

Fundamentos de radiación



Los potenciales electromagnéticos retardados

No es posible continuar separando los procesos de cálculo de E y H, tal como se hiciera en el régimen estacionario. Es necesario conocer las fuentes.

Existe cierta interdependencia de las fuentes de campo, J_c y ρ .

$$\nabla \cdot J_c = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Lorentz estipula que las ecuaciones de Maxwell debe explicar no sólo la propagación electromagnética sino también su generación a través del proceso de radiación.

Los potenciales electromagnéticos retardados, según Lorentz:

Consideraciones:

- Medio dieléctrico ideal
- Ausencia de distribuciones de cargas volumétricas.

Las ecuaciones de Maxwell, para este caso son:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Los potenciales electromagnéticos retardados, según Lorentz:

Hay que suponer ahora que puede existir un campo potencial Vectorial **A** (Retardado), a partir del cual podemos deducir **B**, esto es:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Relacionándola con el rotor del campo eléctrico se obtiene:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Los potenciales electromagnéticos retardados, según Lorentz:

El campo suma resulta irrotacional y puede suponerse que proviene de cierta función potencial escalar “ Φ ”:

$$E + \frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla \Phi$$

$$E = -\nabla \Phi - \frac{\partial A}{\partial t}$$

Este resultado es más general:

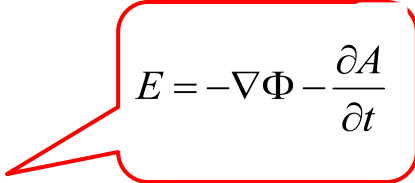
- Campo compuesto con componentes rotacionales e irrotacionales.

Los potenciales electromagnéticos retardados, según Lorentz:

Ahora habría que describir el potencial vectorial retardado “**A**” y luego al potencial escalar retardado “**Φ**”.

$$\nabla \times H = Jc + \varepsilon \cdot \frac{\partial E}{\partial t} = Jc + \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \Phi - \frac{\partial A}{\partial t} \right)$$

$$\nabla \times \bar{B} = \mu \cdot J\bar{c} - \mu\varepsilon \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mu\varepsilon \cdot \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$


$$E = -\nabla \Phi - \frac{\partial A}{\partial t}$$

Los potenciales electromagnéticos retardados, según Lorentz:

Por otro lado, se debe cumplir que:

$$\nabla \times B = \nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$$

Entonces se puede plantear la igualdad:

$$\nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A = \mu \cdot Jc - \mu\varepsilon \cdot \nabla \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

Los potenciales electromagnéticos retardados, según Lorentz:

Es en esta igualdad donde Lorentz, postula que:

$$\nabla(\nabla \cdot A) = -\mu\varepsilon \cdot \nabla \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

es decir:

$$\nabla \cdot A = -\mu\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

y es conocida como “condición de Lorentz”.

Los potenciales electromagnéticos retardados, según Lorentz:

De los otros términos se deduce que la ecuación diferencial contiene algunos términos que podrían formar un D'Alambertiano:

$$\nabla^2 A - \mu\epsilon \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu \cdot Jc$$

$$\boxed{\square} A = -\mu \cdot Jc$$

Los potenciales electromagnéticos retardados, según Lorentz:

Para el resto de las ecuaciones:

$$E + \frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla\Phi$$

↓

$$\nabla \cdot \left(-\nabla\Phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon}$$

de donde:

$$\nabla^2\Phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Los potenciales electromagnéticos retardados, según Lorentz:

$$\nabla^2 \Phi - \frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = - \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\nabla^2 \Phi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = - \frac{\rho}{\epsilon}$$

Condición de
Lorentz

$$\left[\begin{array}{c} - \\ - \end{array} \right] \Phi = - \frac{\rho}{\epsilon}$$

Los potenciales electromagnéticos retardados, según Lorentz:

El planteo permite arribar a estas ecuaciones:

$$B = \nabla \times A$$



$$E = -\nabla\Phi - \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\Phi} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \\ \boxed{A} = -\mu \cdot J_c \end{array} \right.$$

Estas ecuaciones describen los potenciales retardados en forma de ecuaciones de onda (Ecuaciones diferenciales), no homogéneas y dependientes de las funciones de excitación.

Los potenciales electromagnéticos retardados, según Lorentz:

Las soluciones a esas ecuaciones de onda son del tipo:

$$A(r, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{Jc(r', t - R/v)}{R} dV'$$

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(r', t - R/v)}{R} dV'$$

- Similares a las supuestas.
- Diferencia en el cálculo de E.
- Verifican las ecuaciones de Poisson para régimen estacionarios.

Potenciales retardados en el dominio de las frecuencias

Considerando soluciones de variación sinusoidal en el tiempo, resulta de gran utilidad referir los potenciales retardados al dominio de las frecuencias. Podemos expresar $A(r, t)$ y $\Phi(r, t)$ como armónicos en el tiempo:

$$\left\{ \begin{array}{l} A(r, t) = \text{Re } A(r) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \\ \Phi(r, t) = \text{Re } \Phi(r) \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t} \end{array} \right.$$

Potenciales retardados en el dominio de las frecuencias

- Las fuentes serían:

$$J_C(r', t') = \text{Re } J_C(r') \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t'}$$

$$\rho(r', t') = \text{Re } \rho(r') \cdot e^{j \cdot \omega \cdot t'}$$

- Reemplazando en función de t

$$J_C(r', t') = \text{Re } \bar{J}_C(r') e^{j \cdot \omega \cdot t} e^{-j \beta R} \quad \rho(r', t') = \text{Re } \rho(r') e^{j \cdot \omega \cdot t} e^{-j \beta R}$$

Potenciales retardados en el dominio de las frecuencias

Sus soluciones serían:

$$A(r) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} J_C(r') \frac{e^{-j \cdot \beta \cdot R}}{R} dV'$$

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} P(r') \frac{e^{-j \cdot \beta \cdot R}}{R} dV'$$

Potenciales retardados en el dominio de las frecuencias

$$E = -\nabla\Phi - j\omega A$$

- Utilizando la condición de Lorentz

$$\nabla \cdot A = -j\omega\epsilon\mu\Phi$$

- Y tomando gradiente en ambos miembros

$$\nabla(\nabla \cdot A) = -j\omega\epsilon\mu\nabla\Phi$$

Potenciales retardados en el dominio de las frecuencias

- Se obtiene el fasor del campo eléctrico:

$$E = \frac{\nabla(\nabla \cdot A)}{j\omega\epsilon\mu} - j\omega A$$

- y, el fasor del campo magnético lo obtenemos de la siguiente manera:

$$H = \frac{1}{\mu} (\nabla \times A)$$

Resolución de un problema de Radiación EM

- Para resolver un problema de radiación electromagnética debemos hallar el campo eléctrico y el campo magnético generados.
- Para ello suponemos conocidos los valores de J_c y ρ , fuentes de la radiación EM.

Resolución de un problema de Radiación EM

1. Conocidos J_c y ρ , hallamos el potencial vectorial $A(r)$ en un cierto punto P:

$$\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_c(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|} e^{-j\beta R} dV'$$

Resolución de un problema de Radiación EM

2. Conocido **$\mathbf{A}$** , se obtiene el vector densidad de flujo en dicho punto P , de acuerdo con la expresión:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Resolución de un problema de Radiación EM

3. Se calcula el potencial escalar $\phi(r)$ en función de ρ , en el punto P de observación, utilizando la siguiente fórmula:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{-j\beta R} \cdot dV'$$

Resolución de un problema de Radiación EM

4. Conocidos los potenciales ϕ y $\mathbf{A}$, se calcula el campo eléctrico existente en dicho punto P:

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Caso particular: radiación sobre un medio dieléctrico ideal

- En este caso, la metodología a aplicar, incluiría los pasos indicados anteriormente en los incisos 1 y 2, y utilizando las Ecuaciones de Maxwell, obtenemos:

$$A(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_c(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{-j\beta R} dV'$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Caso particular: radiación sobre un medio dieléctrico ideal

$$H = \frac{1}{\mu} \cdot B$$

$$\nabla \times H = \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} = j\omega E$$

$$\frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla \times H = E$$

Referencias

- Apuntes de cátedra - Mgter. Ing. Sergio Garassino
- Puliafito, Salvador. *El Campo Electromagnético -PI*. Idearium, Universidad de Mendoza, 1987.
- Jordan, Edward y Balmain, Keith. *Ondas electromagnéticas y sistemas radiantes*. Paraninfo, 1978.
- Zahn, Markus. *Teoría Electromagnética*. McGraw-Hill, 1991.
- Puliafito, Salvador. *Radiación electromagnética-PIII*. Idearium, Universidad de Mendoza, 1980.
- Balanis, Constantine A. *Antenna theory: analysis and design*. John Wiley & Sons, 2016.