecto a si la aceleración es constante o variable; además puede generalizarse a cuerpos y a movimientos en dos o tres dimensiones.

En general, la energía cinética K de una partícula de masa m que se mueve con rapidez v , se define como:

$$K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Cuando la rapidez es constante, no hay variación de energía cinética y el trabajo de la fuerza neta es cero; esto significa que la energía no se acumula ($\Delta K = 0$), pues el trabajo de otra fuerza que se opone a la aplicada, está retirando o transformando esa misma cantidad de energía exactamente al mismo ritmo.

La energía cinética es una cantidad escalar y tiene las mismas unidades que el trabajo. La unidad de medida de la energía cinética en nuestro sistema de unidades es el Joule, [J].

TRABAJO Y ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

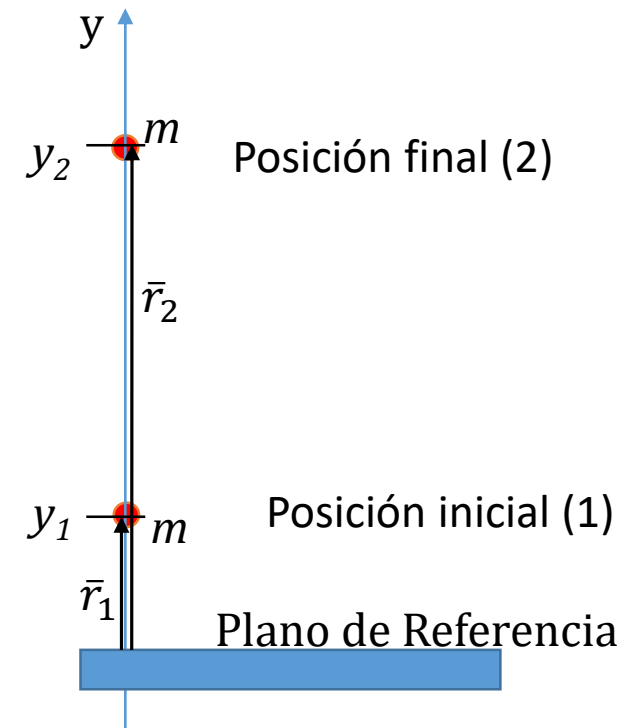
Otro caso de trabajo de fuerza constante es el trabajo de la fuerza de atracción gravitatoria (el peso), el cual depende solo de las coordenadas, por lo que se puede asociar con una variación de energía en función de la posición, de manera similar al caso de la energía cinética (que depende de la velocidad).

Las fuerzas que dependen de la posición (como el peso), permiten definir una "energía de posición".

Así, la energía potencial gravitatoria (U_g) es aquella que posee un cuerpo en virtud de su altura respecto a un plano de referencia.

Sea una partícula de masa m que se encuentra a una altura inicial y_1 ; denominamos energía potencial inicial (U_{g1}) a la energía acumulada en esa posición.

Del mismo modo, la energía potencial final (U_{g2}) será la acumulada a una altura y_2 .



TRABAJO Y ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

Dicha energía “acumulada” puede explicarse si consideramos el trabajo realizado sobre la partícula de masa m para llevarla con rapidez constante, desde el plano de referencia hasta su posición 2, será:

$$W_2 = \vec{F} \cdot \vec{r}_2$$

$$W_2 = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}_2| \cdot \cos 0^\circ$$

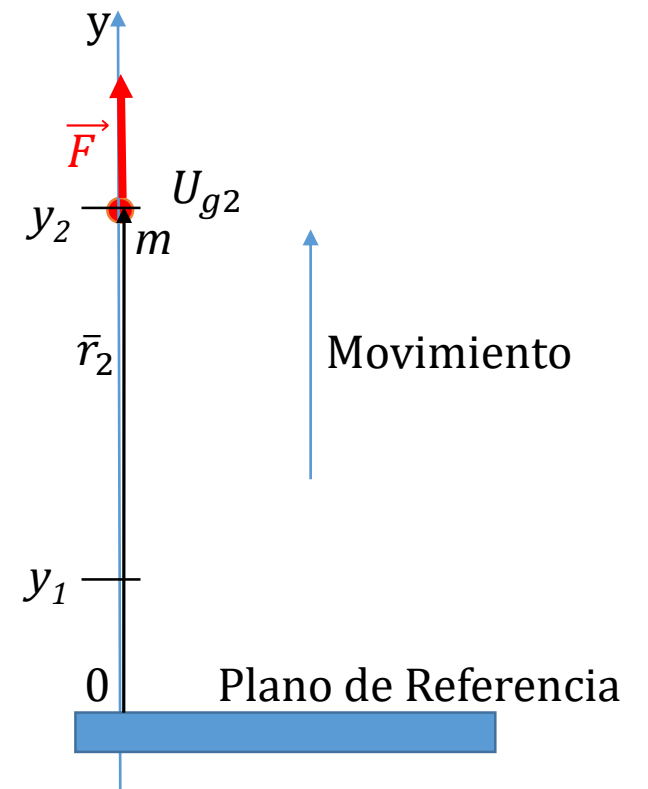
Como el módulo de la fuerza realizada es igual al del peso, el trabajo es:

$$W_2 = m \cdot g \cdot y_2$$

Como ya dijimos, éste trabajo se transforma en energía potencial gravitatoria acumulada en la partícula respecto al plano de referencia.

Por lo tanto, la energía potencial gravitatoria U_{g2} es:

$$U_{g2} = W_2 = m \cdot g \cdot y_2$$



TRABAJO Y ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

Del mismo modo, la energía potencial gravitatoria en 1 (U_{g1}), será:

$$U_{g1} = W_1 = m \cdot g \cdot y_1$$

Si evaluamos el cambio de energía potencial gravitatoria entre 1 y 2, tendremos:

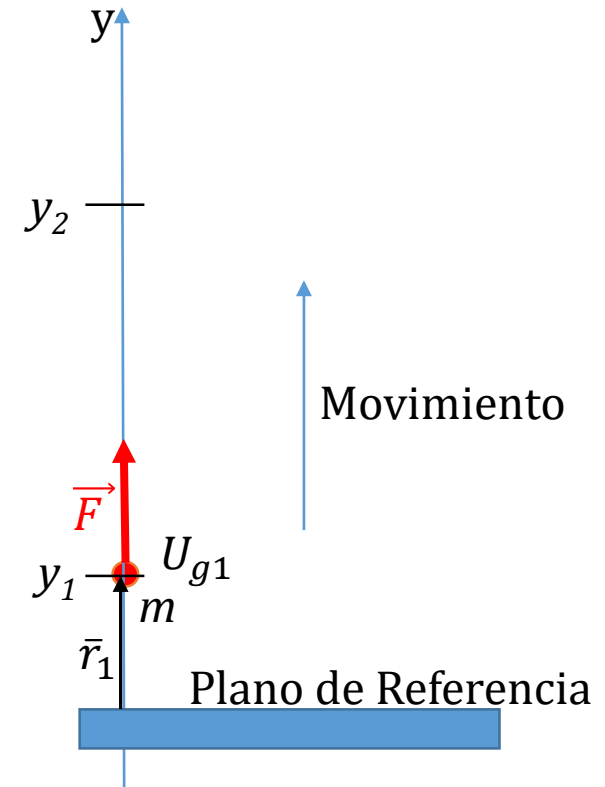
$$\Delta U_g = U_{g2} - U_{g1}$$

Luego, reemplazando es:

$$\Delta U_g = m \cdot g \cdot y_2 - m \cdot g \cdot y_1$$

Entonces, el cambio de energía potencial gravitatoria entre las posiciones 1 y 2 es:

$$\Delta U_g = m \cdot g \cdot (y_2 - y_1)$$



TRABAJO Y ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

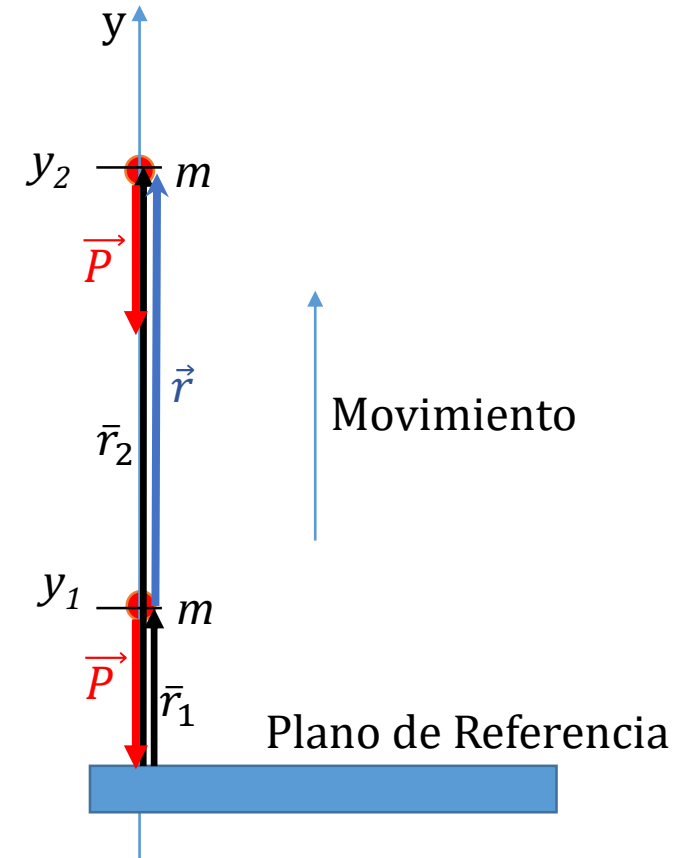
Si consideramos el trabajo realizado por la fuerza peso entre dos posiciones de y_1 hacia y_2 , es:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$W_g = \vec{P} \cdot \vec{r} = |\vec{P}| \cdot |\vec{r}| \cdot \cos 180^\circ$$

$$W_g = -m \cdot g \cdot (y_2 - y_1)$$

El trabajo realizado por el peso sobre la partícula de masa m será negativo, pues el sentido de la fuerza peso es opuesto al del desplazamiento.



TRABAJO Y ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

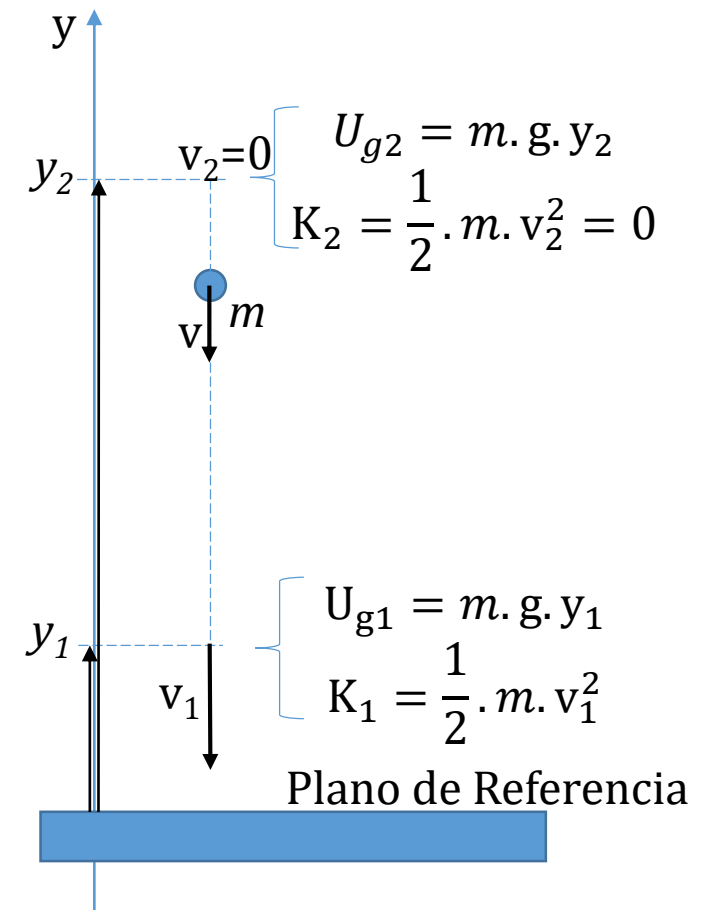
Ejemplo 2:

Transformación energética de una partícula de masa m que cae desde una posición y_2 hasta la posición y_1 respecto a un plano de referencia.

Una vez que la partícula se deja caer, la energía potencial gravitatoria acumulada comienza a transformarse con el movimiento aumentando su velocidad, o sea, aumentando su energía cinética a medida que la partícula baja.

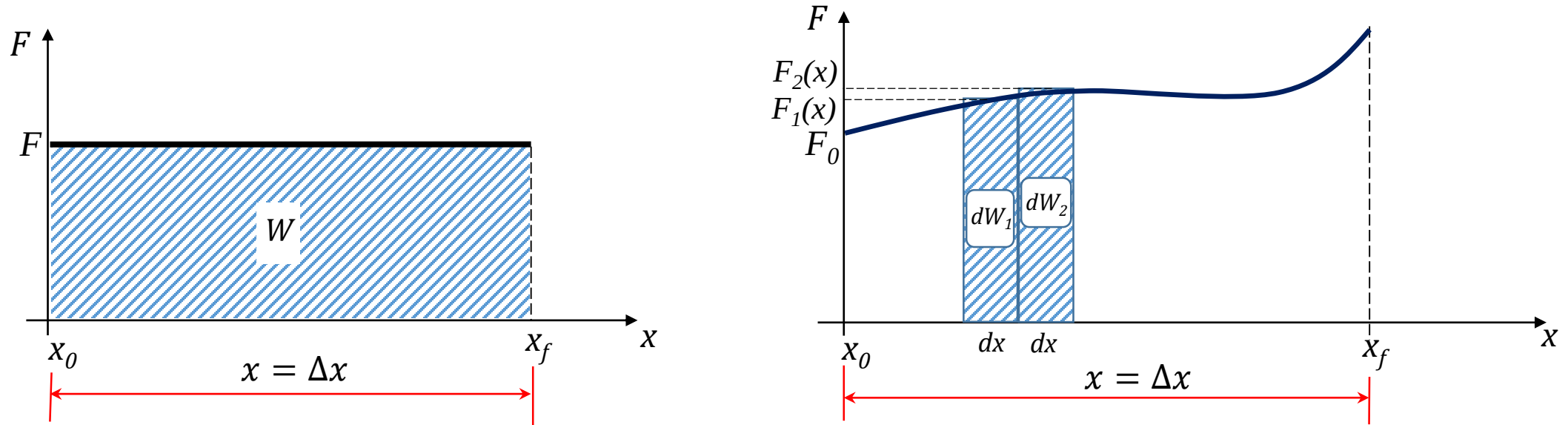
Esa energía cinética aumentará de acuerdo a la disminución de la energía potencial, la cual disminuirá a medida que su posición lo hace respecto del plano de referencia.

$$\Delta K = -\Delta U_g$$



TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE

Ahora consideremos un cuerpo en movimiento debido a la acción de una fuerza variable respecto a la posición $F(x)$, donde dicho cuerpo se desplaza a lo largo del eje x desde una posición inicial (x_0) a otra final (x_f). En esta situación, tendremos una aceleración variable.



En general, el trabajo de cualquier fuerza se determina gráficamente como el área bajo la curva en un diagrama de F versus x .

Mientras que para una fuerza constante el cálculo es el área de un rectángulo ($W=F\Delta x$); cuando la fuerza varía con la posición debemos dividir el desplazamiento total en intervalos infinitesimales dx , donde el trabajo elemental de cada franja será: $dW_i = F_i(x).dx$.

TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE

Para aplicar conceptualmente el cálculo del área bajo la curva en forma geométrica, analizaremos un sistema físico simple donde la fuerza varía de forma lineal con la posición: el caso de la fuerza F requerida para estirar o comprimir un resorte.

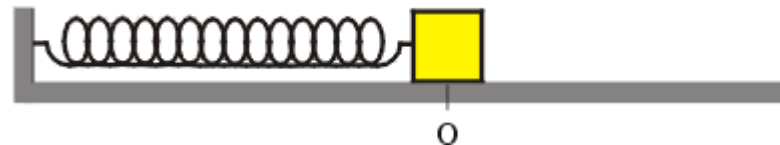
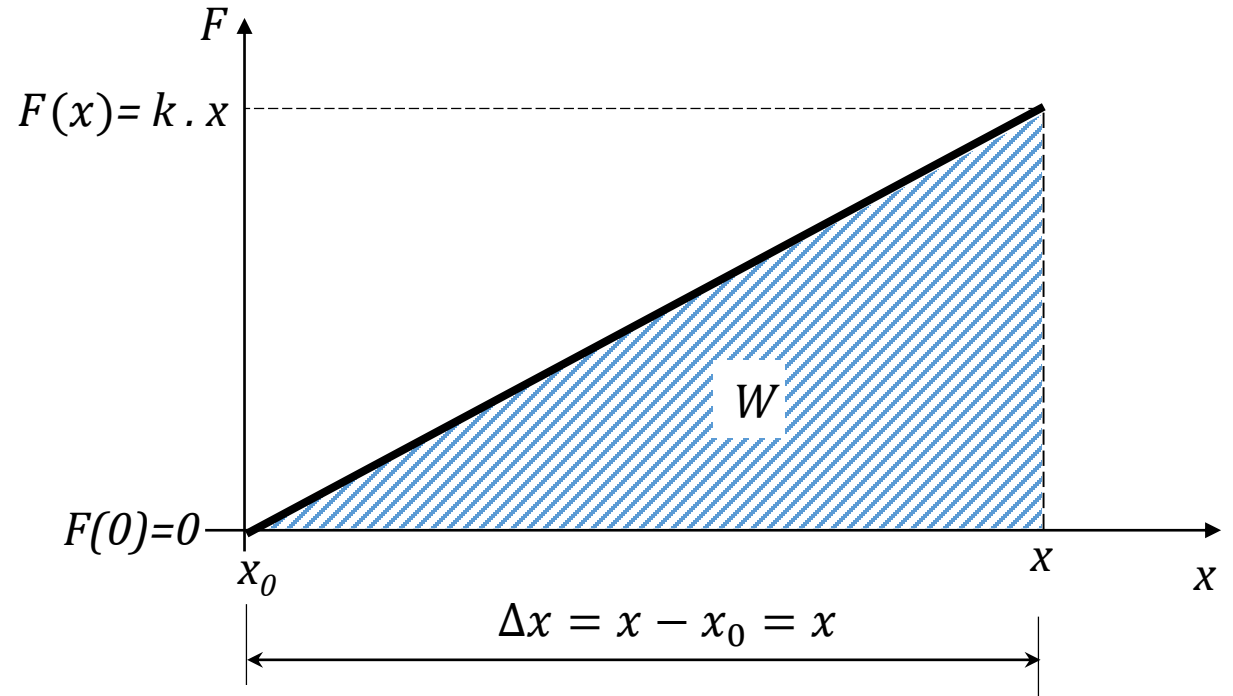
En este caso, la variación de la fuerza respecto a la elongación es directamente proporcional:

$$F \sim x \rightarrow F(x) = k \cdot x$$

La fuerza aplicada es cero en la posición de equilibrio ($x_0 = 0$) y aumenta linealmente con la deformación, según la constante de rigidez del resorte (k).

El trabajo realizado para deformar un resorte con rapidez constante mediante una fuerza $F(x)$ una longitud $\Delta x = x$, se determina hallando el área del triángulo bajo la función lineal:

$$W = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$



TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE

Para determinar en forma genérica el trabajo realizado contra un resorte, suponiendo que la posición inicial (x_0) corresponde a una precarga, es:

$$W = \text{Área rectángulo} + \text{Área triángulo}$$

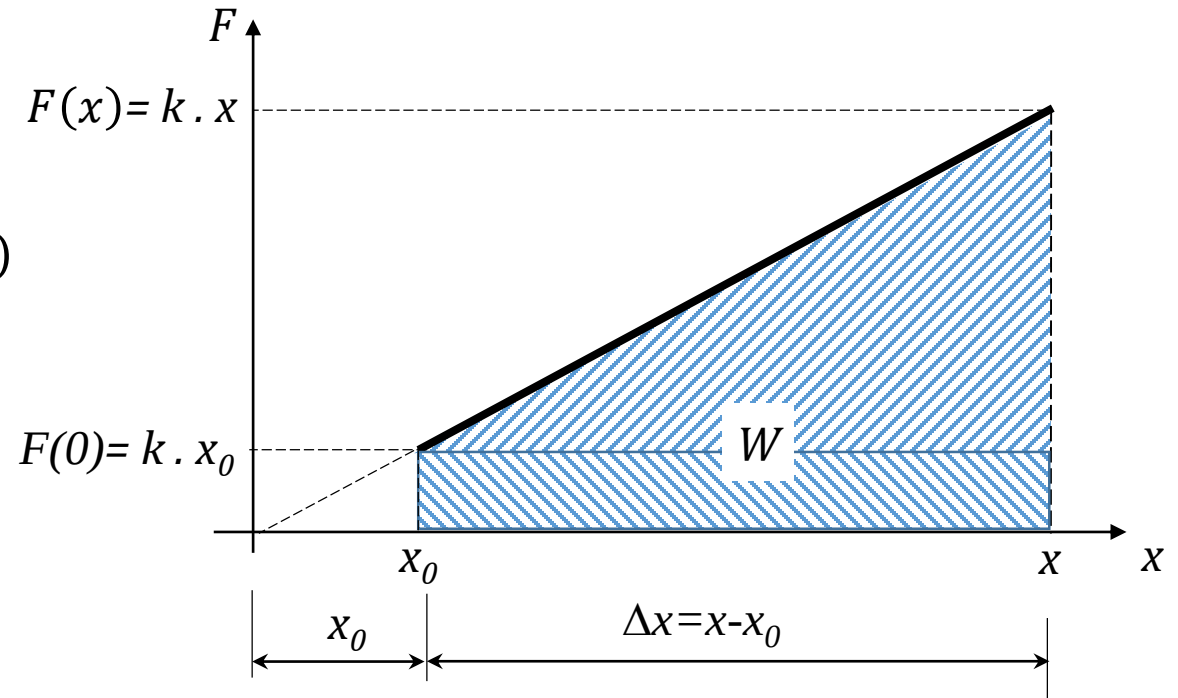
$$W = (x - x_0) \cdot k \cdot x_0 + \frac{1}{2} \cdot (x - x_0) \cdot (k \cdot x - k \cdot x_0)$$

$$W = k \cdot x_0 \cdot x - k \cdot x_0^2 + \frac{1}{2} \cdot (k \cdot x^2 - 2 \cdot k \cdot x_0 \cdot x + k \cdot x_0^2)$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^2$$

Finalmente queda:

$$W = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x^2 - x_0^2)$$



TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE

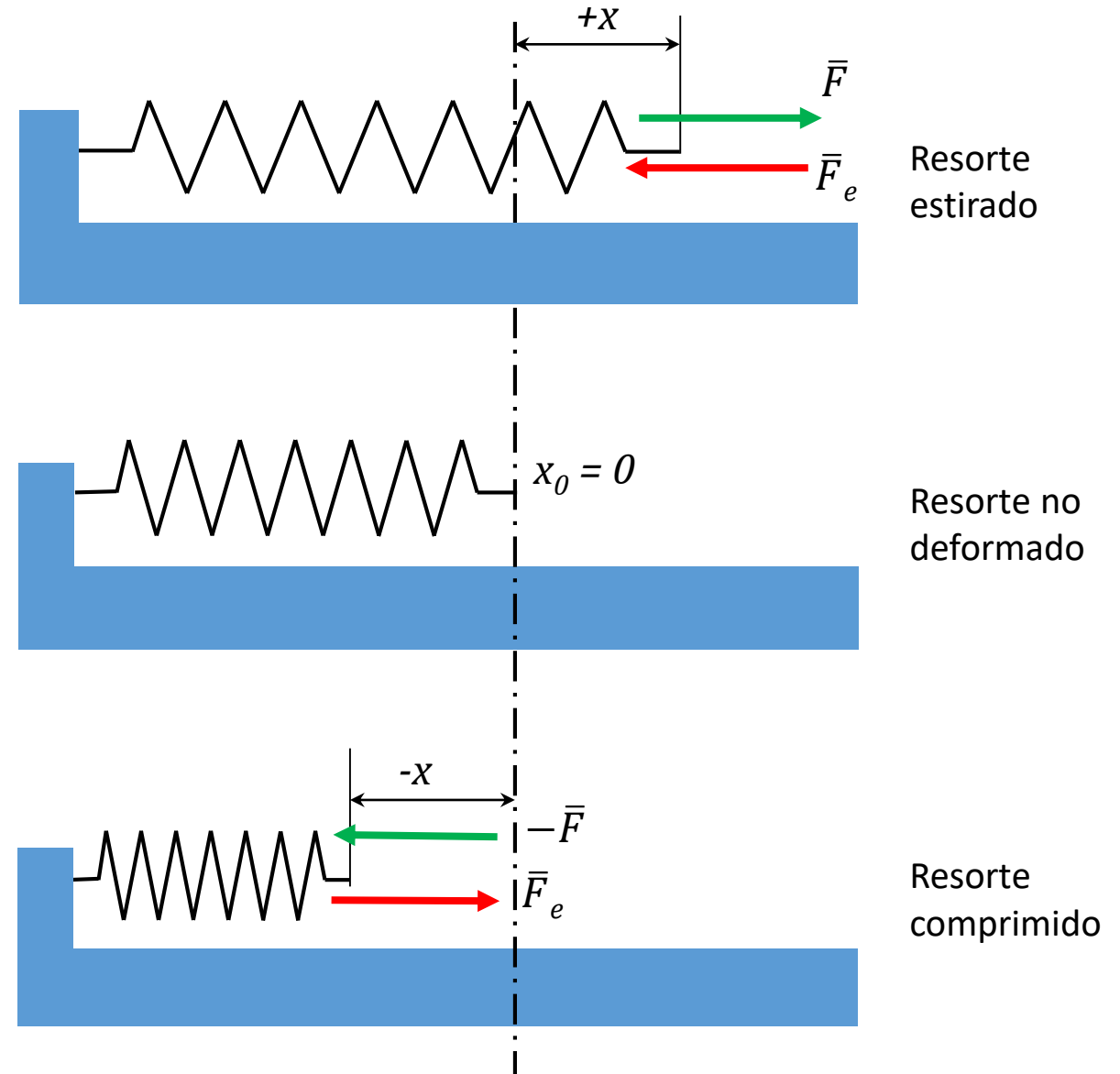
Aquí se representa el sistema físico donde la fuerza varía proporcionalmente con la posición con un resorte orientado en la dirección del eje x .

Al deformarlo (estirarlo o comprimirlo) mediante una fuerza externa F , actúa instantáneamente una fuerza recuperadora elástica F_e en reacción, cuya expresión matemática es la Ley de Hooke:

$$F_e = -k \cdot x$$

Esta ecuación es válida para pequeños desplazamientos, ya que si el resorte se estira demasiado, puede deformarse y no recuperar su forma original.

El signo negativo indica que el sentido de esta fuerza es siempre opuesto al sentido del desplazamiento, como se ilustra en la siguiente figura, donde $\bar{F}_e$ representa la fuerza producida por el resorte.

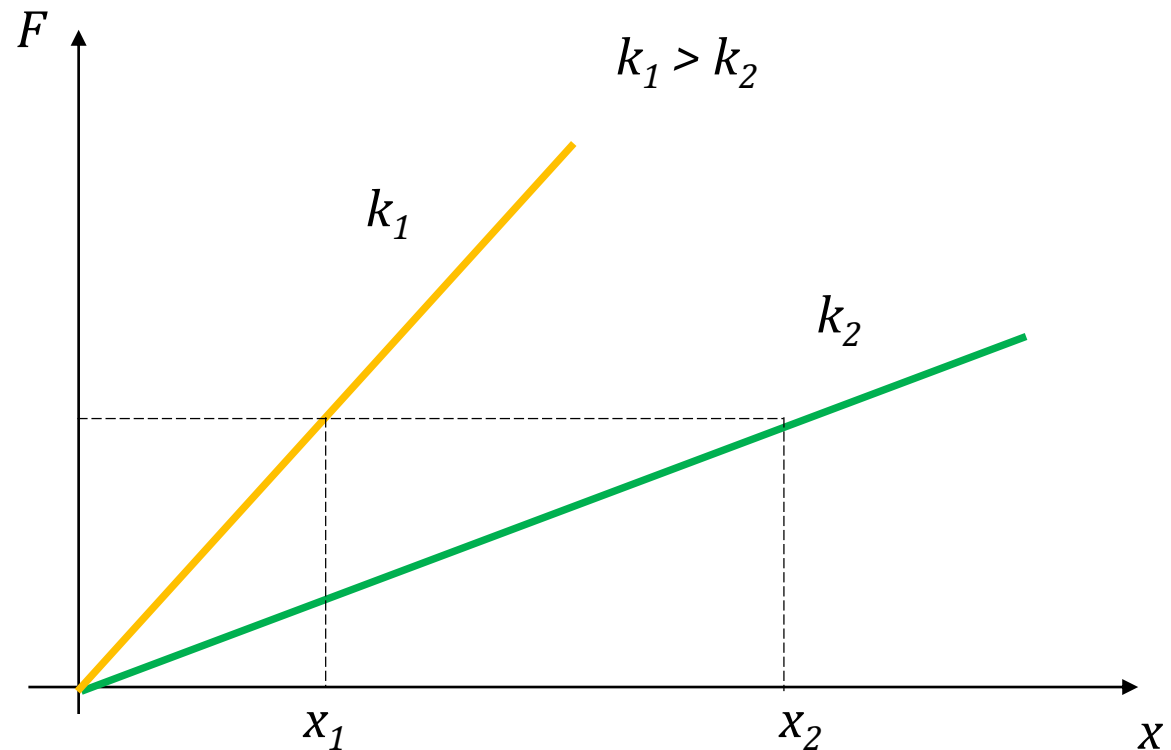


TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE

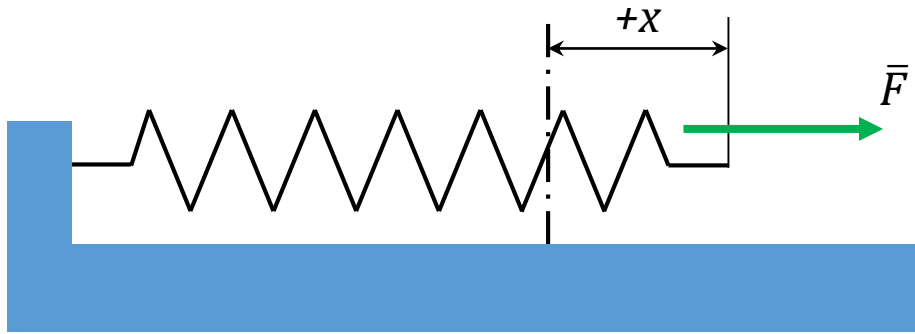
La constante del resorte (k) determina la relación de proporcionalidad entre la fuerza aplicada y la deformación resultante.

Es decir que representa la pendiente de la recta que representa la relación entre la fuerza aplicada y la deformación del resorte.

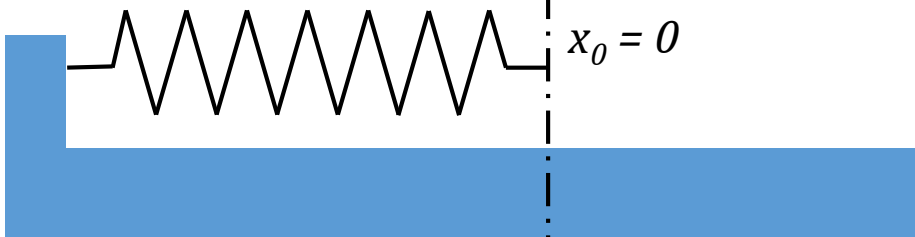
Cuando el valor de la constante k es mayor, significa que el resorte es más rígido, es decir, se deforma menos para una misma fuerza aplicada.



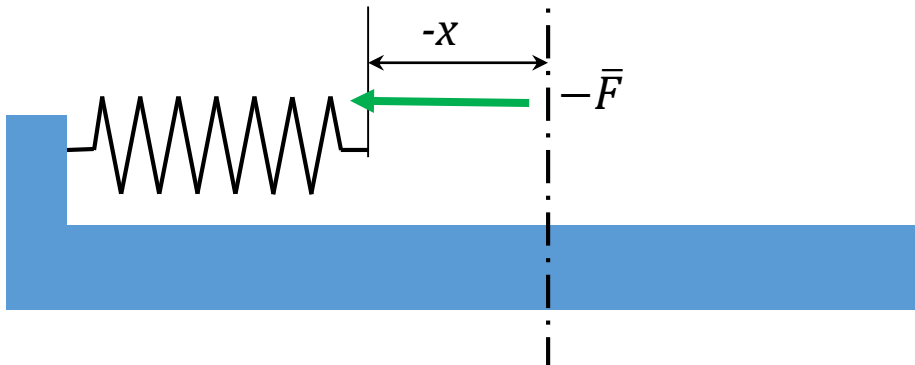
TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE



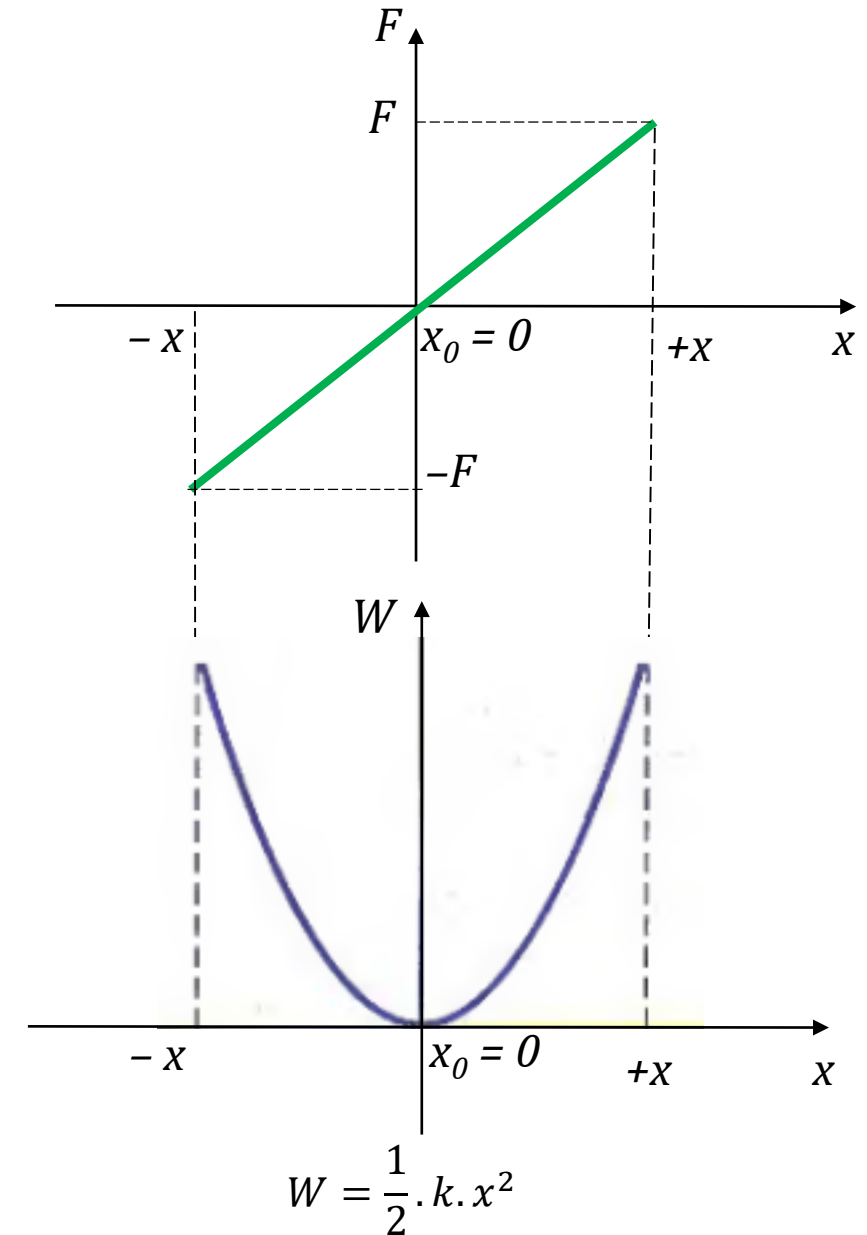
Resorte estirado



Resorte no deformado



Resorte comprimido



TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE

Ejemplo 3:

Para un resorte de $k = 100 \text{ N/m}$, que se estira 10 cm (x_f), determinar el trabajo que realiza la fuerza que lo expansiona. ($x_0 = 0$).

$$W = F(x) \cdot x = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{100\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,1\text{m})^2 = \mathbf{0,5 \text{ J}}$$

Si el trabajo se refiere al que hace el resorte en contra de la fuerza que lo expansiona, es:

$$W_e = -\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{100\text{N}}{\text{m}} \cdot (0,1\text{m})^2 = \mathbf{-0,5 \text{ J}}$$

ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA

El cálculo reciente del trabajo necesario para vencer a un resorte con una fuerza variable.

Como ya sabemos que el trabajo transforma la energía, podemos asegurar que todo ese trabajo invertido no se pierde, sino que queda almacenado en el resorte como energía potencial elástica (U_e).

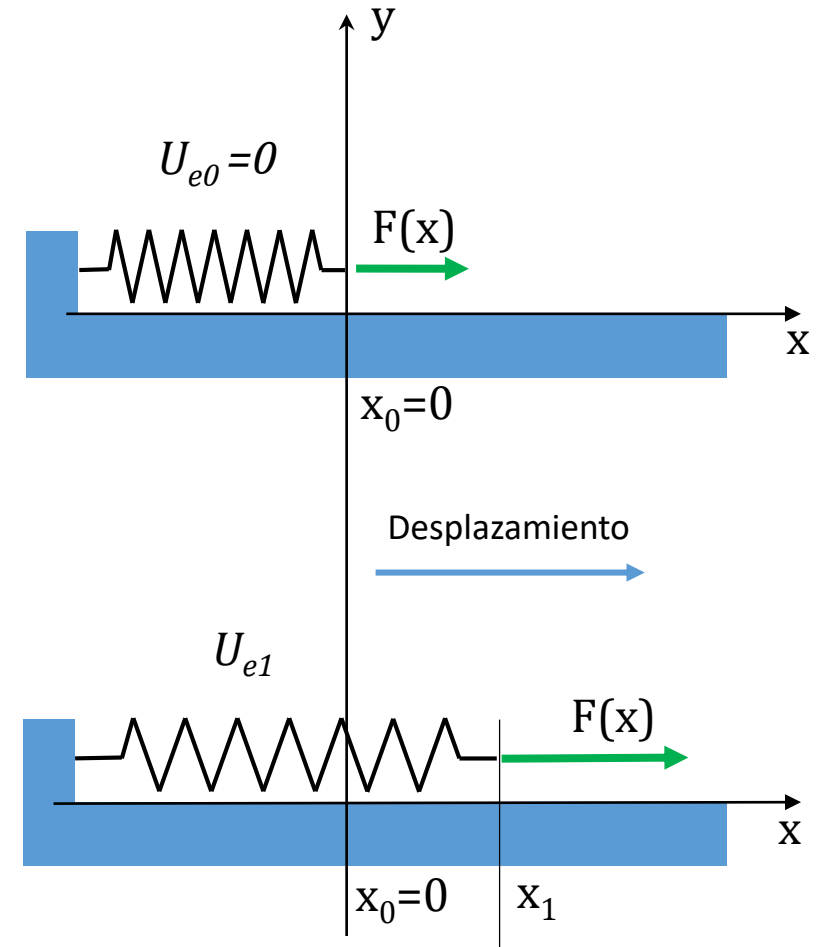
Para ello, en el gráfico llamaremos x_0 a la posición inicial y x_1 a la posición final del resorte estirado.

$$W = \Delta U_e = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_1^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^2$$

Cuando $x_0=0$, es:

$$\Delta U_e = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_1^2$$

Entonces, el trabajo realizado para desplazar el resorte nos proporciona el aumento de energía potencial elástica almacenada en el mismo.



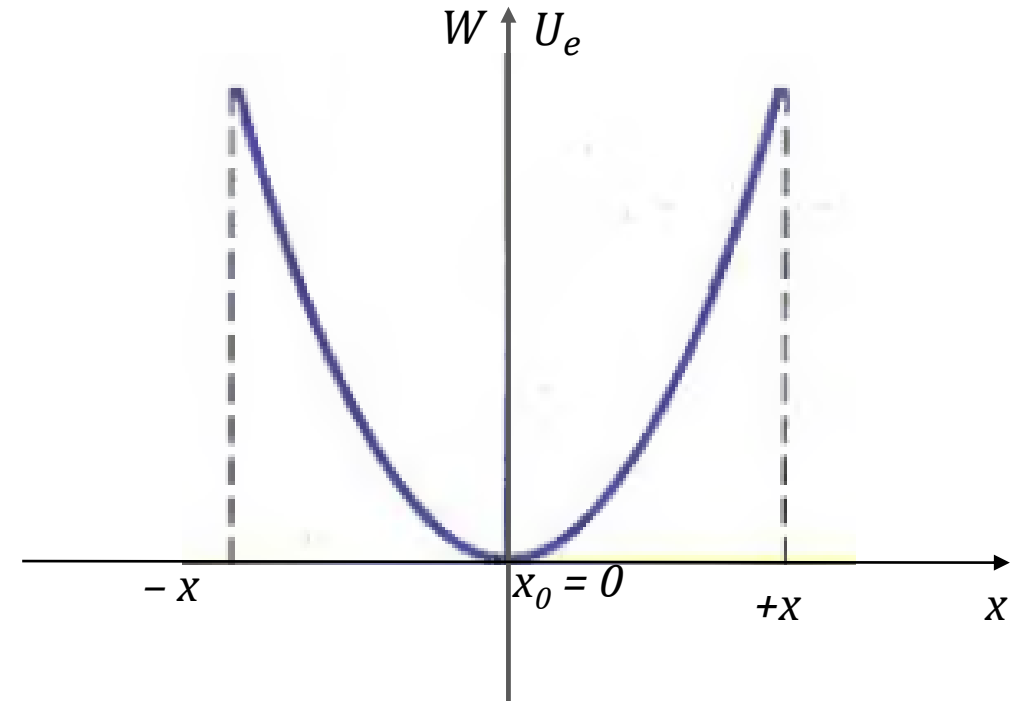
ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA

Esto permite definir la energía potencial elástica U_e almacenada en un resorte como:

$$U_e = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2$$

La energía potencial elástica es cero cuando el resorte no está deformado, es máxima cuando alcanza su deformación máxima y es siempre positiva ya que es proporcional a x^2 .

El trabajo realizado por el resorte aumentará a medida que el mismo se desplaza transformándose por ejemplo: en energía cinética; y ello será posible mediante la disminución de energía potencial elástica acumulada en el resorte al inicio estando comprimido.



TRABAJO DE FUERZAS CONSERVATIVAS

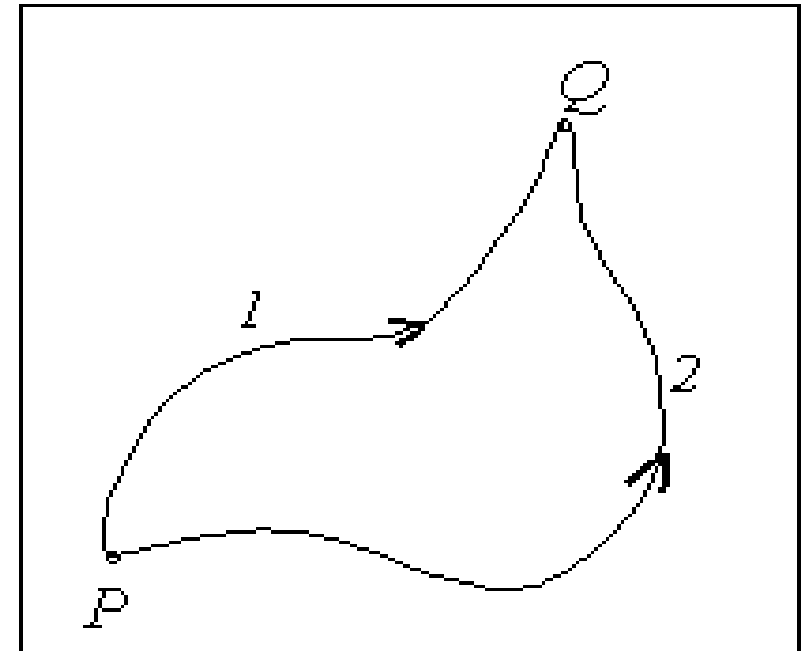
Una fuerza es **conservativa** si el trabajo realizado por ella para mover un cuerpo entre dos puntos es independiente de la trayectoria seguida, dependiendo exclusivamente de la posición inicial y de la posición final. Ejemplos clásicos de estas fuerzas son la gravitatoria y la elástica.

Dicho de otro modo, el trabajo realizado por una fuerza conservativa a lo largo de cualquier trayectoria que forme un camino cerrado (que regrese al punto de partida) es estrictamente igual a cero.

Suponer que una partícula se mueve, por la acción de una fuerza, desde una posición inicial P hasta otra posición final Q , por trayectorias arbitrarias 1 y 2, como se ve en la figura.

Si la fuerza es conservativa, entonces el trabajo para mover la partícula desde P a Q sólo depende de las coordenadas inicial y final de la partícula, esto es:

$$W_{PQ} \text{ (Trayectoria 1)} = W_{PQ} \text{ (Trayectoria 2)}$$



TRABAJO DE FUERZAS CONSERVATIVAS

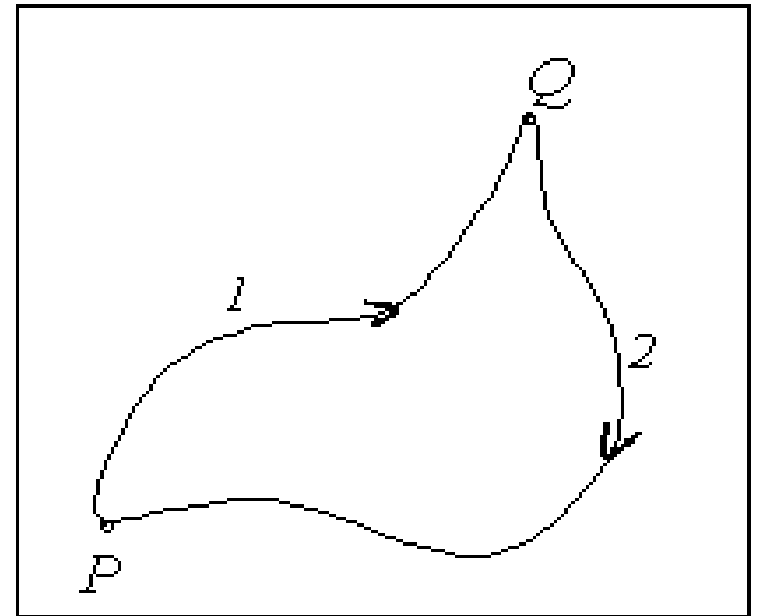
Si ahora la partícula se mueve desde P hasta Q por la trayectoria 1 y luego regresa desde Q hasta P por la trayectoria 2, (figura), se observa que en el regreso, $W_{PQ} \text{ (Trayectoria 1)} = W_{QP} \text{ (Trayectoria 2)}$, entonces:

$$|W_{PQ}| \text{ (Trayectoria 1)} = |W_{QP}| \text{ (Trayectoria 2)}$$

La diferencia entre los trabajos realizados de P a Q y de Q a P será:

$$W_{PQ} \text{ (Trayectoria 1)} - W_{QP} \text{ (Trayectoria 2)} = 0$$

Que la fuerza neta provoque una aceleración y cambie la energía cinética no nos dice absolutamente nada sobre si es conservativa o no. Para saber si es conservativa, debe cumplir estrictamente con que su trabajo en un camino cerrado sea igual a cero.

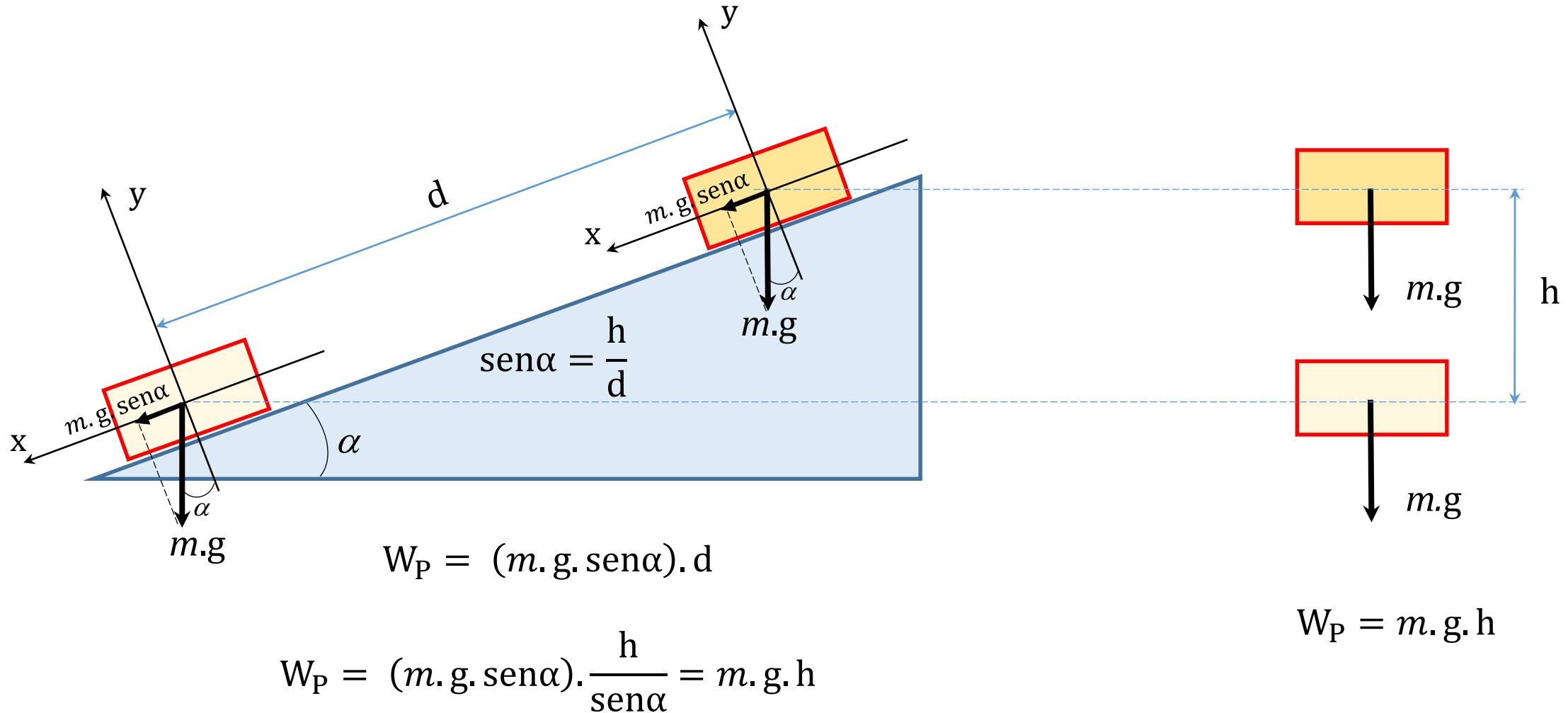


La fuerza neta es simplemente la *suma vectorial* de todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. El Teorema del Trabajo Neto y la Energía Cinética es una ley universal de “balance energético”: no le importa el origen de las fuerzas, solo suma sus efectos.

TRABAJO DE FUERZAS CONSERVATIVAS

Ejemplo 4:

El trabajo efectuado por la fuerza conservativa gravitacional (peso):



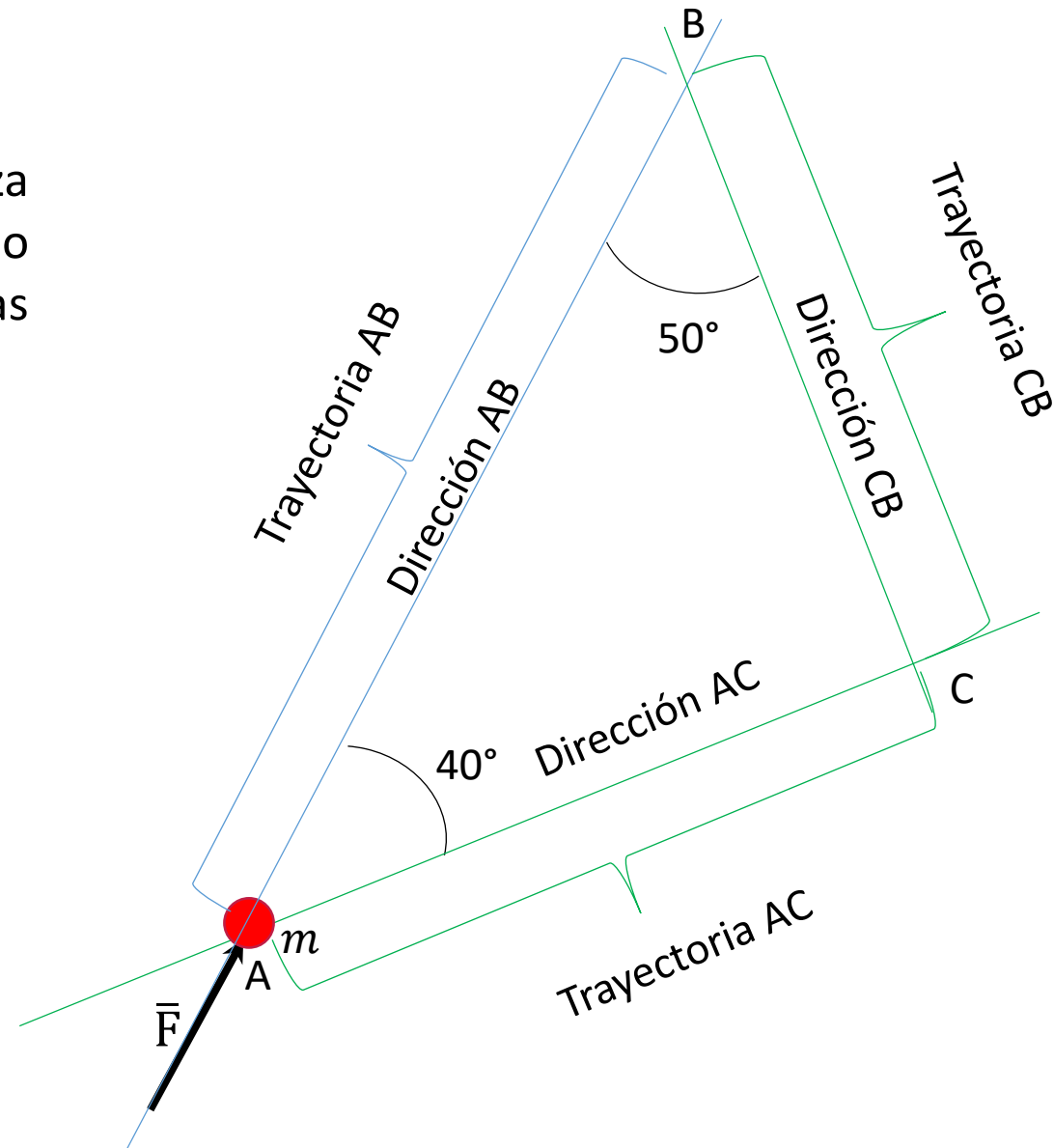
TRABAJO DE FUERZAS CONSERVATIVAS

Ejemplo 5:

El trabajo efectuado por la fuerza conservativa $\vec{F}$ para llevar un cuerpo puntual de masa m por trayectorias diferentes.

$$\vec{F} = 150\text{N}$$

$$\text{Trayectoria AB} = 10\text{m}$$



TRABAJO DE FUERZAS CONSERVATIVAS

Trayectoria AB:

$\vec{r}_{AB}$: Desplazamiento en la trayectoria AB.

$|\vec{r}_{AB}|$: Camino recorrido al mover la masa m por la trayectoria AB.

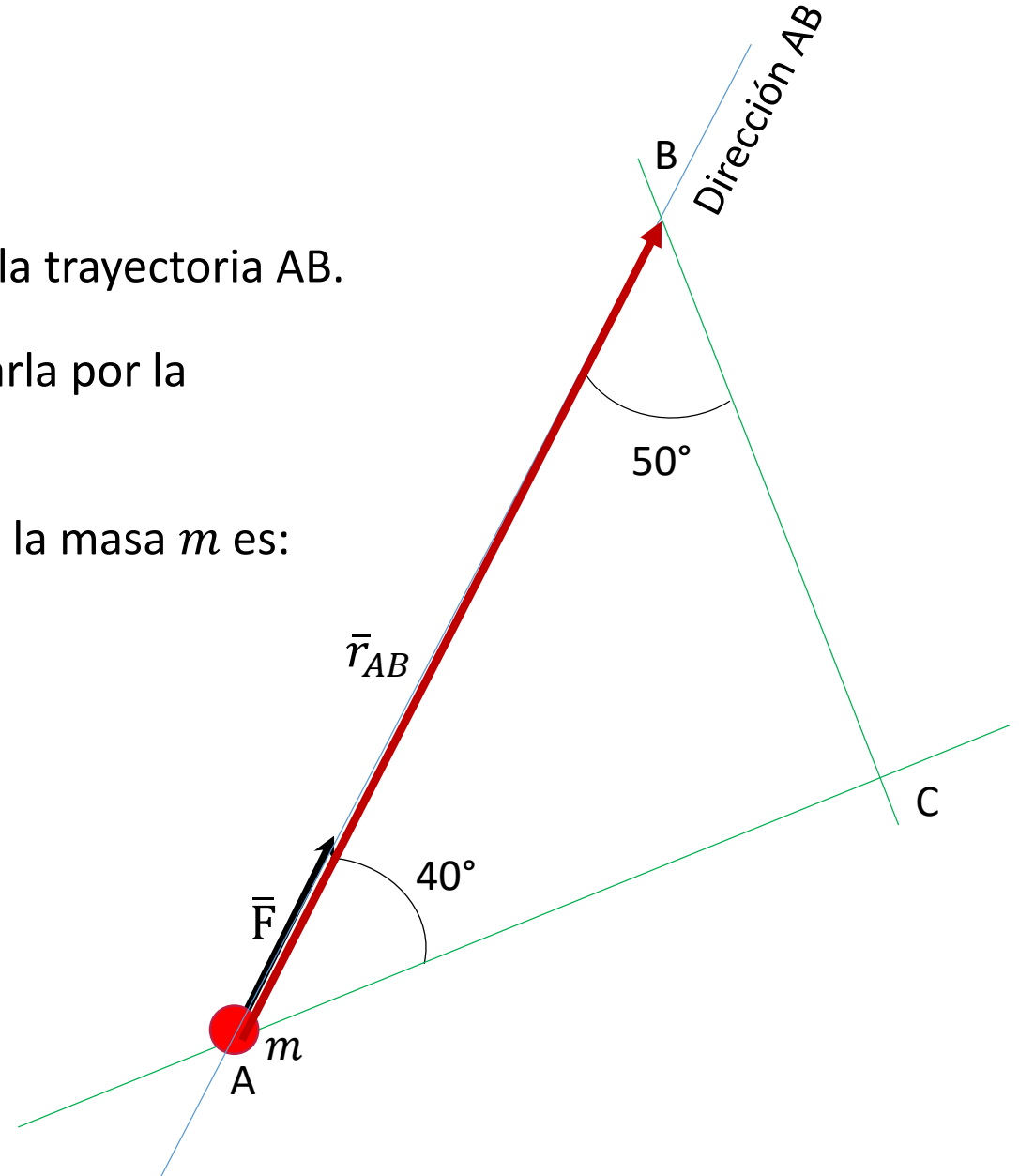
$\vec{F}$: Fuerza ejercida sobre la masa m para desplazarla por la trayectoria AB.

El trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ para desplazar la masa m es:

$$W_{AB} = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}_{AB}| \cdot \cos 0$$

$$W_{AB} = 150\text{N} \cdot 10\text{m} \cdot \cos 0$$

$$W_{AB} = 1500 \text{ J}$$



TRABAJO DE FUERZAS CONSERVATIVAS

Trayectoria AC:

$\vec{r}_{AC}$: Desplazamiento en la trayectoria AC.

$|\vec{r}_{AC}|$: Camino recorrido al mover la masa m por la trayectoria AC.

$\vec{F}_{AC}$: Fuerza ejercida sobre la masa m para desplazarla por la trayectoria AC.

El trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ para desplazar la masa m es:

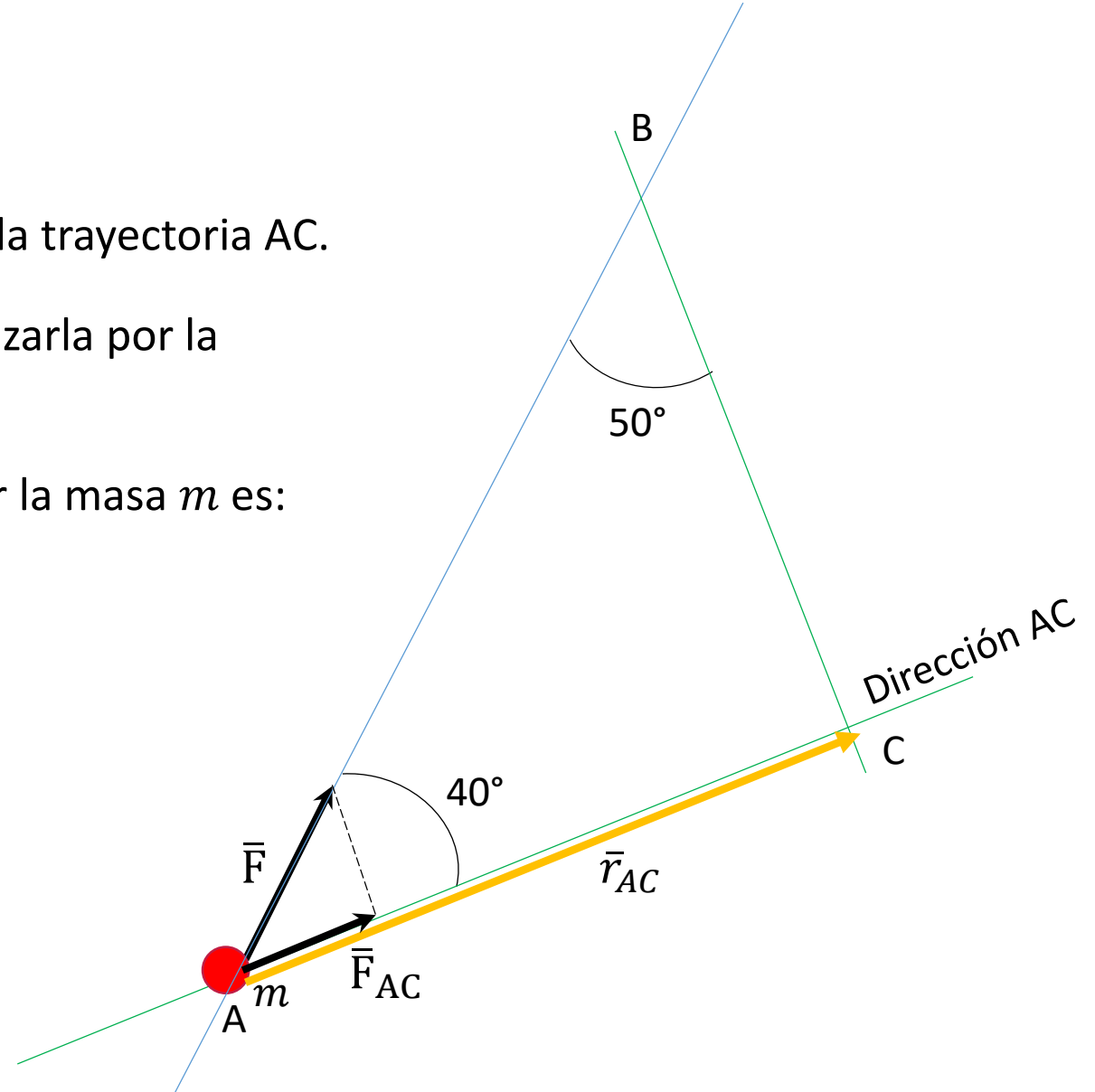
$$W_{AC} = |\vec{F}_{AC}| \cdot |\vec{r}_{AC}| \cdot \cos 0$$

$$|\vec{F}_{AC}| = 150\text{N} \cdot \cos 40^\circ = 114,907\text{N}$$

$$|\vec{r}_{AC}| = 10\text{m} \cdot \cos 40^\circ = 7,66\text{m}$$

$$W_{AC} = 114,907\text{N} \cdot 7,66\text{m} \cdot \cos 0$$

$$W_{AC} = 880,236 \text{ J}$$



TRABAJO DE FUERZAS CONSERVATIVAS

Trayectoria CB:

$\vec{r}_{CB}$: Desplazamiento en la trayectoria CB.

$|\vec{r}_{CB}|$: Camino recorrido al mover la masa m por la trayectoria CB.

$\vec{F}_{CB}$: Fuerza ejercida sobre la masa m para desplazarla por la trayectoria CB.

El trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ para desplazar la masa m es:

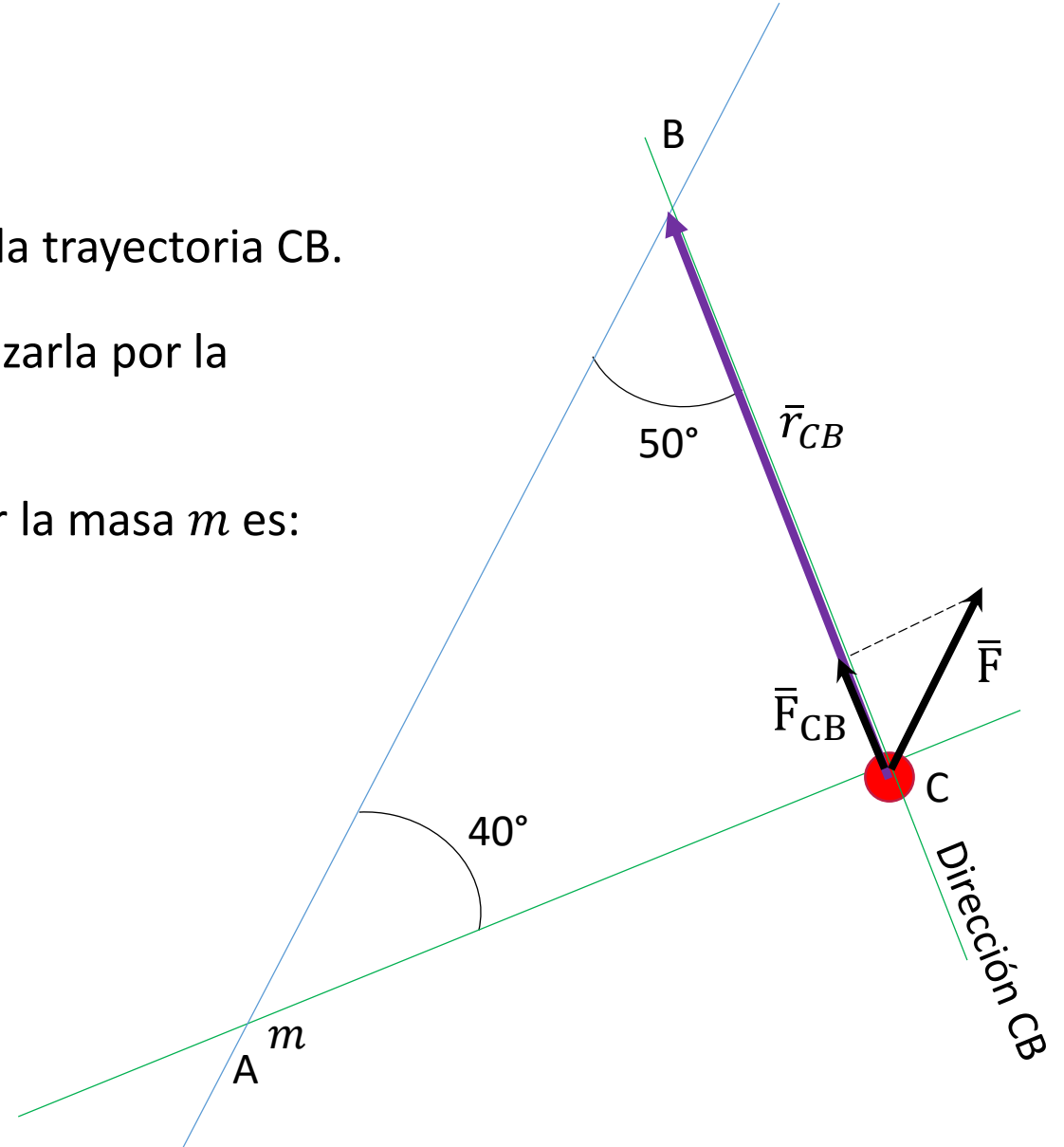
$$W_{CB} = |\vec{F}_{CB}| \cdot |\vec{r}_{CB}| \cdot \cos 0$$

$$|\vec{F}_{CB}| = 150\text{N} \cdot \sin 40^\circ = 96,418\text{N}$$

$$|\vec{r}_{CB}| = 10\text{m} \cdot \sin 40^\circ = 6,428\text{m}$$

$$W_{CB} = 96,418\text{N} \cdot 6,428\text{m} \cdot \cos 0^\circ$$

$$W_{CB} = 619,764 \text{ J}$$



TRABAJO DE FUERZAS CONSERVATIVAS

Si sumamos los trabajos realizados en las trayectorias AC y CB, nos queda:

$$W_{AC} + W_{CB} = 880,236 \text{ J} + 619,764 \text{ J} = 1500 \text{ J}$$

$$W_{AC} + W_{CB} = 1500 \text{ J}$$

Por lo tanto se demuestra que el trabajo de fuerzas conservativas es independiente de la trayectoria seguida:

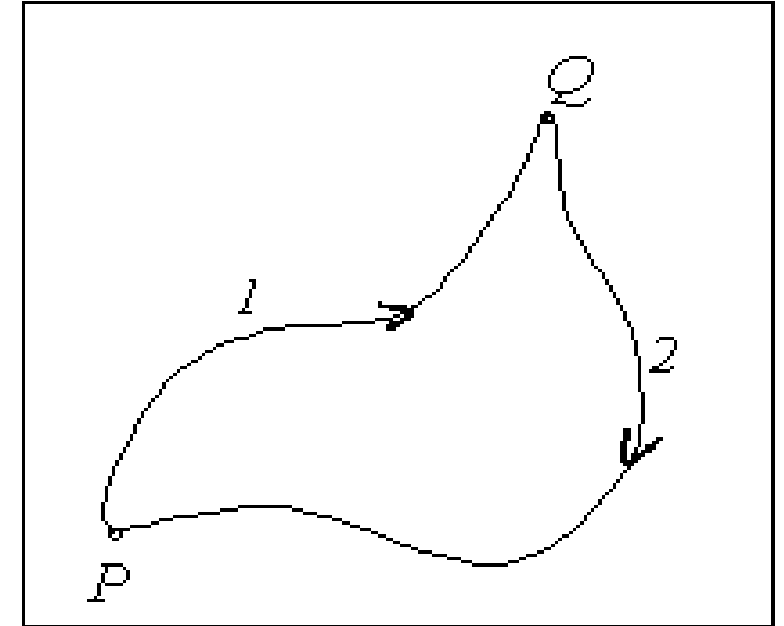
$$W_{AB} = W_{AC} + W_{CB} = 1500 \text{ J}$$

TRABAJO DE FUERZAS NO CONSERVATIVAS

Una fuerza es no conservativa si el trabajo realizado por ella para mover un cuerpo entre dos puntos depende de la trayectoria seguida por el mismo.

Ejemplos característicos de estas fuerzas son la fricción por deslizamiento y la resistencia de los fluidos.

Debido a esto, el trabajo realizado a lo largo de un camino cerrado (que vuelve al punto de partida) es distinto de cero; por lo general, este trabajo es negativo, lo que significa que el sistema pierde energía mecánica en forma de energía térmica.



Supongamos que un cuerpo se mueve desde una posición inicial P hasta una posición final Q a través de dos caminos distintos (1 y 2).

Si sobre el cuerpo actúan fuerzas disipativas, el trabajo mecánico para trasladarlo será diferente en cada recorrido:

$$|W_{PQ}|_{\text{(Trayectoria 1)}} \neq |W_{PQ}|_{\text{(Trayectoria 2)}}.$$

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Cuando una partícula se mueve por la acción de una fuerza conservativa, por el teorema del trabajo y la energía se tiene que el trabajo realizado por la fuerza neta es igual a la variación de energía cinética de la partícula:

$$W_n = \Delta K$$

Si la única fuerza actuante fuera la gravitatoria, por ejemplo, entonces $W_n = W_g = -\Delta U_g$, donde U_g será la energía potencial gravitatoria.

Igualando ambas expresiones del trabajo se obtiene:

$$\Delta K = -\Delta U_g$$

$$\Delta K + \Delta U_g = 0$$

$$K_0 + U_{g0} = K_f + U_{gf}$$

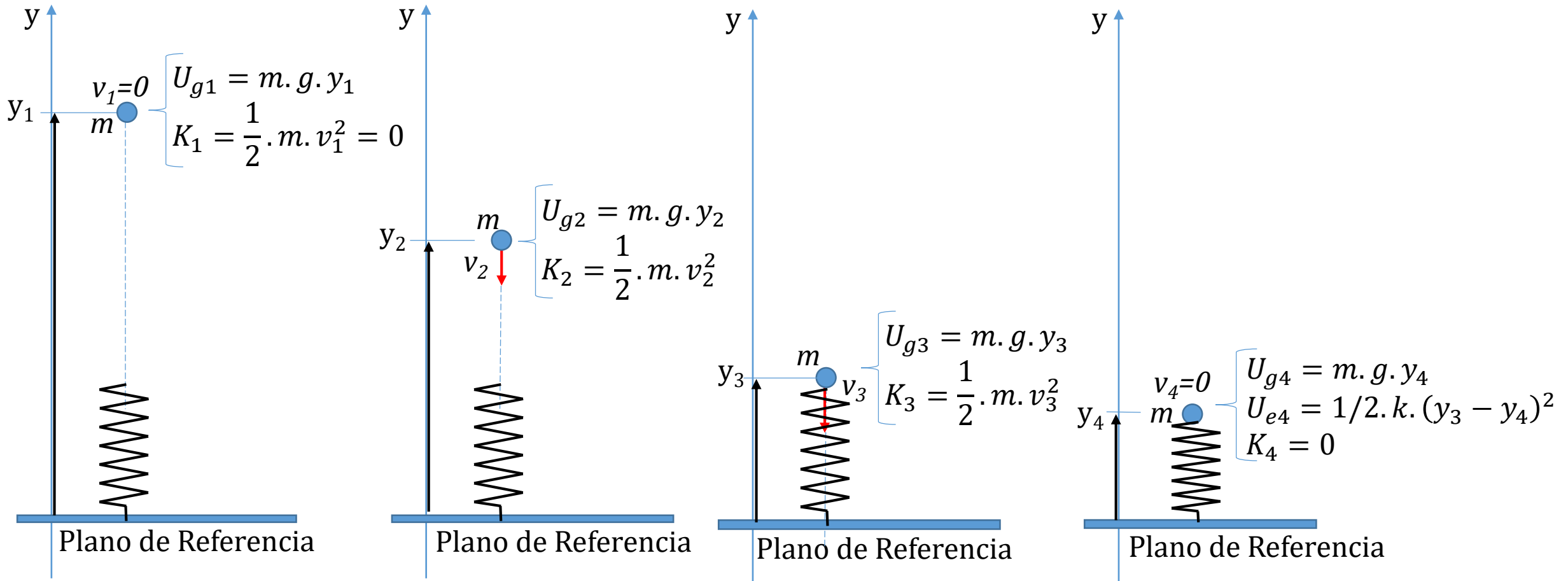
De igual modo podemos agregar la energía elástica acumulada debida al trabajo de fuerzas conservativas elásticas sobre un resorte:

$$K_0 + U_{g0} + U_{e0} = K_f + U_{gf} + U_{ef}$$

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Ejemplo 6:

Una partícula que cae sobre un resorte:



Se puede definir la energía mecánica total como la suma de la energía cinética y la energía potencial:

$$E_m = K + U$$

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

La ley de conservación de la energía mecánica establece que la energía mecánica total de un sistema permanece constante si las únicas fuerzas que realizan trabajo sobre el sistema son conservativas.

$$E_0 = E_f \rightarrow E_m = cte.$$

Entonces se obtiene la **ley de conservación de la energía mecánica**, que también se escribe como:

$$\Delta E_m = 0$$

Si las fuerzas presentes en un sistema mecánico no son conservativas, como ocurre en los sistemas reales, la energía aparentemente no se conserva, lo cual no es cierto porque se transforma en otro tipo de energía.

Por ejemplo, la fuerza de roce se dice que es disipativa porque disipa energía, que se transforma en calor en la superficie de contacto entre los cuerpos.

En efecto, se puede aplicar el teorema del trabajo y la energía tomando en cuenta la existencia de las fuerzas no conservativas.

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Ejemplo 7:

Para el sistema de la figura, donde el cuerpo de masa m desliza desde una altura h por la superficie curva sin roce, calcular la compresión máxima del resorte de constante k , cuando la masa choca con él.

Solución: si no hay roce, se conserva la energía mecánica, entonces:

$$\Delta E_m = 0$$

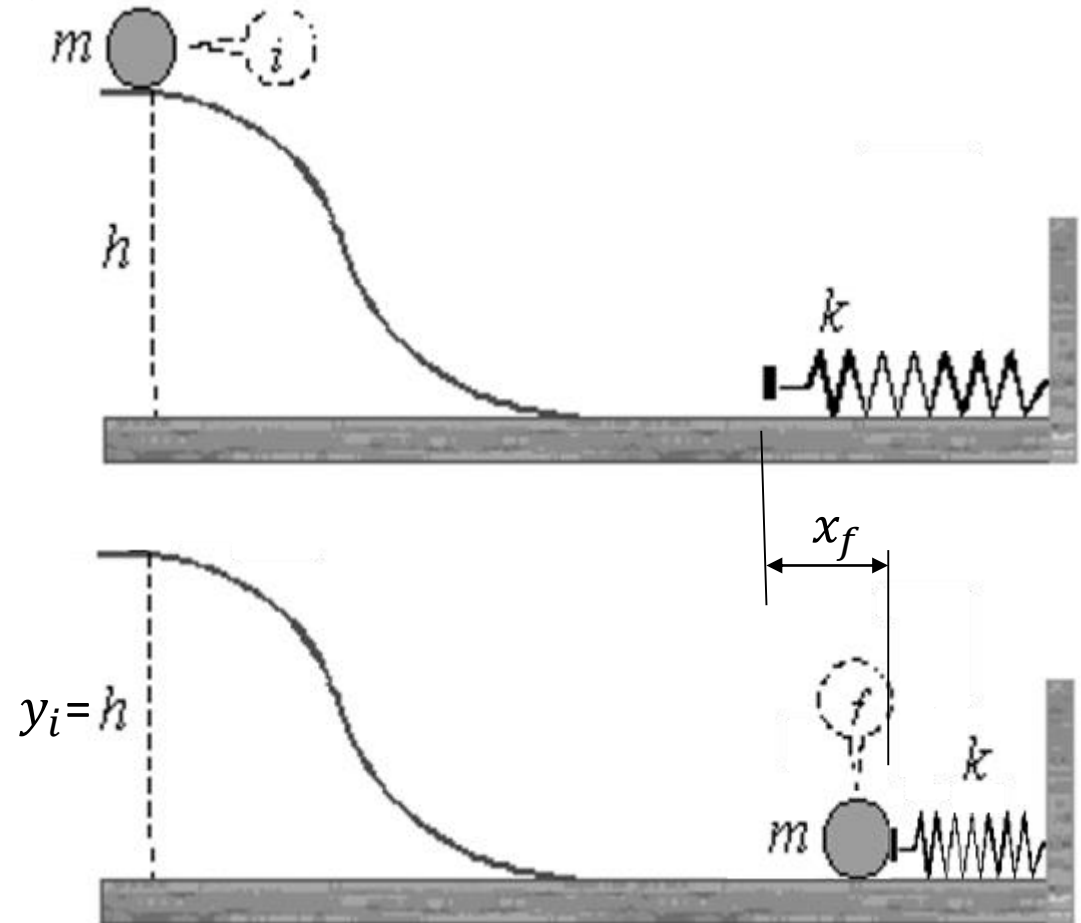
$$E_{mi} = E_{mf} \Rightarrow K_0 + U_{g0} + U_{e0} = K_f + U_{gf} + U_{ef}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 + m \cdot g \cdot y_0 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_f^2 + m \cdot g \cdot y_f + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_f^2$$

Como: $v_0 = 0$; $x_0 = 0$; $v_f = 0$; $y_f = 0$; $y_0 = h$, nos queda:

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_f^2$$

$$x_f = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g \cdot h}{k}}$$



ECUACIÓN GENERAL DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Si W_{NC} es el trabajo sobre una partícula de todas las fuerzas no conservativas y W_C el trabajo de todas las fuerzas conservativas, entonces:

$$W_{NC} + K_0 + U_{g0} + U_{e0} = K_f + U_{gf} + U_{ef}$$

Es decir, el trabajo realizado por todas las fuerzas no conservativas es igual al cambio de energía mecánica total del sistema.

$$\Delta E_m = E_f - E_0 = W_{NC}$$

$$W_{NC} = (K_f + U_{gf} + U_{ef}) - (K_0 + U_{g0} + U_{e0})$$

POTENCIA MEDIA

Para fines prácticos interesa conocer la rapidez con la cual se realiza trabajo.

Así, si medimos la cantidad de trabajo realizado o la cantidad de energía obtenida o transferida por unidad de tiempo, a esta relación o cantidad la denominaremos Potencia.

De igual modo, la entrega la **potencia**, se define como la rapidez de transferencia de energía.

Si el trabajo W es realizado por una fuerza externa a un cuerpo en un intervalo de tiempo Δt , la potencia promedio o potencia media durante dicho intervalo es:

$$P_{med} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Tal como habíamos hecho en velocidad y aceleración, la potencia instantánea se determina como el límite de la potencia promedio a medida que Δt se acerca a cero:

$$P_{inst} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

POTENCIA INSTANTÁNEA

Donde dW es un valor infinitesimal (muy pequeño) del trabajo. Luego, como: $dW = F \cdot dx$; por lo tanto la potencia instantánea se puede escribir como:

$$P_{inst} = \frac{dW}{dt} = F \cdot \frac{dx}{dt} = F \cdot v_{inst}$$

$$P_{inst} = F \cdot v_{inst}$$

La unidad de medida de la potencia en el SI es J/s, que se llama Watt, símbolo [W] (cuidado de no confundir con el trabajo).

$$1\text{HP} = 746\text{W} \cong 0,75\text{kW}$$

$$1\text{CV} = 736\text{W} \cong 0,74\text{kW}$$

Cabe aclarar que la potencia en sí misma no es esencialmente negativa, pero su signo puede ser positivo o negativo dependiendo de la dirección del flujo de energía y del tipo de trabajo realizado.