

Fundamentos de radiación



Dipolo corto ideal

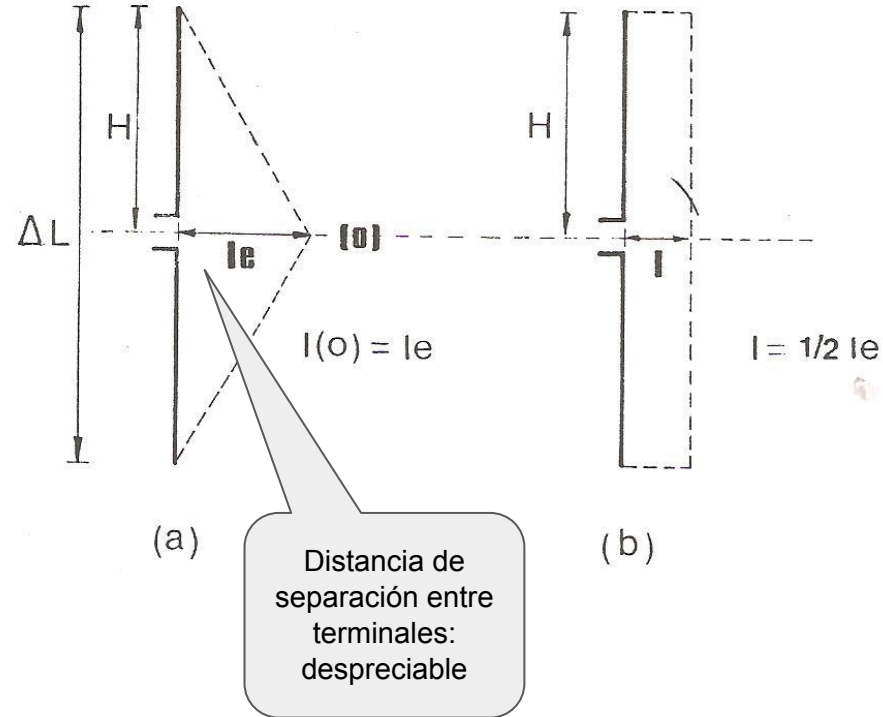
Es un dipolo de longitud pequeña comparada con la longitud de onda de trabajo.

Para su resolución, lo encontrado para un dipolo elemental es válido.

Es necesario conocer la distribución de corriente en el mismo.

En primera instancia se propone una distribución (lineal) con corriente máxima en el centro del dipolo que disminuye gradualmente hacia los extremos.

Luego se realiza otra aproximación con una distribución uniforme (constante).



Dipolo corto ideal

Consideraciones:

El error cometido resulta aceptable al suponer una distribución lineal y luego una uniforme. Luego la longitud del dipolo es muy pequeña comparada con la longitud de onda de la señal con la que opera la antena.

Con esto, se pueden extrapolar directamente los resultados obtenidos para el dipolo elemental:

$$P_{rad} \cong \frac{z_0 \beta^2 (\Delta L)^2}{6\pi} I_{ef}^2$$

$$R_{rad} \cong 80\pi^2 \left(\frac{\Delta L}{\lambda} \right)^2$$

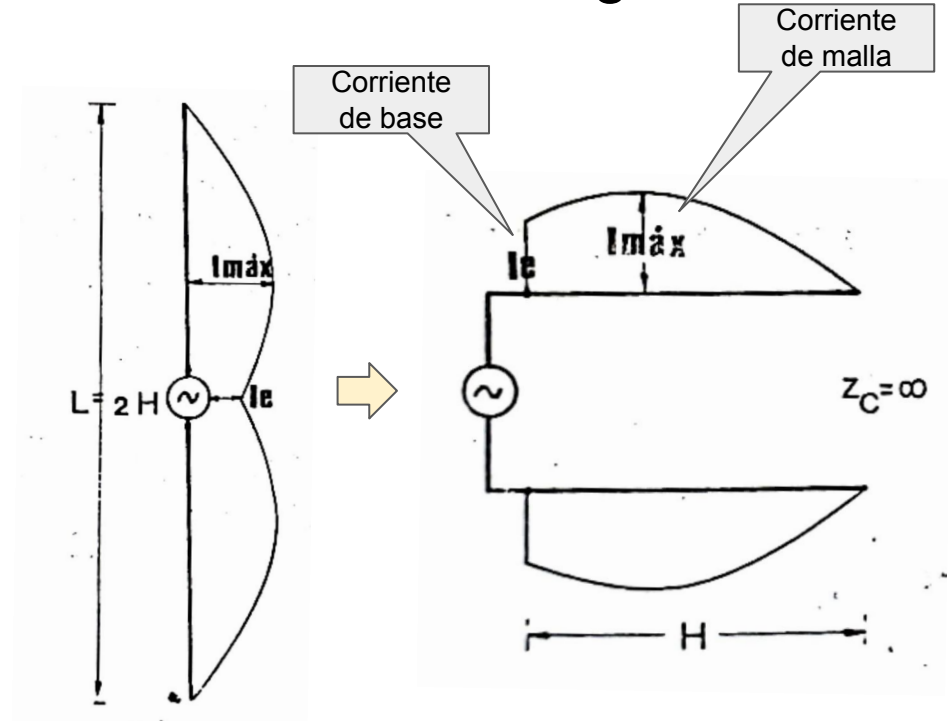
donde $dz = \Delta L = 2H$

Radiación de un dipolo infinitamente delgado

Es necesario conocer la distribución de corriente en la antena, no siempre es posible.

Hipótesis: Dist. Senoidal.

Onda estacionaria que se origina en una línea de transmisión abierta.



Radiación de un dipolo infinitamente delgado

La hipótesis fue confirmada y se verifica que la corriente tiene una distribución senoidal a lo largo del dipolo.

Monopolo superior:

$$I(z') = I_{\max} \text{sen}[\beta(H - z')]$$

Monopolo inferior:

$$I(z') = I_{\max} \text{sen}[\beta(H + z')]$$

donde: $\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \beta = \frac{\omega}{v}$

De acuerdo con la longitud "H", de cada monopolo, el máximo valor de la corriente, $I_{\max}$, quedará ubicado en cierto valor de la coordenada z' , la cual puede, o no, coincidir con el nivel (o)

Conocida la distribución se puede avanzar al cálculo de la radiación.

Cálculo del potencial vectorial

$$dA_z(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I(z') e^{-j\beta R}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dz'$$

Porque nos interesa el
campo lejano

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = |\vec{r} - z'| \cong r \text{ para el denominador}$$

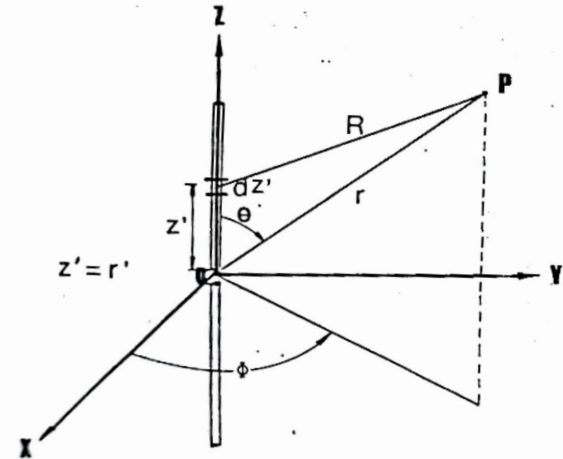
$$R = r - z' \cos \theta \text{ para la fase}$$

$$dA_z(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I(z') e^{-j\beta r} e^{j\beta z' \cos \theta}}{r} dz'$$

$$A_z(\vec{r}) = \frac{\mu I_{\max}}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r}$$

$$\left\{ \int_0^H \text{sen}[\beta(H - z')] e^{j\beta z' \cos \theta} dz' + \int_{-H}^0 \text{sen}[\beta(H + z')] e^{j\beta z' \cos \theta} dz' \right\}$$

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$



Cálculo del potencial vectorial

El potencial vectorial resulta:

$$A_z(\vec{r}) = \frac{\mu I_{\max}}{2\pi\beta} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \left[\frac{\cos(\beta H \cos \theta) - \cos \beta H}{\sin^2 \theta} \right]$$

Campo magnético y eléctrico

Para el campo magnético:

$$H_{\phi} = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial r} \sin \theta$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-j\beta r}}{r} \right) = - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{j\beta}{r} \right) e^{-j\beta r}$$

$$H_{\phi} = j \frac{I_{\max} e^{-j\beta r}}{2\pi r} \left[\frac{\cos(\beta H \cos \theta) - \cos(\beta H)}{\sin \theta} \right]$$

Para el campo eléctrico y considerando que en la zona lejana, la propagación tiende al modo TEM:

$$E_{\theta} = Z_o H_{\phi} = 120\pi H_{\phi}$$

$$E_{\theta} = j \frac{60 I_{\max} e^{-j\beta r}}{r} \left[\frac{\cos(\beta H \cos \theta) - \cos(\beta H)}{\sin \theta} \right]$$

Estas expresiones describen el campo electromagnético radiado por un dipolo simétrico infinitamente delgado, de largo cualquiera $L = 2H$

Potencia radiada por un dipolo

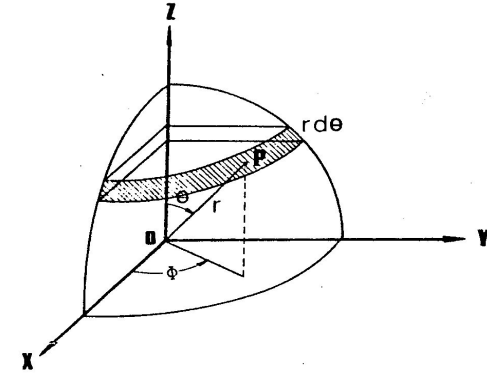
$$P_{rad} = I_{\max}^2 R_{rad}$$

$$P_{rad} = \oiint_S \bar{\pi}_{medioactivo} \cdot d\bar{s}$$

$$\pi_{medioact} = E_{ef} H_{ef}^*$$

$$\pi_{rmedioact} = \frac{z_0 I_{\max}^2}{8\pi^2 r^2} \left[\frac{\cos(\beta H \cos \theta) - \cos \beta H}{\sin \theta} \right]^2$$

$$P_{rad} = \frac{z_0 I_{\max}^2}{2\pi} \int_0^\pi \frac{[\cos(\beta H \cos \theta) - \cos \beta H]^2}{\sin \theta} d\theta$$



$$ds = 2\pi r \sin \theta r d\theta = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta$$

La potencia radiada
 dependerá del
 largo del dipolo

Resistencia de Radiación

Se puede definir a través de la corriente de base o la corriente de malla:

$$P_{rad} = R_{radbase} I_{0ef}^2$$

$$P_{rad} = R_{radmalla} I_{máxef}^2$$

Dado que la corriente de base puede ser nula, usaremos la corriente de malla:

$$R_{radmalla} = 120 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[\cos(\beta H \cos \theta) - \cos \beta H]^2}{\sin \theta} d\theta$$

Resistencia de Radiación

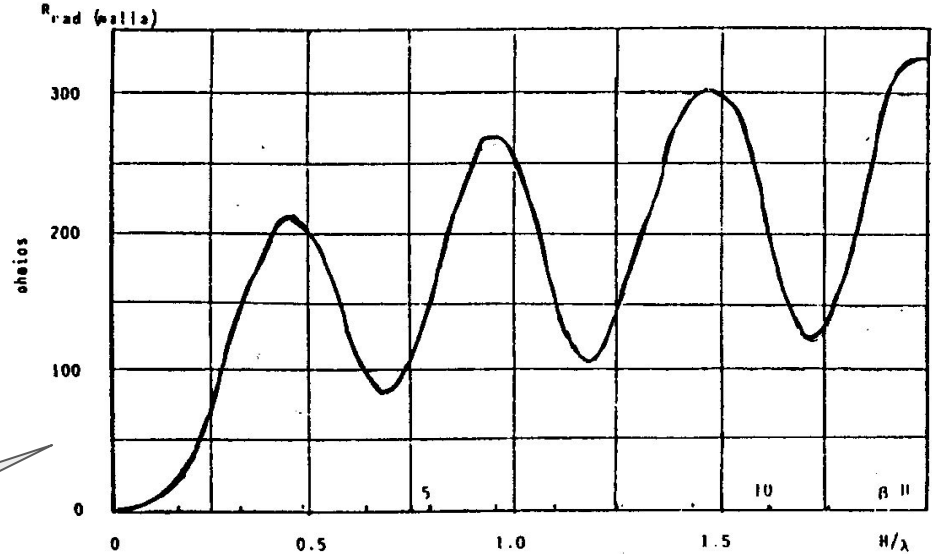
$$R_{radmalla} = 30 \left[\begin{aligned} &senb[Si(2b) - Si(b)] + (1 + \cos b)S_1(b) \\ &- senbSi(b) + S_1(b) - \cos b[S_1(2b) - S_1(b)] \end{aligned} \right]$$

$$b = 2\beta H$$

$$S_1(x) = \int_0^x \frac{1 - \cos v}{v} dv$$

$$Si(x) = \int_0^x \frac{sen v}{v} dv$$

En general la resistencia de radiación dependerá del largo H de cada monopolo



Resistencia de radiación de un dipolo simétrico referido a la corriente de malla

Dipolo de media longitud de onda

Caso particular, de aplicación frecuente. Un dipolo, infinitamente delgado, de media longitud de onda, de tipo rectilíneo y simétrico.

$$\beta H = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$H_{\phi} = j \frac{I_{m\acute{a}x} e^{-j\beta r}}{2\pi r} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right]$$

$$E_{\theta} = j \frac{60 I_{m\acute{a}x} e^{-j\beta r}}{r} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right]$$

El campo radiado será, máximo en el plano perpendicular a su eje.

Dipolo de media longitud de onda

$$P_{rad} = \frac{Z_0 I_{máx}^2}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} d\theta$$

$$P_{radmonopolo} = 30 I_{máx}^2 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} d\theta$$

$$P_{radmonopolo} = 36,5 I_{máxef}^2$$

$$R_{radmonopolo} = 36,5 \Omega \quad R_{rad} = 73 \Omega$$

Sistematización de Schelkunoff

Schelkunoff propuso una sistematización para el cálculo de la radiación.

- 1.** La variación de distancia entre el punto de observación por los diferentes elementos de corriente, se desprecia.
- 2.** Se desprecian todas las componentes de campo que decaigan más rápidamente que $1/r$.
- 3.** La variación de fase por variación de distancia entre el punto de observación y los diferentes elementos de corrientes deben considerarse.

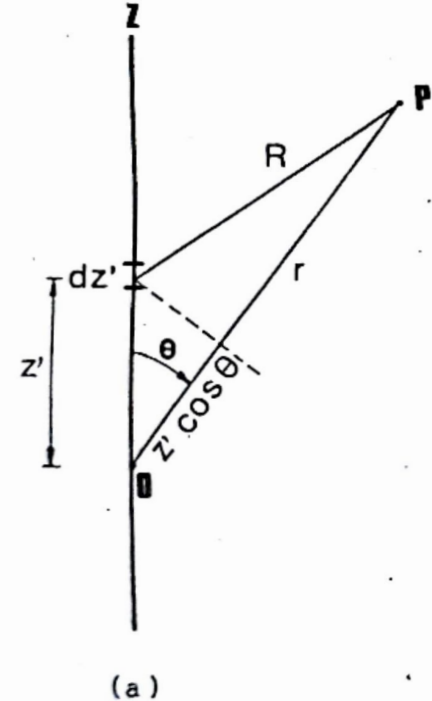
Caso elemento alineado con eje z y caso general.

Sistematización de Schelkunoff

A los efectos del cómputo de magnitudes de puede aproximar:

$$R = |\bar{r} - \bar{r}'| \cong r$$

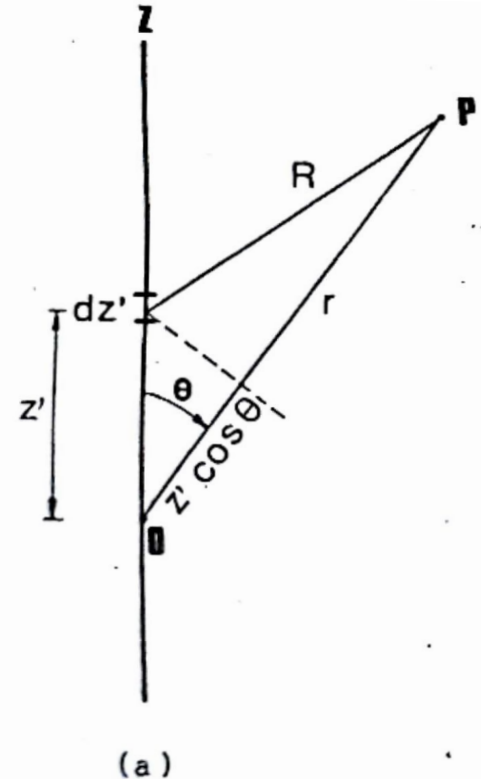
Las diferencias existentes en la dirección del radio vector R vistas desde el punto de observación P a los diferentes elementos de corriente existentes sobre el radiador son despreciables, debido a la lejanía de P .



Sistematización de Schelkunoff

La cuestión más importante es la que se refiere a las diferencias de fase entre cada elemento del radiador y el punto de observación P. Puede considerarse en buena aproximación, que se deben a la diferencia de distancia dada por:

$$R = r - z' \cos \theta$$



Sistematización de Schelkunoff

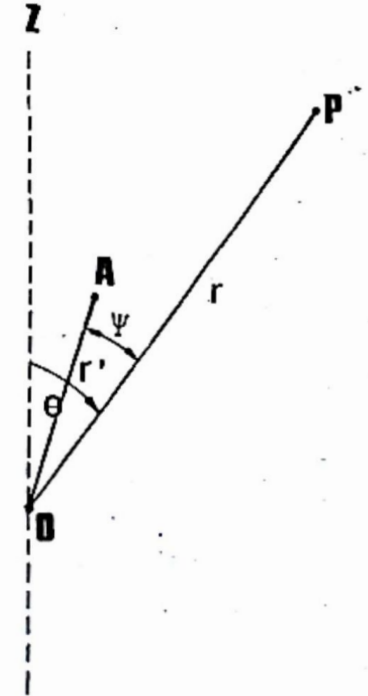
En el caso b, más general:

$$R \cong r - r' \cos \psi$$

donde

$$\cos \psi = \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') + \cos \theta \cos \theta'$$

Apéndice II. Capítulo II. Puliafito III.



(b)

Sistematización de Schelkunoff

Cálculo del potencial vectorial:

$$\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\tau'} \bar{J}_c(\bar{r}') \frac{e^{-j\beta R}}{R} d\tau'$$

$$\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \int_{\tau'} \bar{J}_c(\bar{r}') e^{j\beta r' \cos \psi} d\tau'$$

$$\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{j\beta r}}{r} \bar{N}(\bar{r})$$

$$\bar{N}(\bar{r}) = (N_r, N_\theta, N_\phi)$$

Se define un
nuevo vector.

Sistematización de Schelkunoff

Como el modo de propagación del campo lejano debe ser TEM:

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{A} = \frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \right] \bar{\mu}_\theta + \frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \bar{\mu}_\phi$$

$$H_\theta \cong -\frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) = -\frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \left(A_\phi + r \frac{\partial A_\phi}{\partial r} \right)$$

$$H_\theta \cong -\frac{1}{\mu} \frac{\partial A_\phi}{\partial r} \cong -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-j\beta r}}{r} \right) N_\phi \cong j \frac{\beta}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} N_\phi$$

$$H_\phi = \frac{1}{\mu} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) \cong -j \frac{\beta}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} N_\theta$$

$$H_r = 0$$

Sistematización de Schelkunoff

Para el campo eléctrico:

$$\bar{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} (\nabla_x \bar{H}) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r H_\phi) \right] \bar{\mu}_\theta +$$

$$\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] \bar{\mu}_\phi$$

$$E_\theta = -\frac{j\omega\mu}{4\pi r} e^{-j\beta r} N_\theta$$

$$E_\phi = -\frac{j\omega\mu}{4\pi r} e^{-j\beta r} N_\phi$$

$$E_r = 0$$

Sistematización de Schelkunoff

Cálculo de la potencia radiada:

$$\bar{\pi} = \bar{E}x\bar{H} = (0, E_{\theta}, E_{\phi})x(0, H_{\theta}, H_{\phi})$$

$$\bar{\pi} = E_{\theta}H_{\phi}\bar{\mu}_r + E_{\phi}H_{\theta}\bar{\mu}_r$$

$$\pi_{medactivo} = E_{ef}H_{ef}^*$$

$$\pi_{medactivo} = \frac{1}{2}E_{\theta}H_{\phi}^* + \frac{1}{2}E_{\phi}H_{\theta}^*$$

$$\pi_{medactivo} = \frac{1}{2}z_0H_{\phi}H_{\phi}^* + \frac{1}{2}z_0H_{\theta}H_{\theta}^*$$

Sistematización de Schelkunoff

Cálculo de la potencia radiada:

$$\pi_{rmedioactivo} = E_{ef} H_{ef}^*$$

$$\pi_{rmedioactivo} = \frac{1}{2} z_0 |H_\phi|^2 + \frac{1}{2} z_0 |H_\theta|^2$$

$$\pi_{rmedioactivo} = \frac{1}{8} \frac{z_0}{(\lambda r)^2} \left[|N_\phi|^2 + |N_\theta|^2 \right]$$

Sistematización de Schelkunoff

$$P_r = \oint_S \bar{\pi}_{rmedioactivo} \cdot d\bar{s}$$

$$ds = r^2 \sin\theta d\phi d\theta$$

$$P_r = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \pi_{rmedioactivo} r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

$$P_r = \frac{Z_0}{8\lambda^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left[|N_\phi|^2 + |N_\theta|^2 \right] \sin\theta d\theta d\phi$$

$$P_r = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} U(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi$$

$$P_r = \int_0^{4\pi} U(\theta, \phi) d\Omega$$

Se introduce el concepto de “intensidad de radiación” como la potencia por unidad de ángulo sólido [Watt/estereoradián].

La intensidad de radiación y los campos radiados son graficados para mostrar las propiedades direccionales de las antenas.

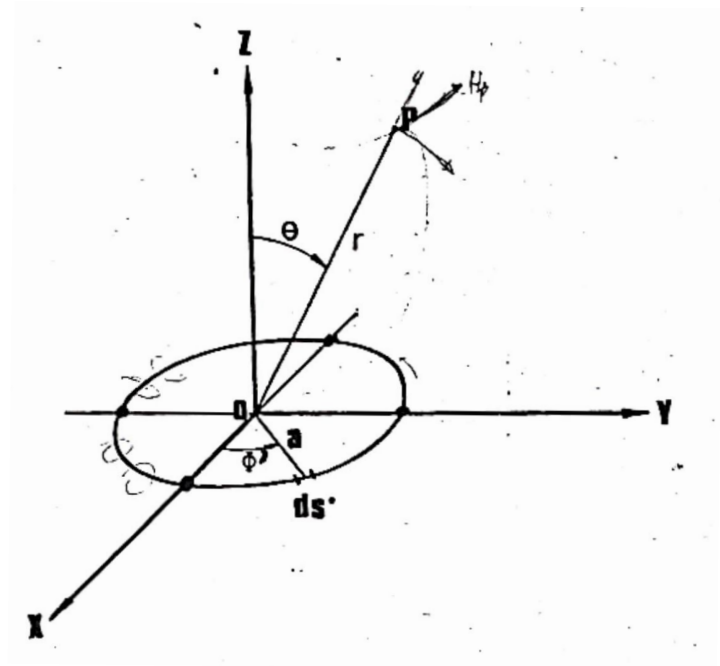
Radiación de una espira pequeña

En un tiempo dado, la corriente representada por su faser es la misma en todos los puntos de la espira.

La simetría de este caso es cilíndrica, la radiación depende de r y θ .

Las coordenadas de un elemento de corriente serán:

$$\left\{ \begin{array}{l} r' = a \\ \theta' = \frac{\pi}{2} \\ \phi' \end{array} \right.$$



Radiación de una espira pequeña

Ángulo
formado
entre $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$

$$\cos \psi = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi')$$

por simetría tomamos $\phi = 0$

$$\cos \psi = \sin \theta \cos \phi'$$

$$\bar{N}(\bar{\mathbf{r}}) = \int_{\tau'} \bar{J}_c(\bar{\mathbf{r}}') e^{j\beta r' \cos \psi} d\tau' \quad \bar{I} = I_0 \bar{\mu}_\phi$$

$$N_\phi = I_0 \int_0^{2\pi} e^{j\beta r' \cos \psi} r' d\phi' \quad \bar{J}_c(\bar{\mathbf{r}}') d\tau' = I_0 \bar{\mu}_\phi r' d\phi'$$

$$N_\theta = 0$$

Radiación de una espira pequeña

Resolviendo:

$$N_{\phi} = j\beta\pi I_0 a^2 \sin\theta$$

$$U(\theta) = \frac{Z_0}{8\lambda^2} |N_{\phi}|^2 = \frac{Z_0}{32} (\beta a)^4 I_0^2 \sin^2\theta$$

$$P_r = \frac{1}{4} Z_0 (\beta a)^4 I_0^2$$

$$R_{rad} = 20\pi^2 (\beta a)^4 \cong 197(\beta a)^4 \quad \text{si } \beta a < 1,6$$

Antenas de cuadro



Expresiones simplificadas de la resistencia de radiación:

a) Pequeñas espiras:

$$\begin{cases} R_{rad} \cong 197(\beta a)^4 \text{ ohmios} \\ \beta a < 1,6 \end{cases}$$

b) Espiras medianas y grandes:

$$\begin{cases} R_{rad} \cong 592 \beta a \text{ ohmios} \\ \beta a > 1,6 \end{cases}$$

Si la antena de cuadro está constituida por “n” espiras y es de tamaño pequeño:

$$R_{rad} \cong 197n^2(\beta a)^4 \text{ ohmios}$$

Según Alford y Kandoian, los resultados obtenidos, para antenas circulares, pueden extenderse al caso de las antenas de cuadro de sección cuadrada, siempre que las áreas, en ambos casos, sean iguales entre sí y cumplan con la condición de que $A < 0,01\lambda^2$.

Referencias

- Apuntes de cátedra - Mgter. Ing. Sergio Garassino
- Puliafito, Salvador. *El Campo Electromagnético -PI*. Idearium, Universidad de Mendoza, 1987.
- Jordan, Edward y Balmain, Keith. *Ondas electromagnéticas y sistemas radiantes*. Paraninfo, 1978.
- Zahn, Markus. *Teoría Electromagnética*. McGraw-Hill, 1991.
- Puliafito, Salvador. *Radiación electromagnética-PIII*. Idearium, Universidad de Mendoza, 1980.
- Balanis, Constantine A. *Antenna theory: analysis and design*. John Wiley & Sons, 2016.