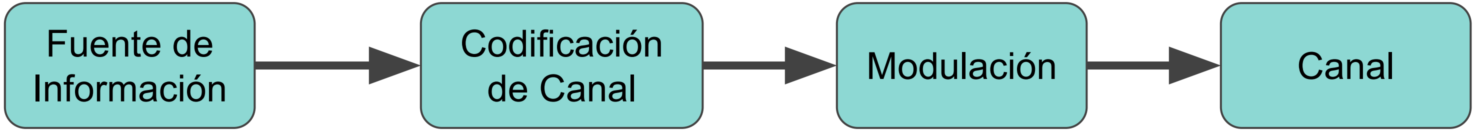
Comunicaciones 1
Introducción a la Teoría de la Información.

Parte 1

Sistema de comunicación

Teoría de la Información



Representación eficiente. Eliminar Redundancia

Transmisión **Confiable.** Incorporar Redundancia

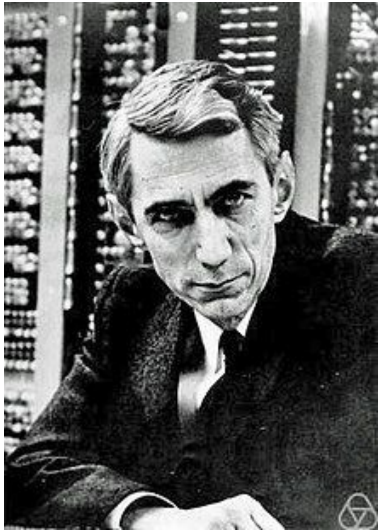
Transmisión **Eficiente.**

Impone sus condiciones.

Sistema de comunicación

Teoría de la Información

- Los orígenes de la Teoría de la información datan de la publicación de Claude E. Shannon en la *Bell System Technical Journal* en 1948 **Una teoría matemática de la comunicación**.
- El artículo trata de los soportes de la información, de los símbolos y no de la información subjetiva.
- Se enfoca a la comunicación y los medios de comunicación (más que al producto final que es la información).



Sistema de comunicación

¿Qué esperamos obtener?

- Comprensión sobre la necesidad de representaciones eficientes de la información de fuente que tiene impacto sobre los requerimientos de ancho de banda del sistema de comunicación.
- La comprensión de la codificación de canal otorga criterio sobre las distintas técnicas disponibles actualmente y permite vislumbrar hasta dónde es robusto (frente a los errores) un sistema particular.
- Analizar distintos esquemas de modulación (especialmente los digitales) permiten generar criterios sobre la relación de compromiso que existe entre el uso del ancho de banda, la potencia y la robustez del esquema frente al ruido.

Sistema de comunicación
Fuentes de información. Aspectos

- Eficiencia de representación de la fuente de información.
- Velocidad con la que se puede transmitir la información a través de un canal con ruido.

Comunicaciones 1
Información.

Sistema de comunicación
Definición de Información

Definición. Sea E un suceso que puede presentarse con probabilidad $P(E)$. Cuando E tiene lugar, decimos que hemos recibido

$$I(E) = \log \frac{1}{P(E)}$$

unidades de información.

Sistema de comunicación
Definición

Según la base del logaritmo, tenemos las diferentes unidades

$$\log_a x = \frac{1}{\log_b a} \log_b x$$

$$I(E) = \log_2 \frac{1}{P(E)} \quad \text{bits}$$

Un bits (*binary unit*) es la cantidad de información obtenida al especificar una de dos posibles alternativas igualmente probables.

$$I(E) = \ln \frac{1}{P(E)} \quad \text{nats}$$

Natural Units (nat)

$$I(E) = \log_{10} \frac{1}{P(E)} \quad \text{Hartleys}$$

Unidad propuesta por el Ing. R. V. Hartley en su trabajo *Transmission of Information (1928)*

Sistema de comunicación

¿Cuánta información enviamos en una imagen?

Consideraciones:

- Estructura matricial formada por puntos negros, blancos y grises.
- 500 filas x 600 columnas. ¿Cuántos puntos hay?
- Cada punto puede adoptar 10 niveles de brillo diferentes. ¿Cuántas imágenes diferentes se pueden crear?
- Todas las imágenes son equiprobables ¿Cuál es la probabilidad de aparición de cada una?
- ¿Cuál es la cantidad de información contenida en una imágen?

Sistema de comunicación

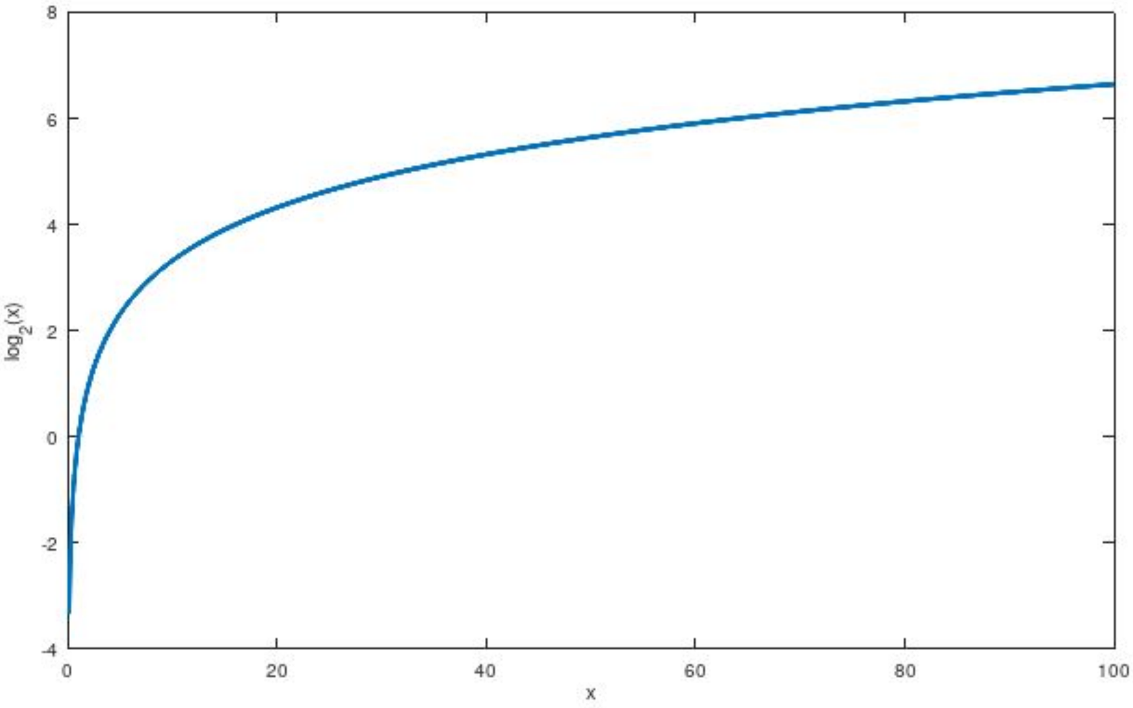
¿Cuánta información enviamos en 1000 palabras?

Consideraciones:

- El locutor/a (Alexa, Siri, o Cortana) tiene una base de conocimiento de 10000 palabras.
- Se eligen 1000 palabras al azar.
- ¿Cuál es la probabilidad de aparición de cada secuencia de 1000 palabras?
- ¿Cuál es la cantidad de información contenida en una secuencia de 1000 palabras?

Sistema de comunicación

Medida de la información



$$I_A = \log \frac{1}{P_A}.$$

Mayor incertidumbre,
Mayor información.

Sistema de comunicación

Fuente de información

Fuente de info discreta →

S = {s0, s1,...,sn},
P(S= sk) = Pk con
k=0,1,...K-1

$$I_i = \log_2 \frac{1}{P_i} \quad \text{bits.}$$

$$H = \sum_{i=1}^{n} P_i \log_2 \frac{1}{P_i} \quad \text{bits.}$$

Consideraciones:

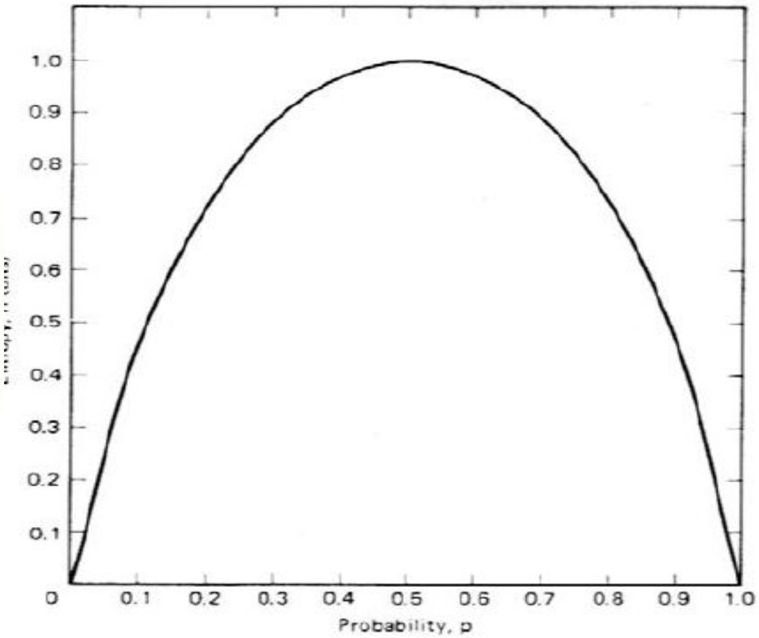
- Fuente modelada por una variable discreta aleatoria.
- Símbolos estadísticamente independientes (sin memoria).
- Se emiten a intervalos regulares de tiempo.
- **¿Cuánta información tiene esta fuente?**

Sistema de comunicación
Entropía

Entropía de una fuente discreta binaria **sin memoria**.

$$H = \sum_{i=1}^{2} P_i \log_2(1/P_i) \,,$$

$$H = p \log_2(1/p) + (1 - p) \log_2[1/(1 - p)] \,.$$



Tasa de información:
R = H(S)/T

Para el caso general de que la fuente “S” emita “q” símbolos, el valor máx. de la entropía de H(s) es log(q).

Sistema de comunicación

Ejercicio

Las placas de licencia de vehículos (sistema antiguo) poseen tres letras de un alfabeto que tiene 24 símbolos, seguido de tres números del sistema decimal, por ejemplo ATM123.

- ¿Cuál es la información que suministra la placa?
- ¿Cuál sería la información si las seis posiciones fueran numéricas?
- ¿Cuál es la entropía de la fuente?

Sistema de comunicación
Fuente discreta extendida sin memoria.

Conveniente cuando se trata con bloques de símbolos.

$$H(S^n) = nH(S)$$

Válido para fuentes sin memoria.

Comunicaciones 1

Conceptos de códigos

Sistema de comunicación

Idea de codificación

- **Alfabeto fuente (Símbolos mensaje)**
- **Alfabeto codificado (Palabras código)**

Dígito decimal	*Representación binaria*
1	0001
0	0000
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

Sistema de comunicación
Idea de codificación

- Alfabeto fuente (Símbolos mensaje)
- Alfabeto codificado (Palabras código)

11001 -> s1, s2
11001 -> s1, s1, s2

TABLA 1-2. CÓDIGO BINARIO

Símbolos mensaje	*Palabras código*
s_1	0
s_2	01
s_3	001
s_4	111

Sistema de comunicación

Idea de codificación

- **Alfabeto fuente (Símbolos mensaje)**
- **Alfabeto codificado (Palabras código)**
- **Codificación unívocamente decodificables**

TABLA 1-3. CÓDIGO BINARIO

Símbolos mensaje	*Palabras código*
s_1	0
s_2	10
s_3	110
s_4	1110

Sistema de comunicación

Un problema en la transmisión de información

Establecer relación entre la codificación y su relación con la medida de la información.

Estado del tiempo en algún lugar. (A)

Mensajes	*Probabilidades*
Soleado	1/4
Nublado	1/4
Lluvia	1/4
Niebla	1/4

Sistema de comunicación
Un problema en la transmisión de información

Una manera posible de codificar

Código A

Soleado	00
Nublado	01
Lluvia	10
Niebla	11

Sistema de comunicación

Un problema en la transmisión de información

¿Y si las probabilidades fueran distintas? (B)

Mensajes	*Probabilidades*
Soleado	1/4
Nublado	1/8
Lluvia	1/8
Bruma	1/2

Sistema de comunicación

Un problema en la transmisión de información

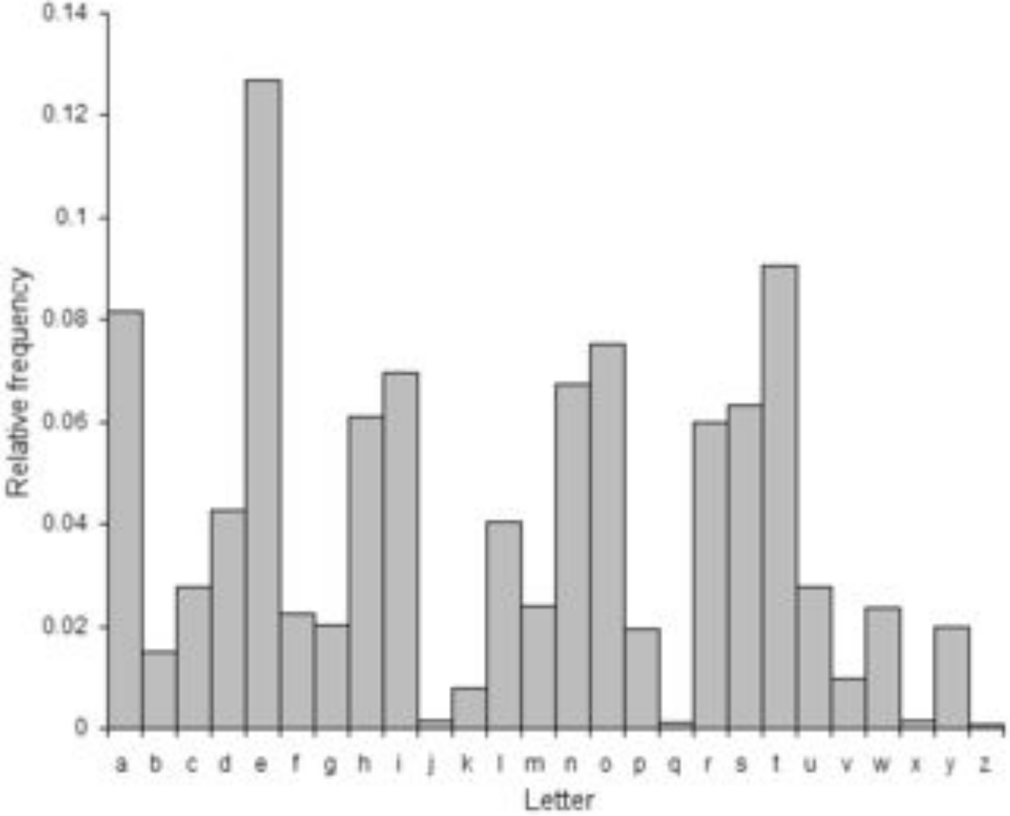
Una manera posible de codificar. (B)

Código B

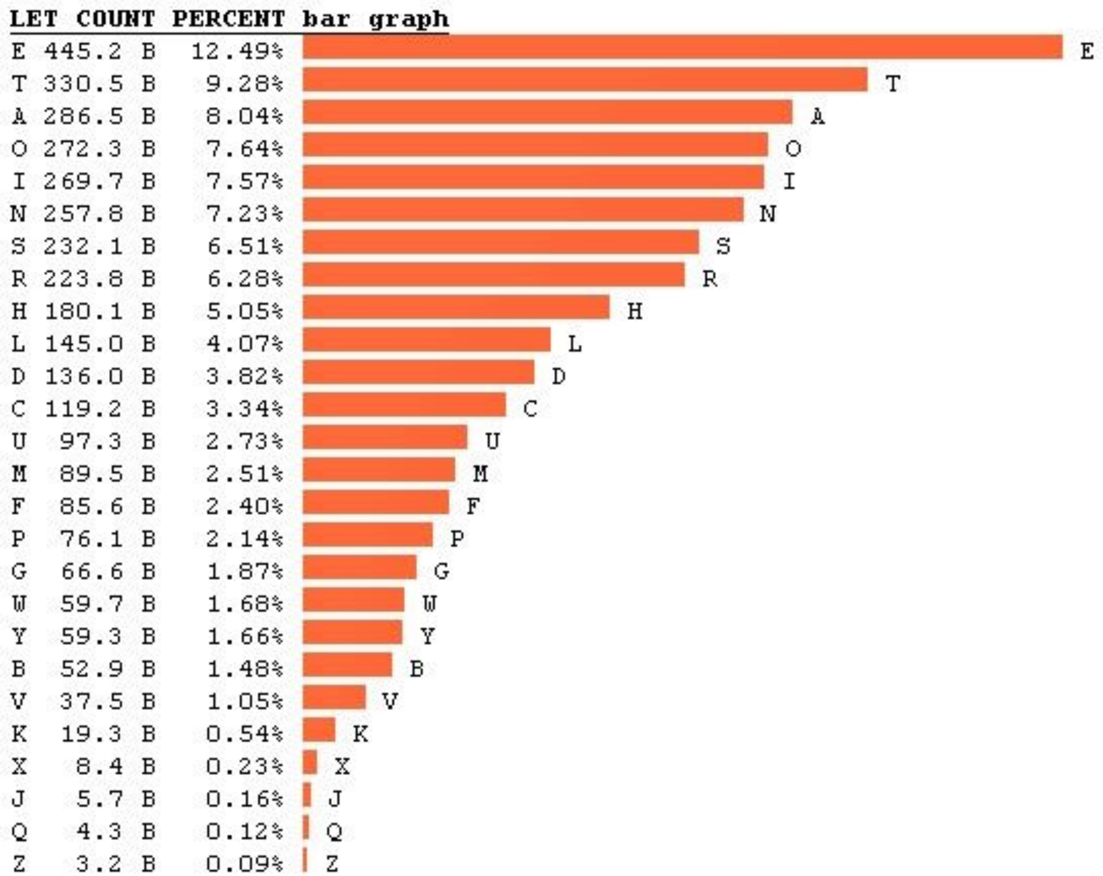
Soleado	10
Nublado	110
Lluvia	1110
Bruma	0

Sistema de comunicación

E	11.1607%	56.88	M	3.0129%	15.36
A	8.4966%	43.31	H	3.0034%	15.31
R	7.5809%	38.64	G	2.4705%	12.59
I	7.5448%	38.45	B	2.0720%	10.56
O	7.1635%	36.51	F	1.8121%	9.24
T	6.9509%	35.43	Y	1.7779%	9.06
N	6.6544%	33.92	W	1.2899%	6.57
S	5.7351%	29.23	K	1.1016%	5.61
L	5.4893%	27.98	V	1.0074%	5.13
C	4.5388%	23.13	X	0.2902%	1.48
U	3.6308%	18.51	Z	0.2722%	1.39
D	3.3844%	17.25	J	0.1965%	1.00
P	3.1671%	16.14	Q	0.1962%	(1)



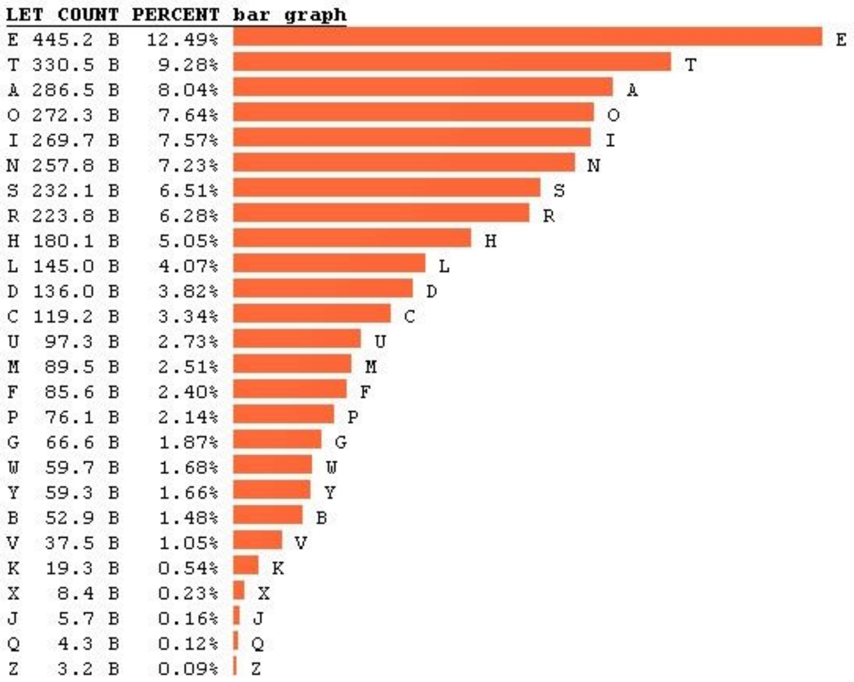
Sistema de comunicación



Proponer un alfabeto de codificación.

Sistema de comunicación

A ·–	J ·–––	S ···	2 ··–––
B –···	K –·–	T –	3 ···––
C –·–·	L ·–··	U ··–	4 ····–
D –··	M ––	V ···–	5 ·····
E ·	N –·	W ·––	6 –····
F ··–·	O –––	X –··–	7 ––···
G ––·	P ·––·	Y –·––	8 –––··
H ····	Q ––·–	Z ––··	9 ––––·
I ··	R ·–·	1 ·––––	0 –––––



[Fuente]


NOKIA
NOKIA
NOKIA
Connecting People
Morse secret

Sistema de comunicación

Sistema de comunicación

Codificación.

Definición. Denominemos $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_q\}$ al conjunto de símbolos de un alfabeto dado. Se define un código como la correspondencia de todas las secuencias posibles de símbolos de S a secuencias de símbolos de algún otro alfabeto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$. S recibe el nombre de *alfabeto fuente* y X *alfabeto código.*

Sistema de comunicación
Codificación de fuente.

Proceso de asignación de un código a cada símbolo de la fuente de información discreta.

¿Objetivo? Que la información sea transmitida con la menor cantidad posible de bits.

¿Para que?

- Transmitir la información usando un menor ancho de banda.
- Transmitir con el mismo ancho de banda, pero en menos tiempo.

Sistema de comunicación

Codificación de fuente. Requerimientos.

¿Qué le pedimos al código?

- El código generado por el codificador debe ser del tipo binario.
- El código debe ser unívocamente decodificable, esto quiere decir que el símbolo original se puede reconstruir perfectamente, sin ambigüedad, a partir de la secuencia binaria codificada.
- De Bloque. Asigna a cada símbolo fuente una secuencia fija de símbolos codificados.
- Instantáneo. Se decodifica sin conocimiento de códigos precedentes.

Sistema de comunicación

Codificación de fuente. Longitud media del código

Representa el número promedio de bits, por símbolo de fuente, que se usa en el proceso de codificación.

¿Hay alguna manera de determinar, a priori, cuál es el valor mínimo de longitud L? Esta pregunta se la planteó Claude Shannon.

$$\bar{L} = \sum_{k=0}^{K-1} p_k l_k$$

Sistema de comunicación

Codificación de fuente. Primer teorema de Shannon

Dada una fuente discreta sin memoria con entropía H(S), la longitud de código media L para cualquier esquema de codificación utilizado está limitada a:

$$\overline{L} \geq H(S)$$

En consecuencia, la entropía H(S) representa un límite fundamental para el número de bits promedio L por símbolo de fuente, necesario para representar una fuente discreta sin memoria. Es decir, **L** nunca puede ser más pequeño que la entropía de la fuente. El caso óptimo se da cuando L = H(S).

Sistema de comunicación
Codificación de fuente. Rendimiento del código.

Por lo tanto, el mínimo valor de L se obtiene cuando L = H(S) .
Bajo esta condición podemos escribir:

$$\eta = \frac{H(S)}{\bar{L}}$$

Cuanto más se acerca L a H(S) , más eficiente es el código.

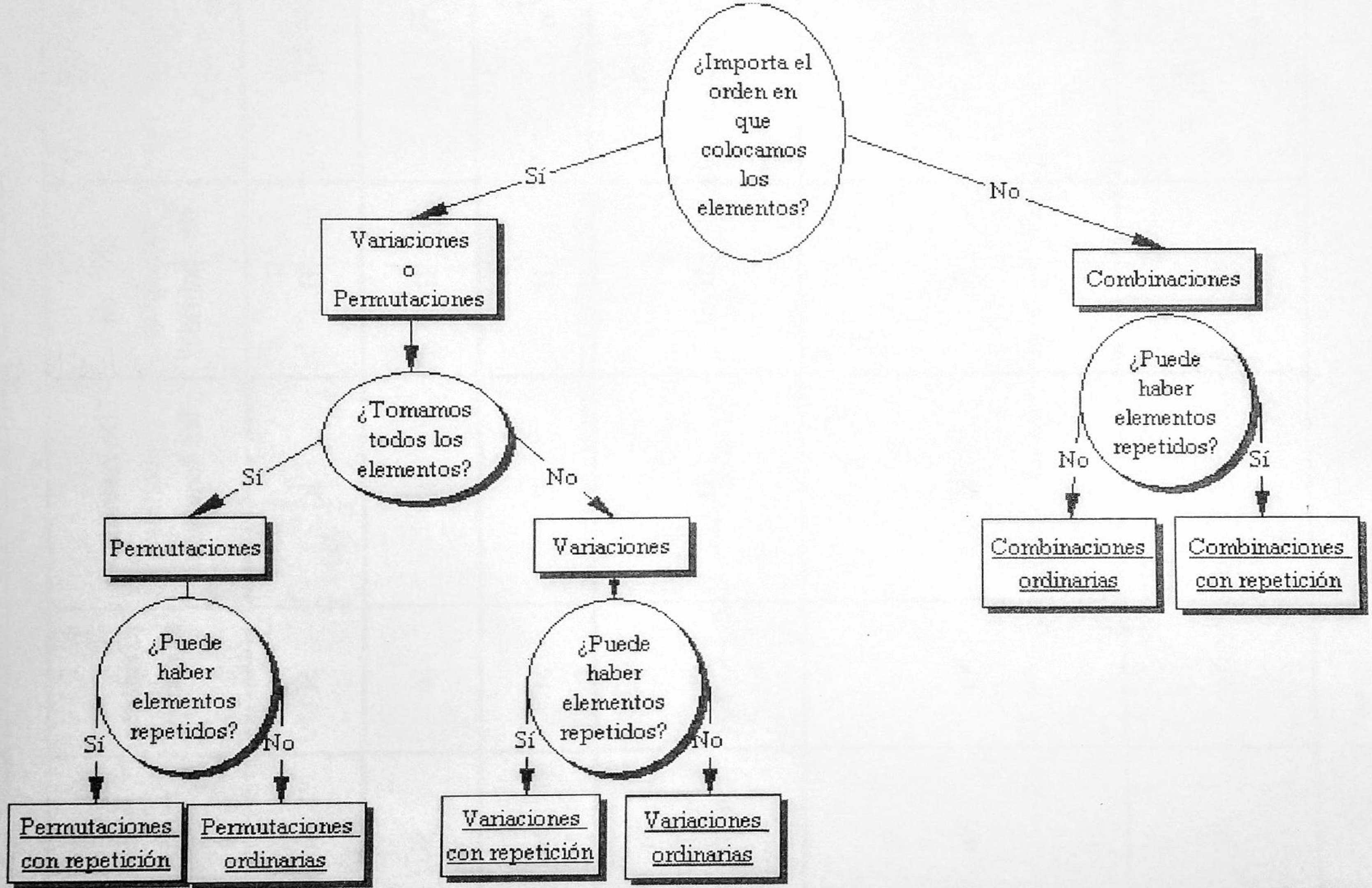
Sistema de comunicación
Referencias

- **Norman Abramson -Teoría de la Información y Codificación - 5Ed.**
- Ferrel G. Stremler - Introducción a los Sistemas de Comunicación. - 3Ed.
- Robert G. Gallager - Information Theory and Reliable Communication.
- Claude E. Shannon - A mathematical theory of communication- *Bell System Technical Journal*, vol. 27, pp. 379-423, July-October, 1948

Combinatoria

La Combinatoria permite contar el número de situaciones posibles al someter a un conjunto finito de elementos a las acciones de **ordenar** y/o **elegir** entre sus elementos.

A su vez esto nos permite asignar un valor de probabilidad de ocurrencia a cada situación.


¿Importa el orden en que colocamos los elementos?
Sí
No
Variaciones o Permutaciones
Combinaciones
¿Tomamos todos los elementos?
Sí
No
Permutaciones
Variaciones
¿Puede haber elementos repetidos?
No
Sí
Combinaciones ordinarias
Combinaciones con repetición
¿Puede haber elementos repetidos?
Sí
No
¿Puede haber elementos repetidos?
Sí
No
Permutaciones con repetición
Permutaciones ordinarias
Variaciones con repetición
Variaciones ordinarias

	¿Nº de elementos de partida?	¿De cuantos en cuantos los tomamos?	¿Importa el orden?	¿Se repiten?	Cálculo del número combinatorio
$V_{n,k} = V_n^k$	n	k	Si	No	$n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$
$VR_{n,k} = VR_n^k$	n	k	Si	Si	n^k
P_n	n	n	Si	no	$n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$
$PR_n^{n_1,n_2,\dots,n_r}$ Si $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$	n	n	Si	Si n_1 veces n_2 veces ……	$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_r!}$
$C_{n,k} = C_n^k =$	n	k	No	No	$\binom{n}{k} = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$
$CR_{n,k} = CR_n^k = C_{n+k-1}^k$	n	k	No	Si	$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!} = PR_{n+k-1}^{k,n-1}$