

# 4.- MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES



# MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

En general el movimiento de los objetos verdaderos se realiza en el espacio real tridimensional.

El movimiento de una partícula que se realiza en un plano es un movimiento en dos dimensiones, si el movimiento se realiza en el espacio, se produce en tres dimensiones.

En esta parte estudiaremos la cinemática de una partícula que se mueve sobre un plano. Ejemplos de un movimiento en dos dimensiones son el de un cuerpo que se lanza al aire, un disco girando, el salto de un canguro, el lanzamiento de un proyectil, etc.

El movimiento de los objetos que giran respecto de un eje recibe el nombre de rotación y los mismos siguen una trayectoria que describe una circunferencia, y se conoce como movimiento circunferencial o movimiento circular; y es un caso de movimiento en dos dimensiones, que también estudiaremos más adelante.

El vuelo de un insecto, el de una hoja con el viento o el movimiento de las nubes, se producen en tres dimensiones.

# DESPLAZAMIENTO EN DOS DIMENSIONES

El vector posición de una partícula que se mueve de A hacia B en el plano  $X$ - $Y$  es una función del tiempo, se escribe como:

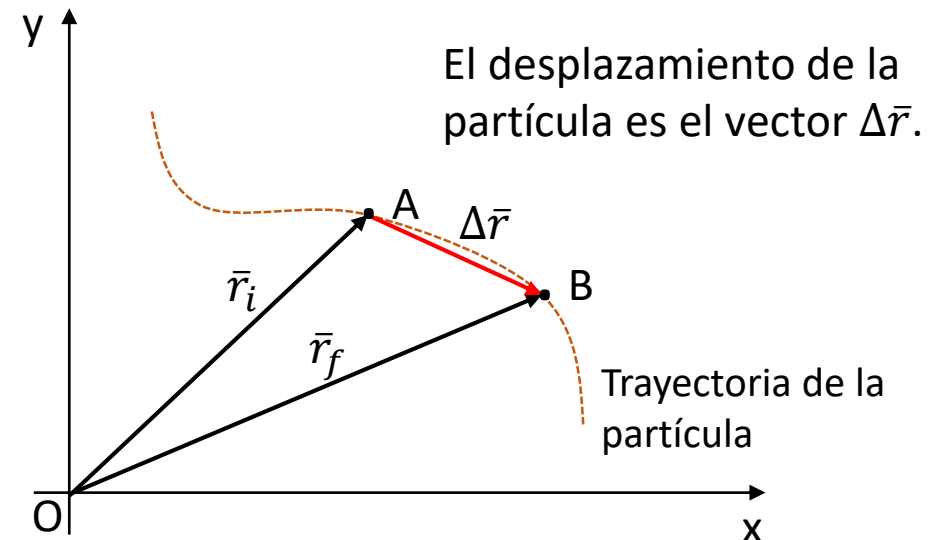
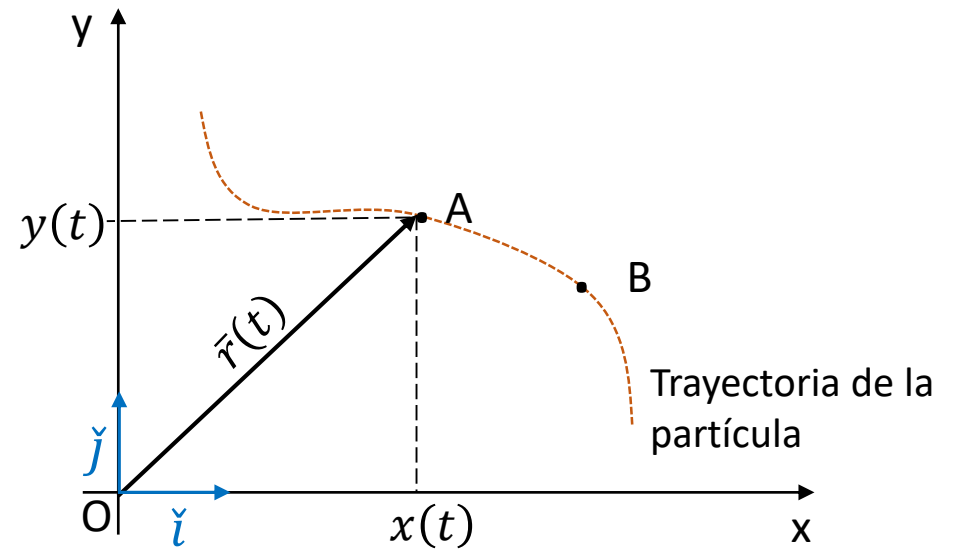
$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j}$$

O bien con una notación moderna:

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \hat{e}_x + y(t) \cdot \hat{e}_y$$

Luego de un intervalo de tiempo, el desplazamiento experimentado por la partícula en el plano será

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$$



# VELOCIDAD MEDIA E INSTANTÁNEA

La velocidad de la partícula en movimiento en el plano  $X$ - $Y$  es el cambio de posición en el transcurso del tiempo y se puede determinar por:

$$\bar{v}_{med} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i}$$

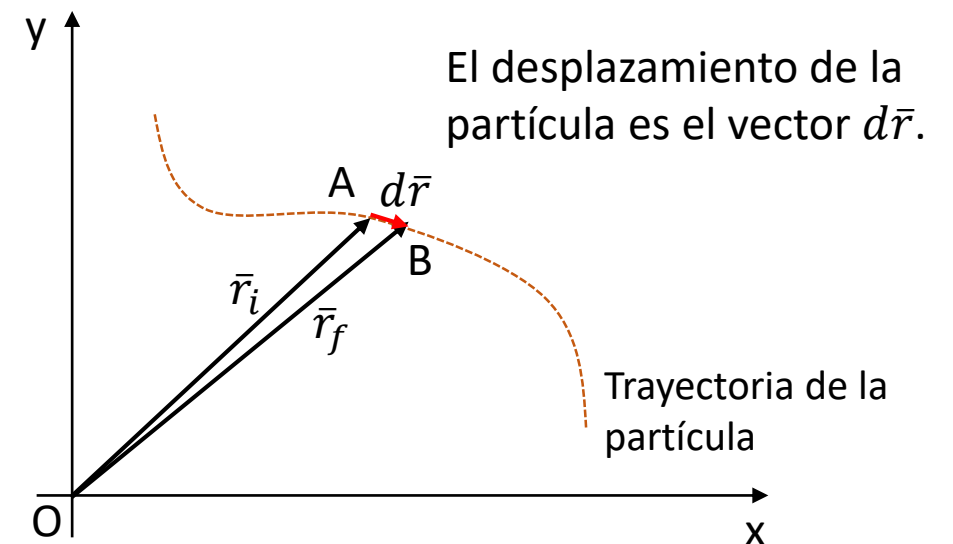
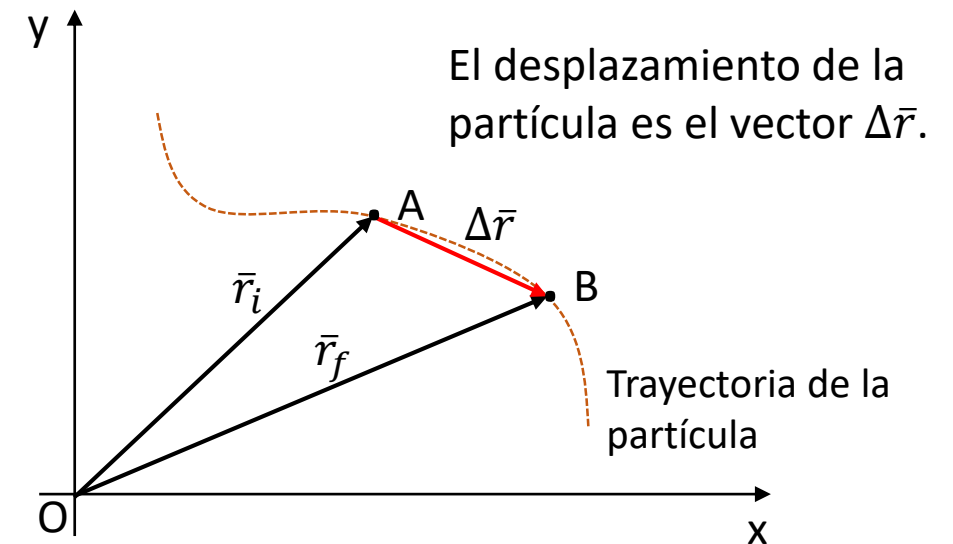
Para un instante de tiempo muy pequeño, la velocidad calculada será la *velocidad instantánea*. Para ello aplicamos la definición de límite:

$$\bar{v}(t) = \bar{v}_{inst} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

En componentes es:

$$\bar{v}(t) = v_x(t) \cdot \vec{i} + v_y(t) \cdot \vec{j} \quad \text{ó} \quad \bar{v}(t) = v_x(t) \cdot \hat{e}_x + v_y(t) \cdot \hat{e}_y$$

Para hacer más sencillo el entendimiento del desarrollo del límite, nos limitaremos a una dirección solamente.



# VELOCIDAD MEDIA E INSTANTÁNEA

Para determinar el cambio de posición en un intervalo muy pequeño, por definición de límite tenemos:

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Para simplificar, llamamos  $T = (t - t_i)$ . Luego, según la ecuación de posición en la dirección  $x$  es:

$$x(t) = x_i + v_{ix} \cdot (t - t_i) + \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot (t - t_i)^2 = x_i + v_{ix} \cdot T + \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot T^2$$

En un instante posterior, es:

$$x(t + \Delta t) = x_i + v_{ix} \cdot (T + \Delta t) + \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot (T + \Delta t)^2$$

Desarrollando lo anterior:

$$x(t + \Delta t) = x_i + v_{ix} \cdot T + v_{ix} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot T^2 + a_x \cdot T \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot \Delta t^2$$

El numerador del límite será:

$$x(t + \Delta t) - x(t) = \left[ x_i + v_{ix} \cdot T + v_{ix} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot T^2 + a_x \cdot T \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot \Delta t^2 \right] - \left[ x_i + v_{ix} \cdot T + \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot T^2 \right]$$

# VELOCIDAD INSTANTÁNEA

De la diferencia nos queda:

$$x(t + \Delta t) - x(t) = v_{ix} \cdot \Delta t + a_x \cdot T \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot \Delta t^2$$

Dividiendo por el cociente incremental es:

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{v_{ix} \cdot \Delta t + a_x \cdot T \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot \Delta t^2}{\Delta t}$$

En un instante posterior, es:

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = v_{ix} + a_x \cdot T + \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot \Delta t$$

Aplicando límite para  $\Delta t \rightarrow 0$ , es:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = v_{ix} + a_x \cdot T + \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot 0$$

Finalmente tenemos:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = v_x(t) = v_{ix} + a_x \cdot T$$

# VELOCIDAD INSTANTÁNEA

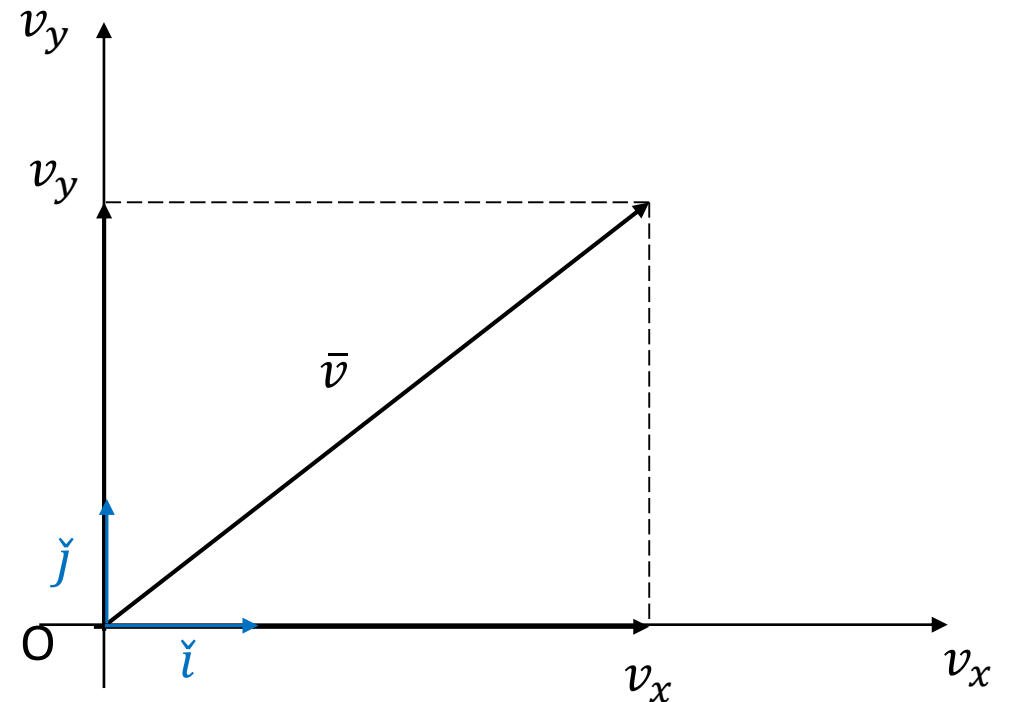
Luego, podemos expresar a la velocidad instantánea en dos direcciones de acuerdo a lo obtenido:

$$\bar{v}(t) = v_x(t) \cdot \check{i} + v_y(t) \cdot \check{j}$$

$$\bar{v}(t) = v_{ix} + a_x \cdot (t - t_i) \cdot \check{i} + v_{iy} + a_y \cdot (t - t_i) \cdot \check{j}$$

En la siguiente figura se representa gráficamente la velocidad instantánea en sus componentes.

Donde  $v_x$  y  $v_y$  son las componentes de la velocidad instantánea en la dirección  $x$  e  $y$ .



# POSICIÓN EN FUNCIÓN DEL TIEMPO

Cuando aplicamos las ecuaciones horarias para una dimensión, independientemente en cada dirección  $x$  e  $y$ , para una partícula que en el instante inicial  $t_i$  se mueve con velocidad inicial  $\bar{v}_i$ ; se obtienen las componentes de la posición en función del tiempo a partir de:

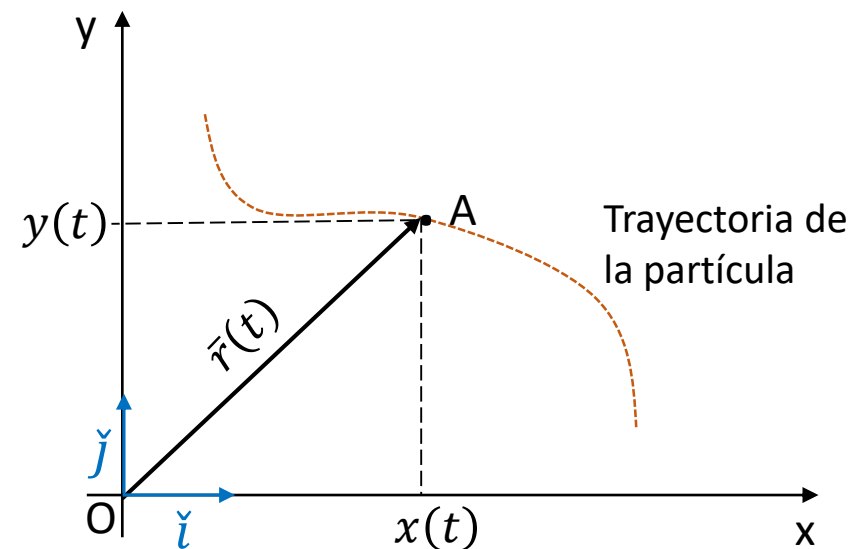
$$\bar{r}(t) = x(t) \cdot \hat{i} + y(t) \cdot \hat{j}$$

Donde:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_i + v_{ix} \cdot (t - t_i) + \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot (t - t_i)^2 \\ y(t) = y_i + v_{iy} \cdot (t - t_i) + \frac{1}{2} \cdot a_y \cdot (t - t_i)^2 \end{array} \right.$$

O bien:

$$\bar{r}(t) = \bar{r}_i + \bar{v}_i \cdot (t - t_i) + \frac{1}{2} \cdot \bar{a} \cdot (t - t_i)^2$$



Se concluye que estas ecuaciones representan el movimiento bidimensional con aceleración constante; y es equivalente a dos movimientos independientes en las direcciones  $x$  e  $y$  con aceleraciones constantes  $a_x$  y  $a_y$ .

# ACELERACIÓN CONSTANTE

Si la aceleración “ $a$ ” es constante, sus componentes  $a_x$  en la dirección  $x$ , y  $a_y$  en la dirección  $y$ , también lo son.

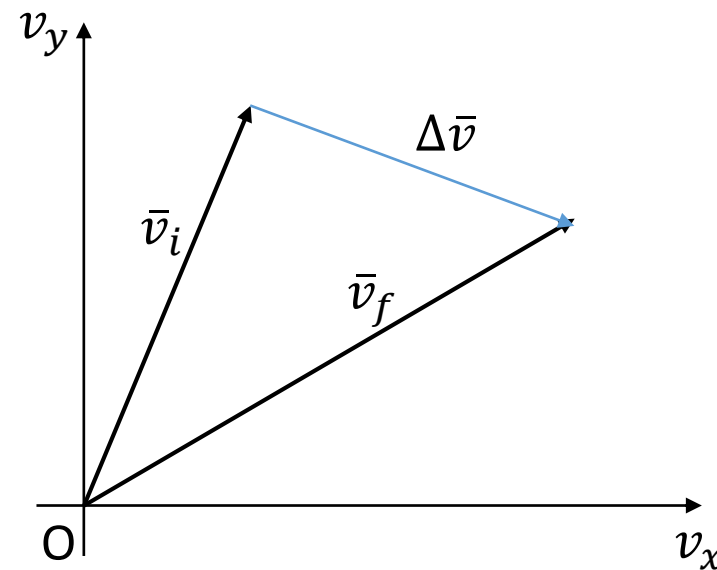
Cuando una partícula se mueve de un punto a otro a lo largo de cierta trayectoria, su vector velocidad instantánea cambia de  $\bar{v}_i$  en el tiempo  $t_i$  a  $\bar{v}_f$  en el tiempo  $t_f$ .

Conocer la velocidad en dichos puntos permite determinar la aceleración media de la partícula.

$$\bar{a}_{med} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{\bar{v}_f - \bar{v}_i}{t_f - t_i}$$

Como la aceleración es constante, la aceleración media es igual a la aceleración instantánea.

$$\bar{a}_{med} = \bar{a}_{inst} = \bar{a}$$



# MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Cualquier objeto que sea lanzado en el aire con una velocidad inicial  $\vec{v}_i$  de dirección arbitraria, se mueve describiendo una trayectoria curva en un plano.

Si para esta forma común de movimiento se supone que:

- a) La aceleración de gravedad es constante en todo el movimiento (aproximación válida para el caso en que el desplazamiento horizontal del cuerpo en movimiento sea pequeño comparado con el radio de la Tierra).
- b) Se desprecia el efecto de las moléculas de aire sobre el cuerpo (aproximación no muy buena para el caso en que la rapidez del cuerpo en movimiento sea alta), entonces a este tipo de movimiento se le llama *movimiento de proyectil* y se produce en dos dimensiones.

Se elige el sistema de coordenadas  $(x, y)$  tradicional como se ve en la figura siguiente, donde se dibuja la trayectoria de una partícula en movimiento en dos dimensiones, junto con los vectores velocidad y aceleración de gravedad.

# MOVIMIENTO DE PROYECTILES

En esta sección sólo estudiaremos aceleración constante y el primer caso que veremos será el de movimiento de objetos lanzados cuya trayectoria corresponde a una curva de proyección parabólica.

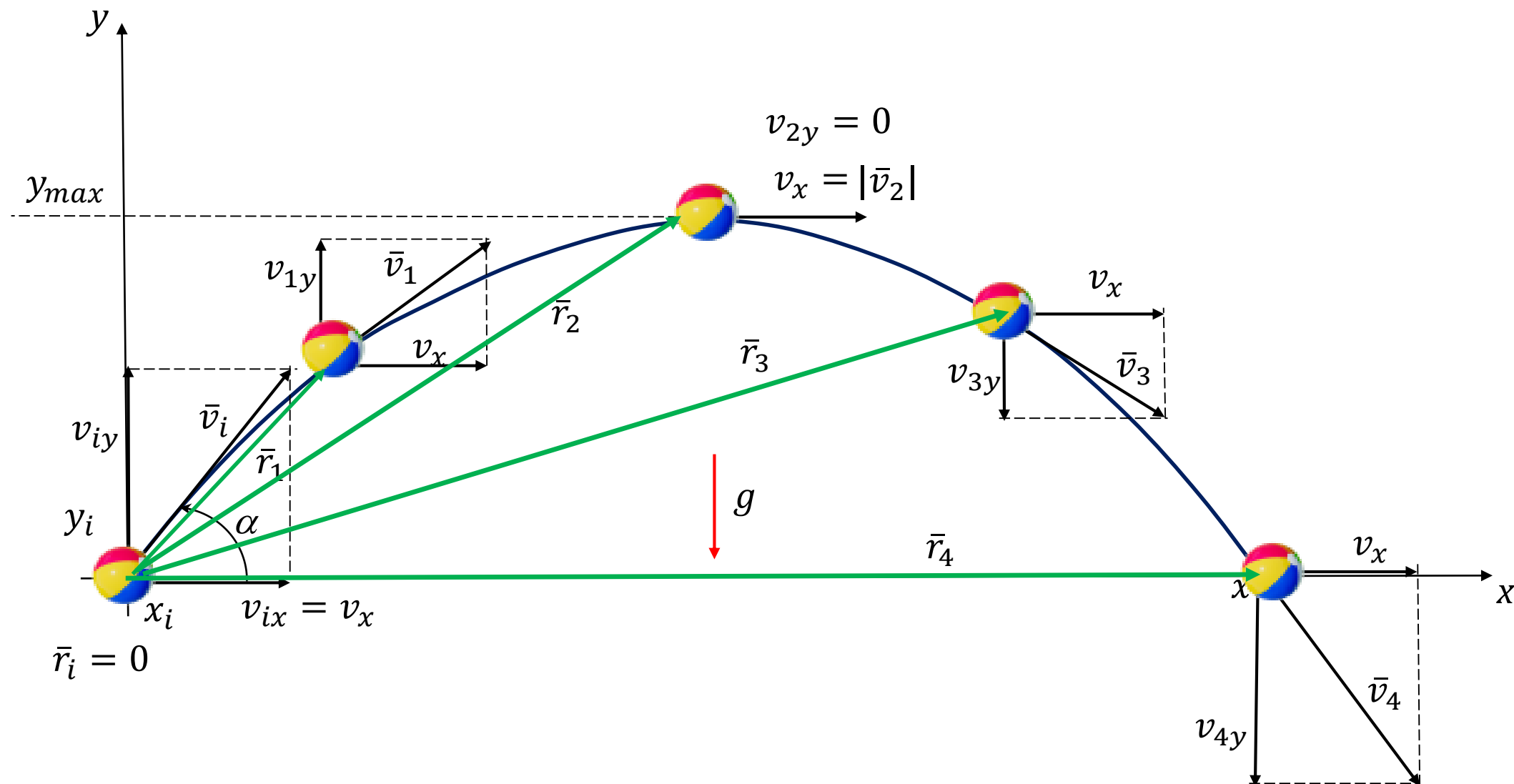
Así, la aceleración involucrada en éste movimiento será de módulo constante, con una única dirección y un único sentido.

Si estudiamos el caso particular de lanzamiento de objetos, la aceleración que vamos a tener en cuenta es la aceleración de la gravedad “ $g$ ”.

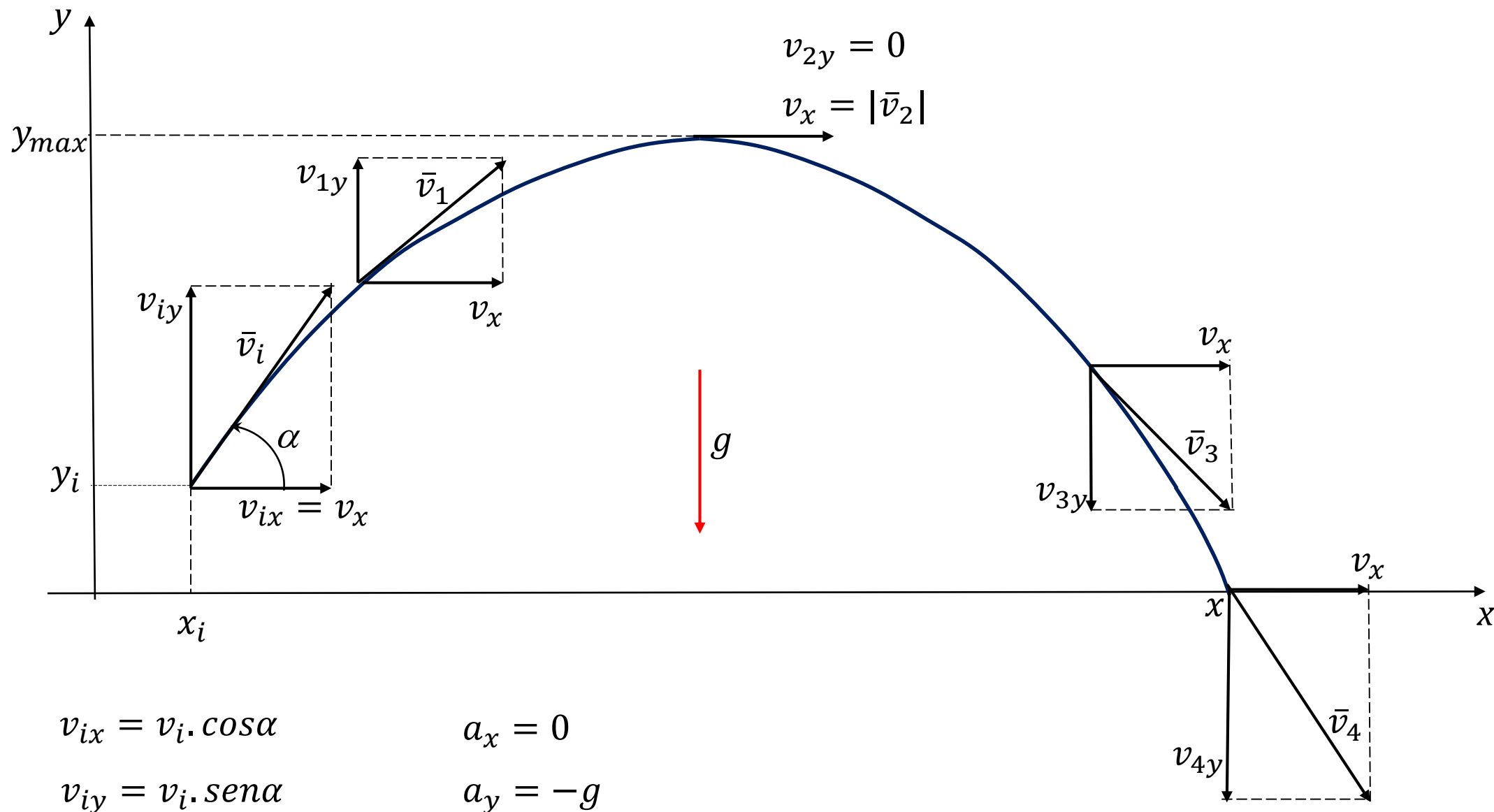
Luego, el análisis de éste tipo de movimiento se realiza como si fueran dos movimientos por separado.

Es decir, el movimiento según la dirección  $\hat{j}$  (o  $\hat{e}_y$ ) como caída libre o tiro vertical y según la dirección  $\hat{i}$  (o  $\hat{e}_x$ ) como un movimiento rectilíneo uniforme.

# MOVIMIENTO DE PROYECTILES



# MOVIMIENTO DE PROYECTILES



# ECUACIONES DE POSICIÓN Y VELOCIDAD

Las ecuaciones de movimiento serán:

$$\begin{cases} x = x_i + v_i \cdot \cos\alpha \cdot (t - t_i) \\ y = y_i + v_i \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot (t - t_i) - \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - t_i)^2 \end{cases}$$

Y las ecuaciones de velocidad serán:

$$\begin{cases} v_x = v_i \cdot \cos\alpha \\ v_y = v_i \cdot \operatorname{sen}\alpha - g \cdot (t - t_i) \end{cases}$$

# ECUACIÓN DE LA TRAYECTORIA

Como no hay aceleración en la dirección horizontal  $x$ , la componente  $x$  de la velocidad es constante, y como la aceleración en la dirección vertical  $y$  es  $g$ , las componentes de la posición y de la velocidad en esa dirección son idénticas a las ecuaciones para caída libre, con  $\alpha = 90^\circ$ .

Entonces el movimiento de proyectil se compone de la superposición de un movimiento en dirección  $x$  con velocidad constante y un movimiento en dirección  $y$  de caída libre: es el principio de superposición del movimiento.

La ecuación de la trayectoria, esto es la curva geométrica que describe el cuerpo durante el movimiento del proyectil, se puede obtener despejando el parámetro  $(t - t_i)$  de la ecuación en  $x$ , luego reemplazando en la ecuación para  $y$ :

$$(t - t_i) = \frac{(x - x_i)}{v_i \cdot \cos \alpha}$$

$$y = y_i + v_i \cdot \sin \alpha \cdot \frac{(x - x_i)}{v_i \cdot \cos \alpha} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left[ \frac{(x - x_i)}{v_i \cdot \cos \alpha} \right]^2$$

# ECUACIÓN DE LA TRAYECTORIA

Finalmente nos queda:

$$y = y_i + \tan\alpha \cdot (x - x_i) - \frac{g}{2 \cdot v_i^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot (x - x_i)^2$$

Si  $x_i = 0$ , es:

$$y = y_i + \tan\alpha \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_i^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2$$

que es la ecuación de una parábola, por lo tanto la trayectoria del proyectil es parabólica y queda totalmente conocida si se conoce  $v_i$  y  $\alpha$ .

La velocidad del proyectil es siempre tangente a la trayectoria en cualquier instante, por lo que la dirección y la magnitud de la velocidad en cualquier instante se puede calcular en forma geométrica de las ecuaciones:

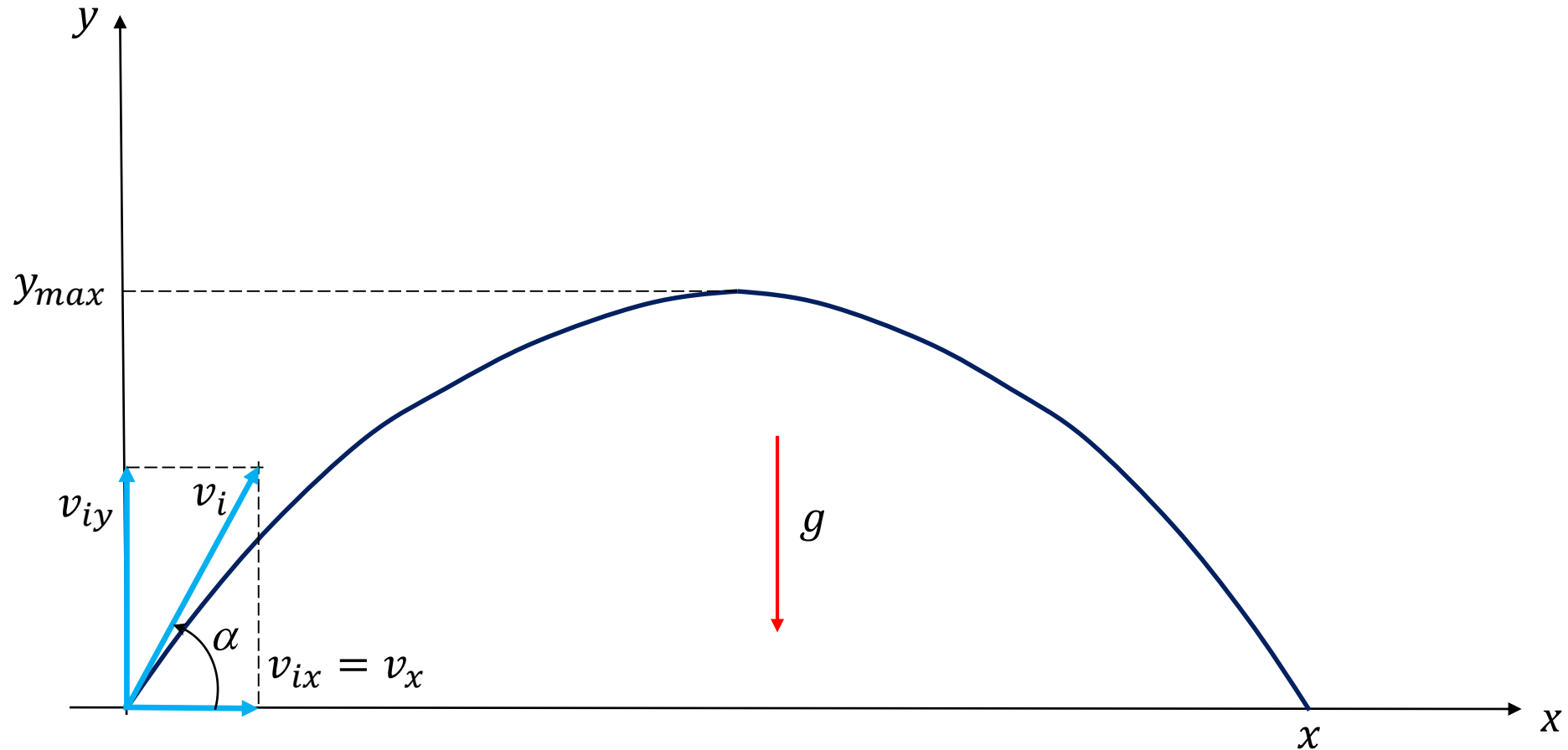
$$v = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}$$

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

# EJEMPLO 1

Para un proyectil que se lanza en el instante inicial  $t_i = 0$  desde el origen de coordenadas de referencia, con una velocidad inicial  $v_i$  formando un ángulo  $\alpha$  con la horizontal, calcular:

- a) La altura máxima ( $y_{max}$ ).
- b) La distancia horizontal ( $x$ ).



# EJEMPLO 1

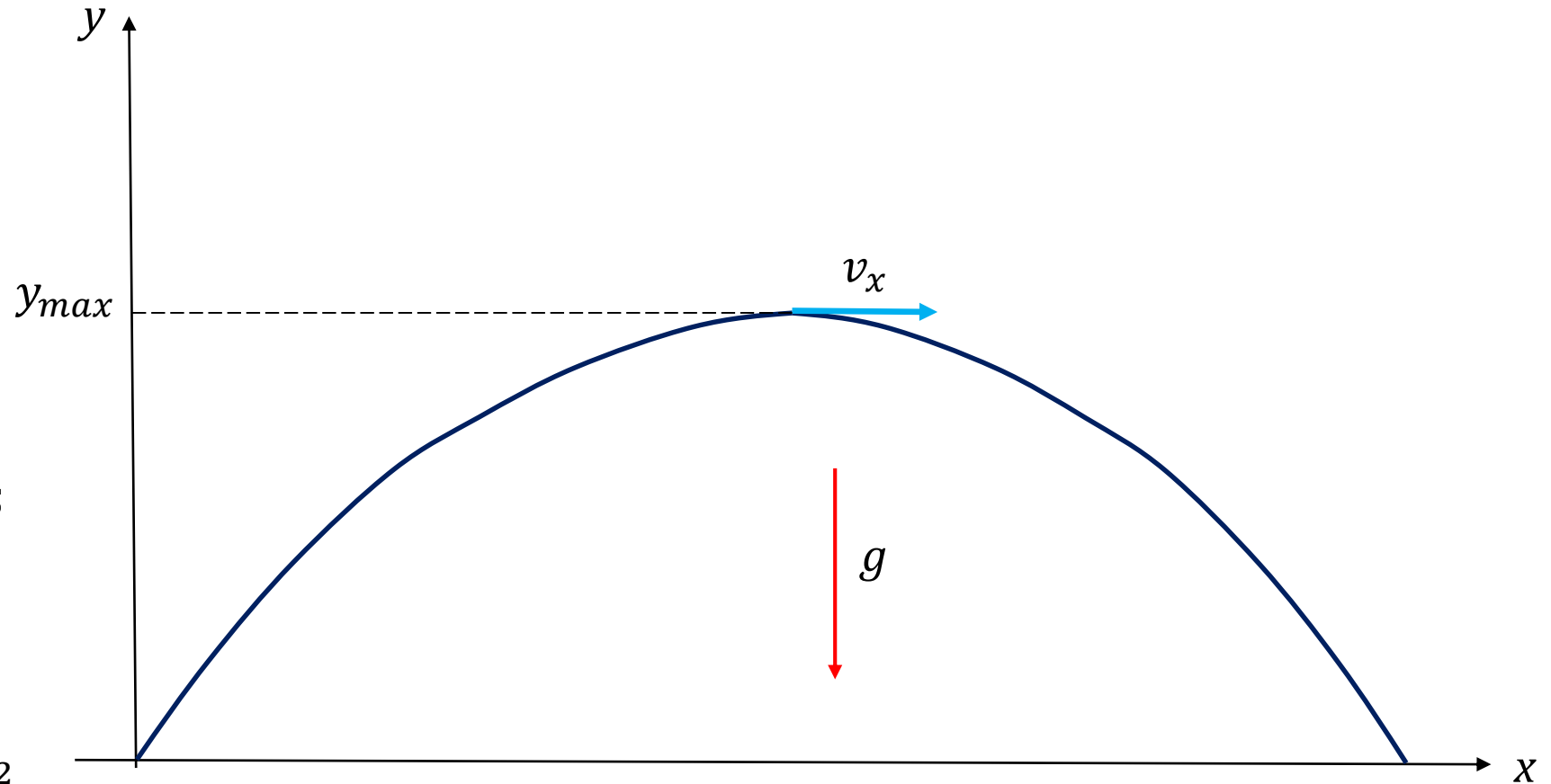
a) Cuando el proyectil alcanza su máxima altura, la componente  $y$  de la velocidad es cero ya que no sigue subiendo, además eso significa que la velocidad en esa posición es horizontal, entonces de  $v_y$  se obtiene:

$$v_y = 0 = v_i \cdot \text{sen} \alpha - g \cdot t$$

$$t = \frac{v_i}{g} \cdot \text{sen} \alpha$$

Que es el tiempo que el proyectil demora en alcanzar la altura máxima; luego reemplazamos en la ecuación horaria de  $y$ , y nos da la altura máxima:

$$y_{\max} = v_i \cdot \text{sen} \alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$



# EJEMPLO 1

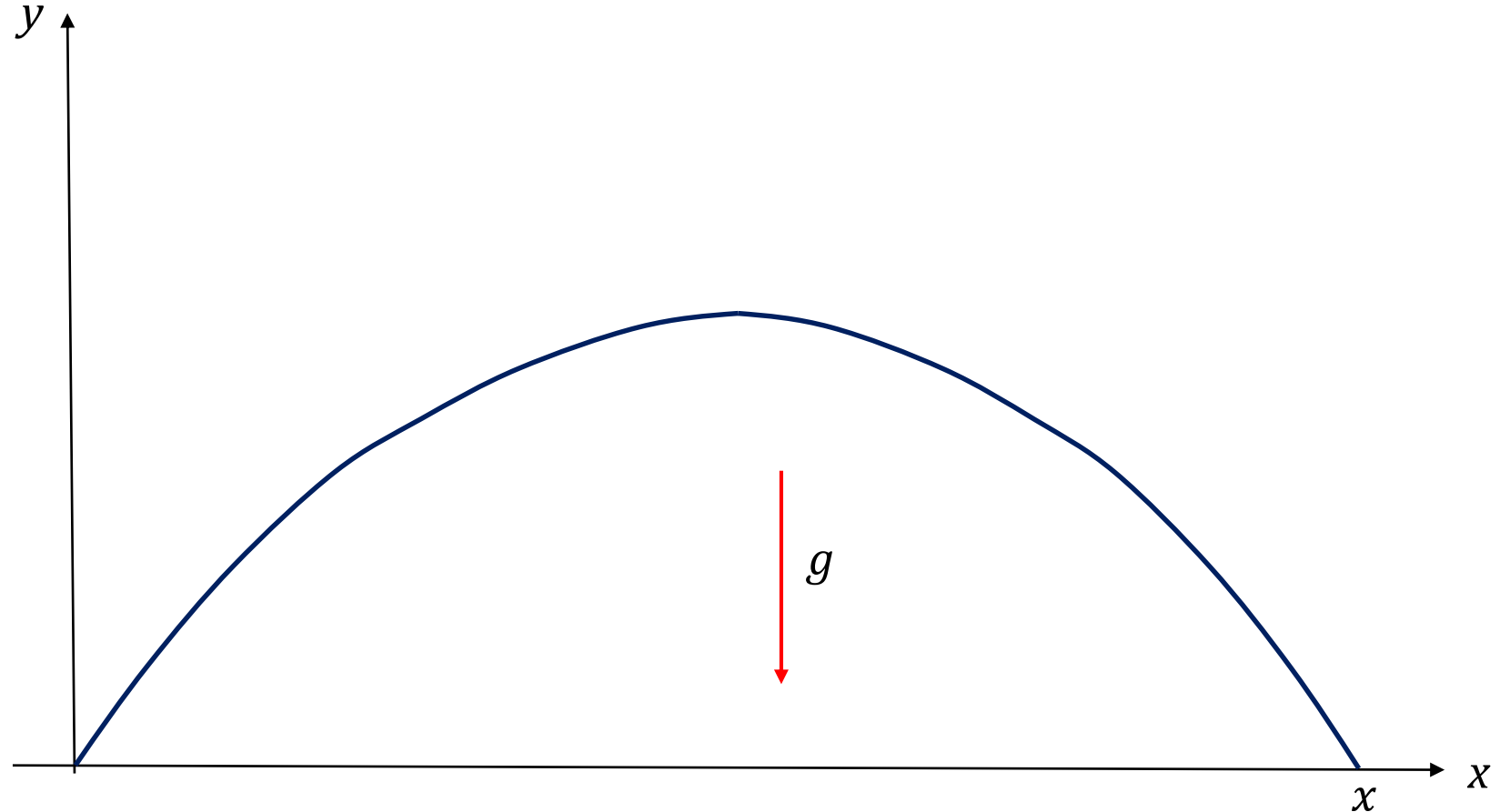
b) Para determinar la distancia horizontal, conocido también como alcance horizontal, usamos la condición que en esa posición el proyectil se encuentra en  $(x,y) = (x;0)$ , así que igualando la ecuación para  $y$  a cero se obtiene:

$$y = 0 = v_i \cdot \text{sen}\alpha \cdot t_1 - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_1^2$$

$$t_1 = 2 \cdot \frac{v_i}{g} \text{sen}\alpha$$

Que es el tiempo que el proyectil permanece en el aire; luego reemplazamos en la ecuación horaria de  $x$  y nos da el alcance horizontal:

$$x = v_i \cdot \text{cos}\alpha \cdot t_1$$



# EJEMPLO 1

Para determinar el alcance máximo, procedemos a reemplazar de a siguiente manera:

$$t_1 = 2 \cdot \frac{v_i}{g} \operatorname{sen} \alpha$$

Ahora reemplazamos en la ecuación horaria de  $x$  y nos da el alcance horizontal:

$$x = v_i \cdot \cos \alpha \cdot \left( 2 \cdot \frac{v_i}{g} \operatorname{sen} \alpha \right)$$

$$x = \frac{v_i^2}{g} \cdot \operatorname{sen} 2\alpha$$

De esta expresión para la distancia horizontal, se puede obtener el alcance máximo para una velocidad inicial  $v_i$  conocida, cuando  $\operatorname{sen} 2\alpha = 1$ , entonces:

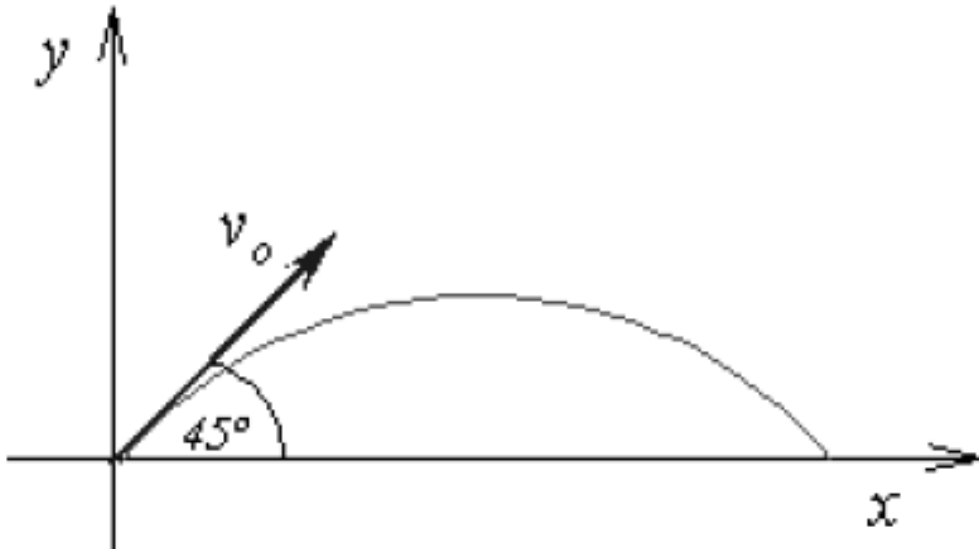
$$\operatorname{sen} 2\alpha = 1$$

$$2\alpha = 90^\circ$$

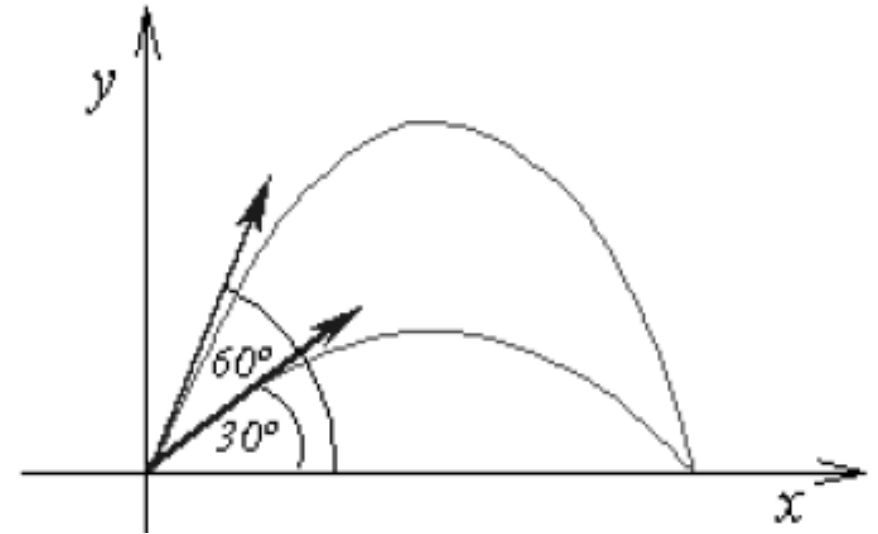
$$\alpha = 45^\circ$$

# EJEMPLO 1

El alcance máximo se produce para un ángulo de lanzamiento igual a  $45^\circ$  ; además para cualquier ángulo distinto de  $45^\circ$  se puede obtener un mismo alcance para dos ángulos complementarios, tales como  $\alpha = 30^\circ$  y  $\alpha = 60^\circ$ , situación que se ilustra en la siguiente figura:



Alcance máximo para un ángulo de lanzamiento igual a  $45^\circ$ .



Igual alcance para ángulos complementarios.

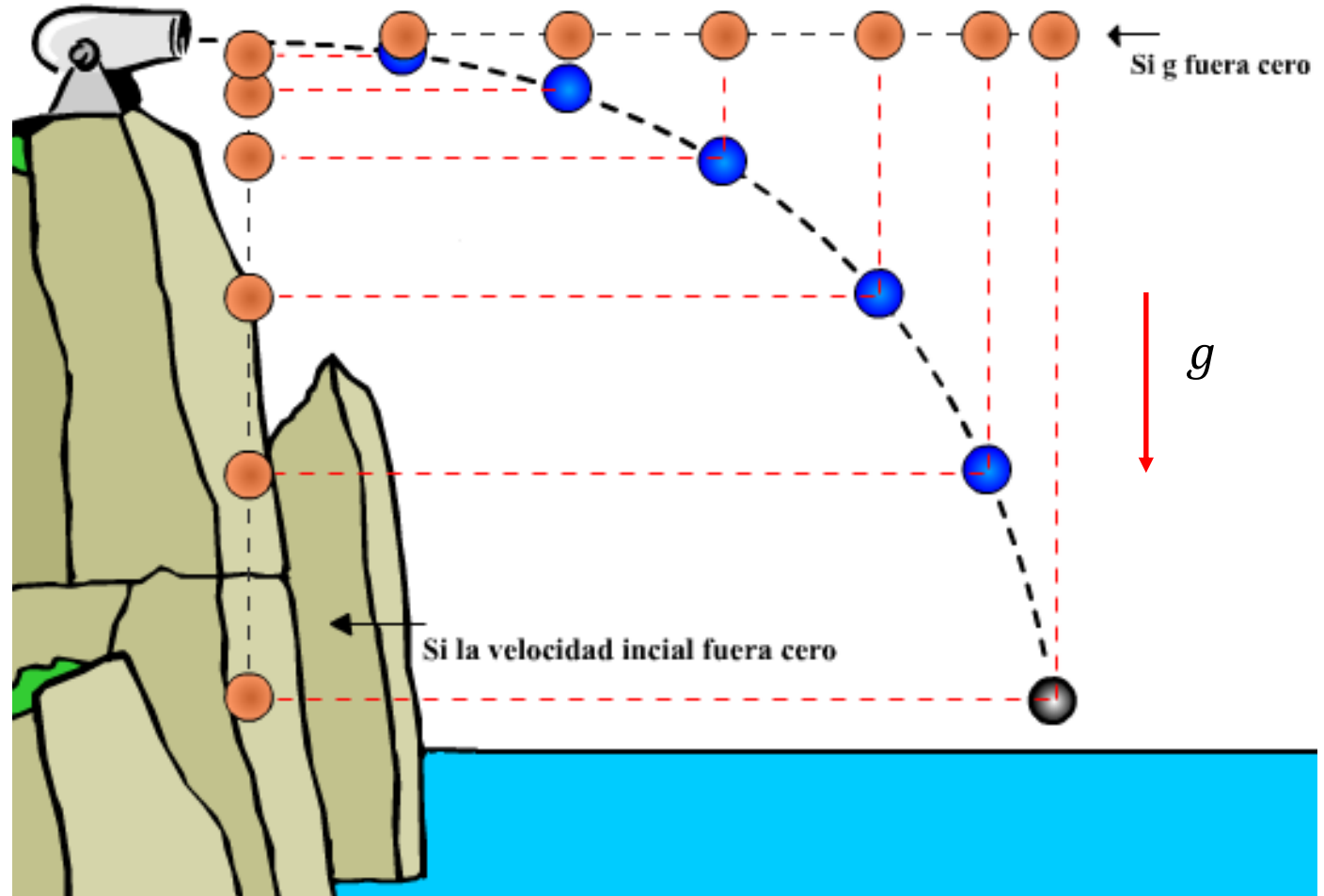
## EJEMPLO 2

Como ejemplo, en la figura se muestra el lanzamiento de un objeto con movimiento en el plano.

Este caso corresponde al de una partícula que se mueve con aceleración constante, es decir que su magnitud y dirección no cambian durante el movimiento.

La aceleración es la gravitatoria y el análisis se hace como caída libre en la dirección vertical y como movimiento rectilíneo uniforme en la dirección horizontal.

Se plantean las ecuaciones según la dirección analizada, correspondiente a cada movimiento.



## EJEMPLO 2

Se obtiene la posición en función del tiempo como:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$$

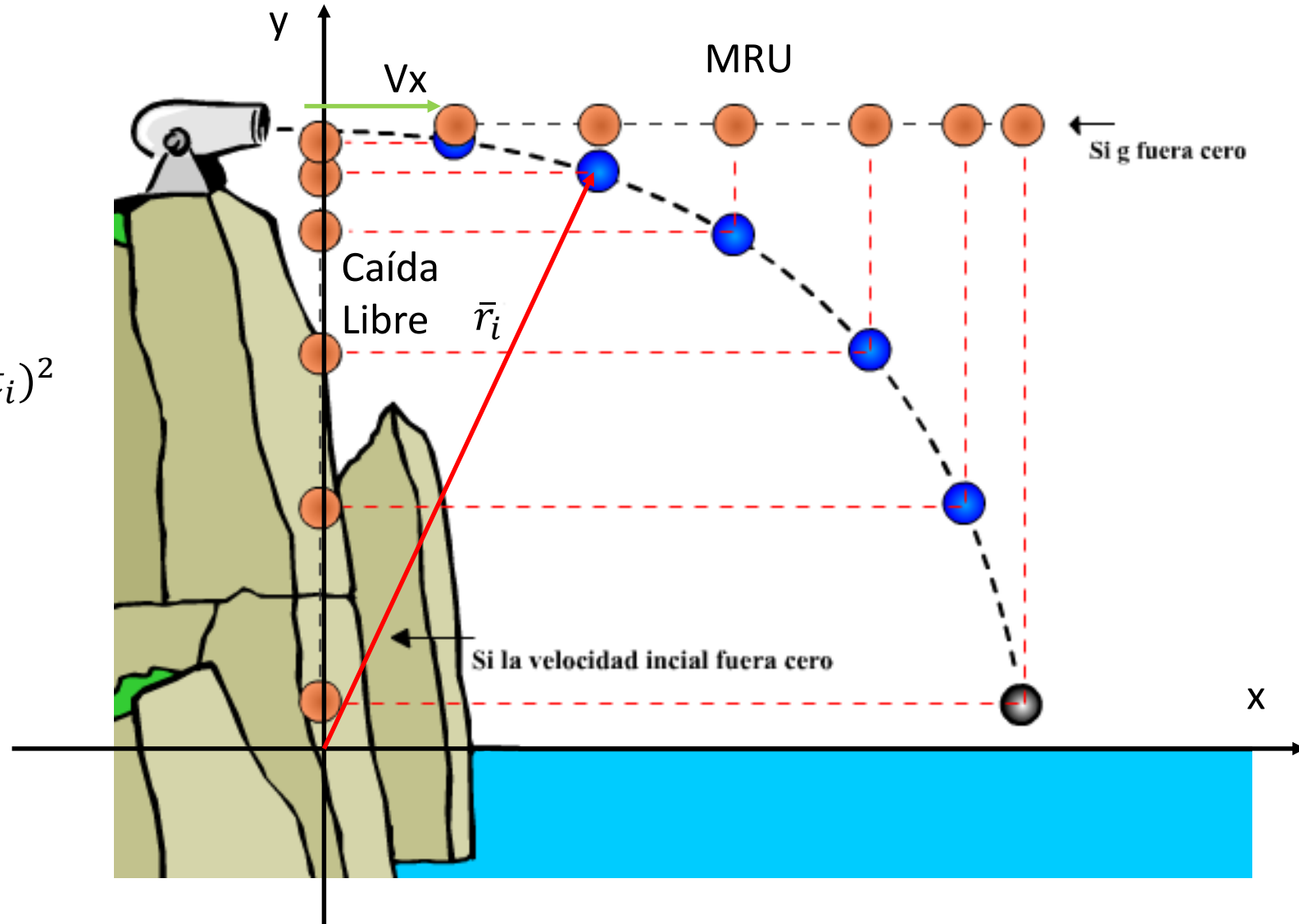
$$x(t) = x_i + v_{ix} \cdot (t - t_i)$$

$$y(t) = y_i + v_{iy} \cdot (t - t_i) + \frac{1}{2} \cdot g \cdot (t - t_i)^2$$

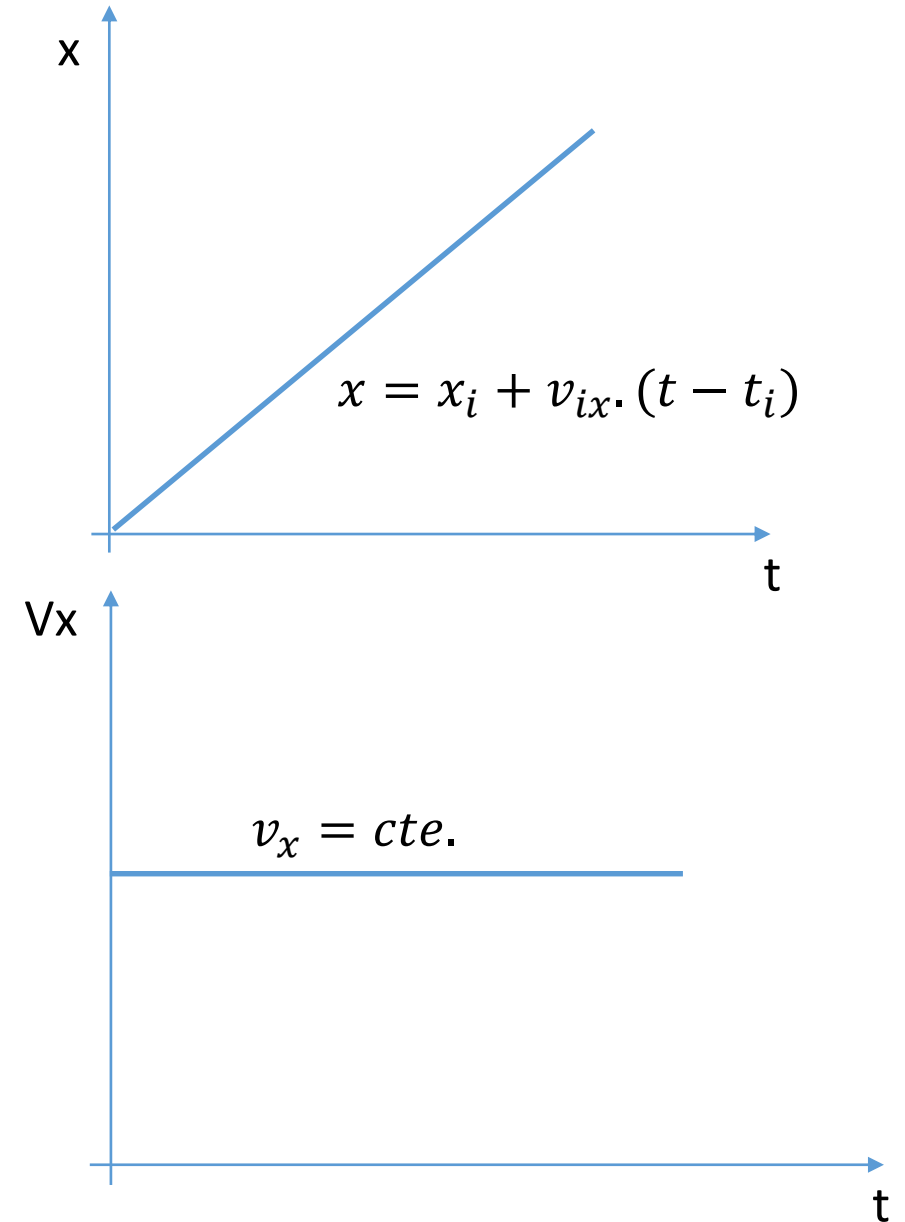
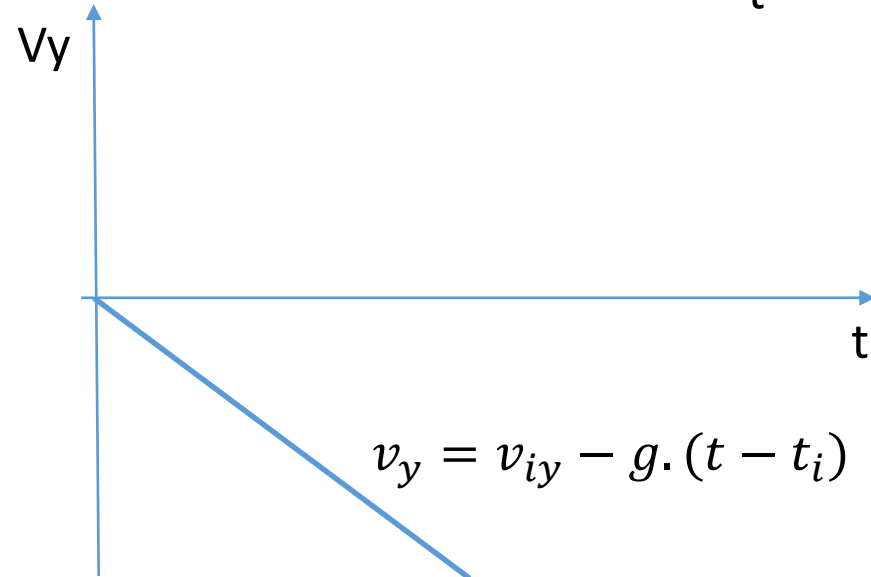
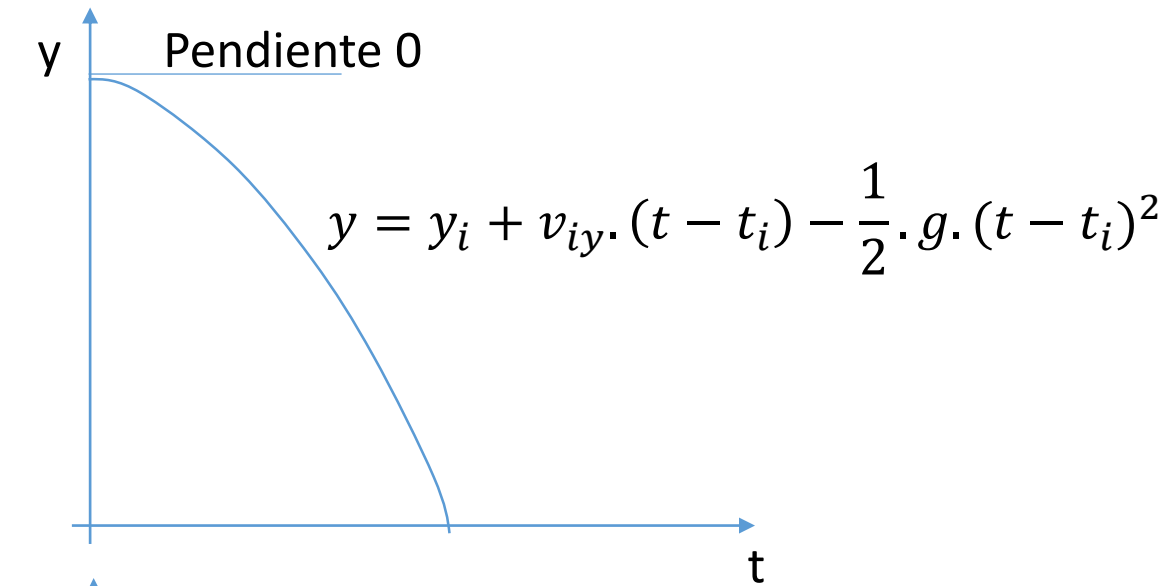
Las ecuaciones de velocidad serán:

$$v_x(t) = cte$$

$$v_y(t) = v_{iy} + g \cdot (t - t_i)$$



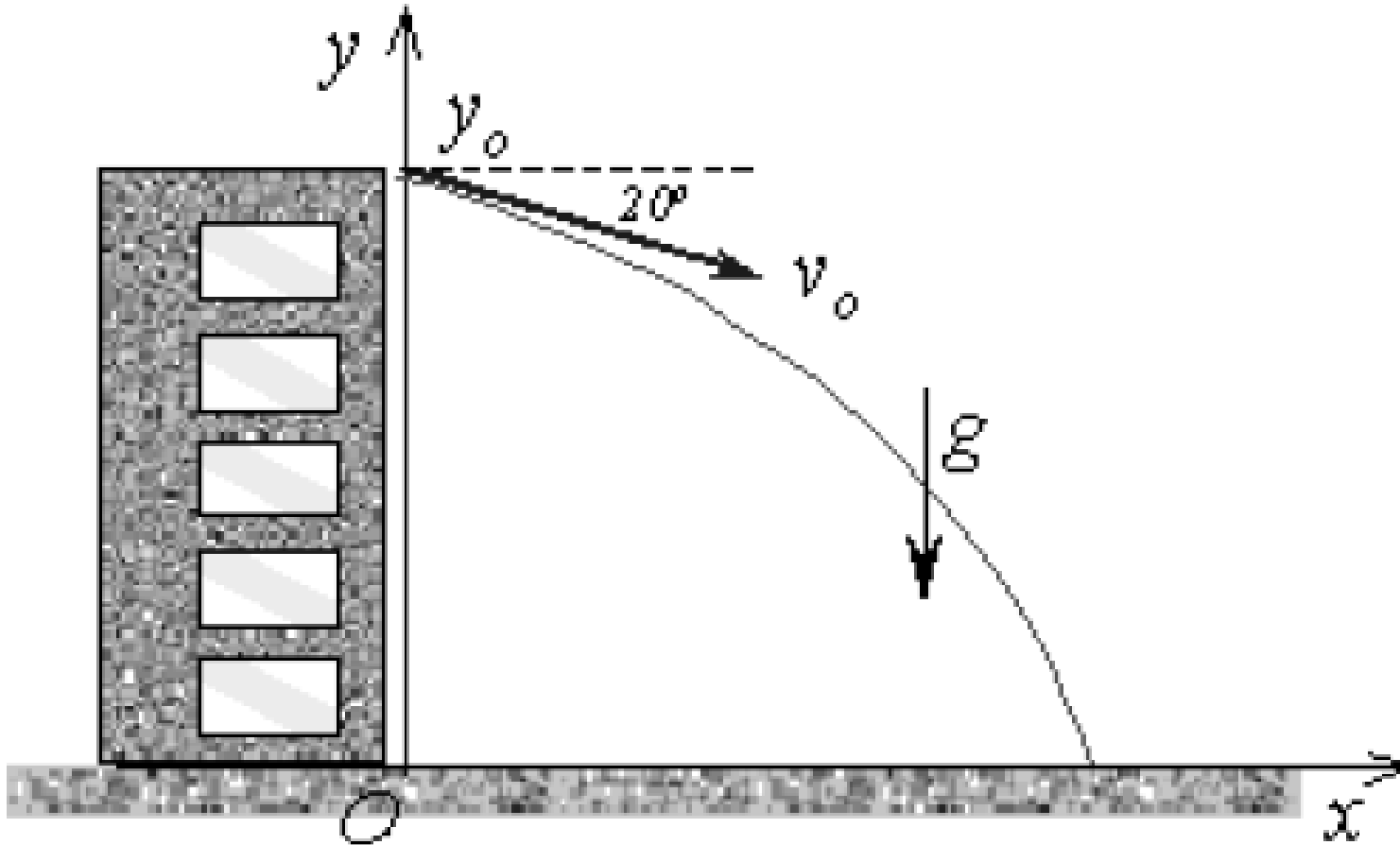
## EJEMPLO 2



## EJEMPLO 3

Se lanza una pelota desde la terraza de un edificio, con una rapidez inicial de  $10\text{m/s}$  en un ángulo de  $20^\circ$  debajo de la horizontal, y demora  $3\text{s}$  en llegar al suelo. Calcular:

- a) La distancia horizontal que recorre la pelota.
- b) La altura desde donde se lanzó.



## EJEMPLO 3

Reemplazando los datos iniciales en las ecuaciones generales para el movimiento de proyectil, se tiene:

$$\begin{cases} x = v_i \cdot \cos\alpha \cdot t \\ y = y_i - v_i \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{cases}$$

a) En la ecuación de desplazamiento horizontal, para  $t=3s$  es:

$$x = v_i \cdot \cos\alpha \cdot t = 10 \cdot \cos 20^\circ \cdot 3 = 10 \cdot (\cos 20^\circ) \cdot 3$$

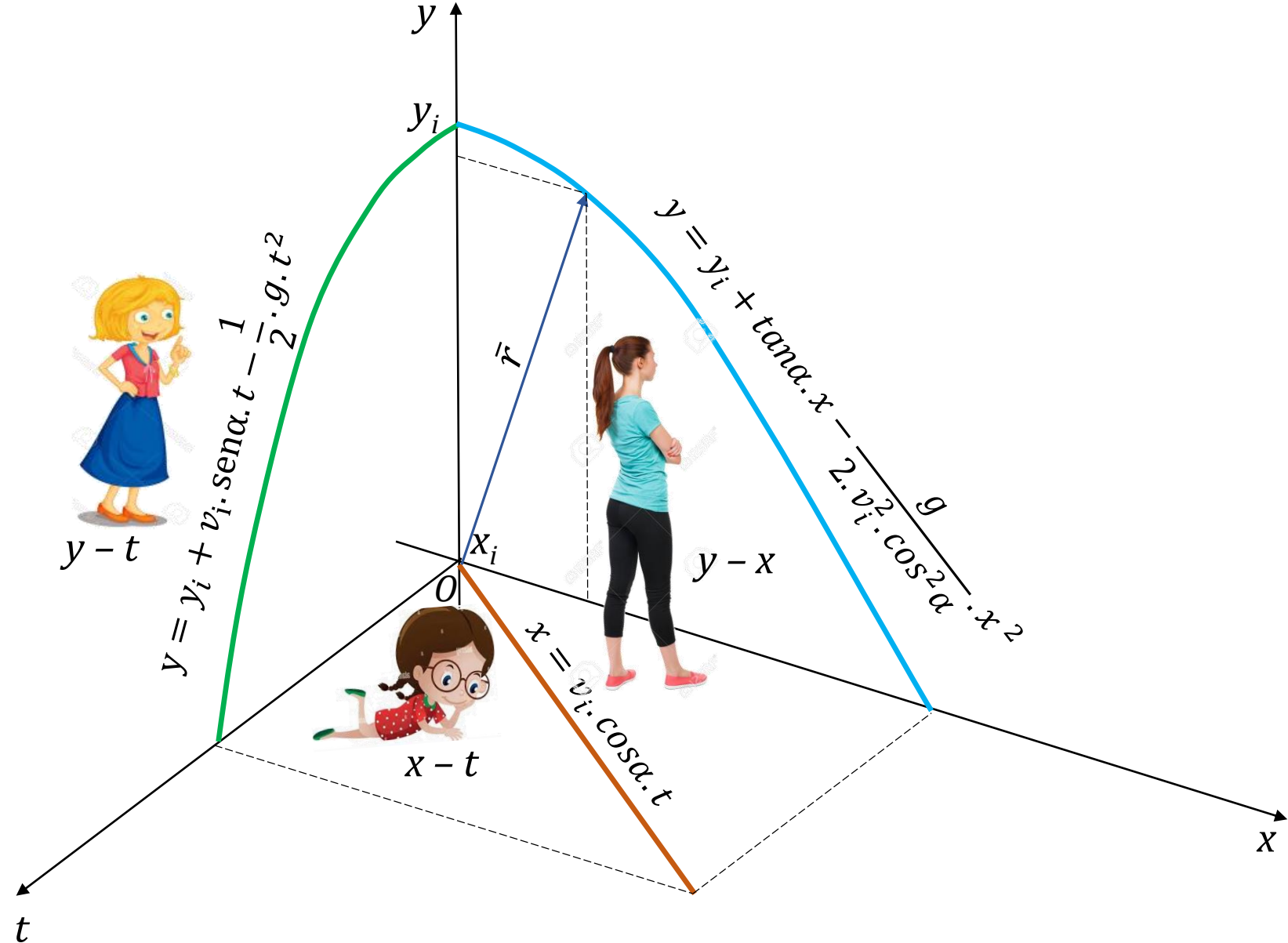
$$\mathbf{x = 28,19m}$$

b) En la ecuación de desplazamiento vertical, para  $t=3s$  es:

$$y = 0 = y_i - v_i \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = y_i - 10 \cdot (\sin 20^\circ) \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot 3^2$$

$$\mathbf{y_i = 54,36m}$$

# POSICIONES



The diagram illustrates the decomposition of an initial velocity vector  $v_i$  into its horizontal and vertical components. The horizontal component is labeled  $v_x = v_i \cdot \cos \alpha$  and the vertical component is labeled  $v_y = v_i \cdot \sin \alpha - g \cdot t$ . The diagram shows a coordinate system with axes  $V_x$  and  $V_y$ . A vector  $V_i$  is shown at an angle  $\alpha$  to the  $V_x$  axis. The horizontal component is labeled  $V_x - t$  and the vertical component is labeled  $V_y - t$ . A girl is standing next to the  $V_x$  axis and a boy is lying on the  $V_y$  axis.

$$v_y = v_i \cdot \sin \alpha - g \cdot t$$
$$v_x = v_i \cdot \cos \alpha$$

# ACELERACIONES

