CONTROL AUTOMATICO

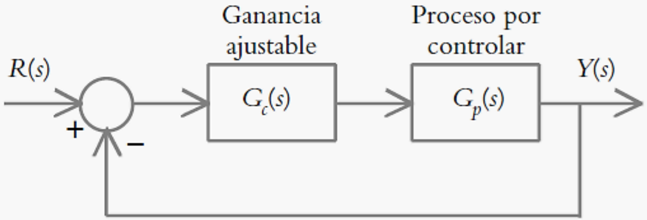
UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

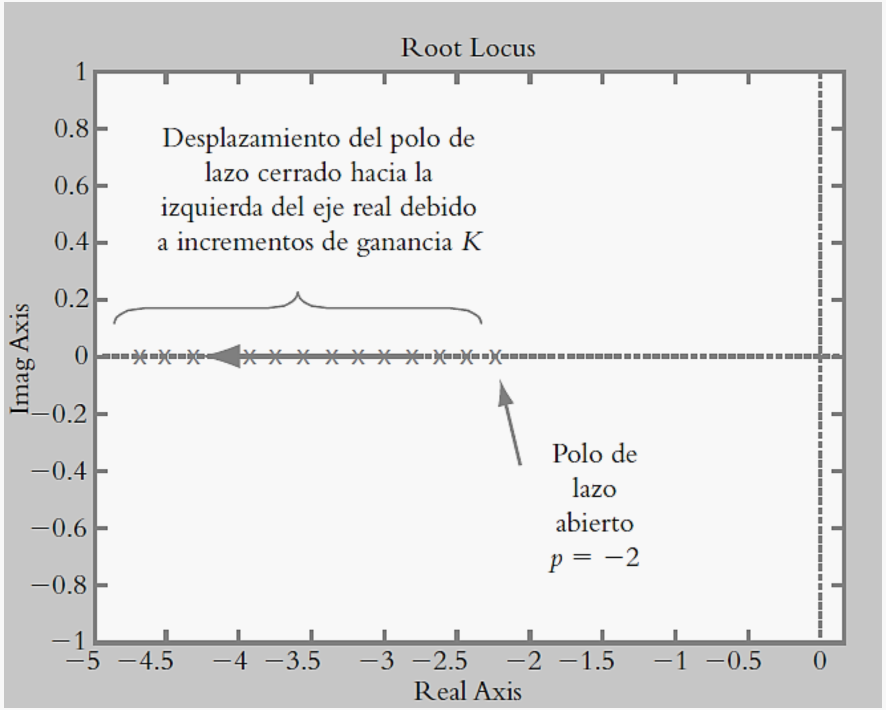
50 AÑOS

FACULTAD DE INGENIERÍA UNaM

LUGAR GEOMÉTRICO DE RAÍCES (LGR)

El lugar geométrico de las raíces (LGR) es una técnica gráfica que muestra cómo se mueven los polos de lazo cerrado de un sistema de control en el plano complejo a medida que un parámetro, generalmente la ganancia K, varía.





UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

50 AÑOS

FACULTAD DE INGENIERÍA UNaM

LUGAR GEOMÉTRICO DE RAÍCES (LGR)

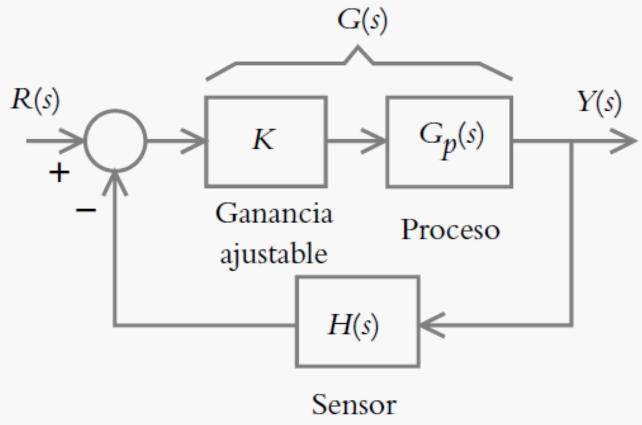
Teniendo en cuenta un lazo de control cerrado y su función de transferencia:

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

Su ecuación característica:

$$1 + G(s) \cdot H(s)$$

Siendo $G(s) \cdot H(s)$ la función de transferencia en lazo abierto.



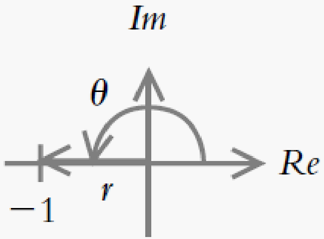
Por lo tanto podemos analizar el comportamiento del sistema en lazo cerrado a partir de su función en lazo abierto.

LUGAR GEOMÉTRICO DE RAÍCES (LGR)

Reescribiendo la FT de la ecuación característica:

$$G(s) \cdot H(s) = -1$$

Cuya representación polar nos queda:



$$G(s)H(s) = 1 \angle 180°\, n \quad \text{para} \quad n = \pm 1, \pm 3, \ldots, \pm(2n+1)$$

A partir de esto podemos definir las siguientes condiciones:

Condición de fase: $\angle 180°$

La clave para determinar todos los posibles lugares geométricos (o polos de lazo cerrado del polinomio característico) está contenida en la condición de fase, ya que cualquier valor de **s** que satisfaga dicha relación angular será una raíz de la ecuación característica considerada.

ANALISIS DE ESTABILIDAD

Condición de magnitud: 1

La condición de magnitud se utiliza para asignar una escala al lugar geométrico resultante, cuya aplicación directa será la de cuantificar las ganancias requeridas para operar en puntos específicos del LGR con la finalidad de satisfacer las especificaciones de funcionamiento en régimen transitorio.

Por lo tanto, para obtener la representación gráfica de todos los polos de lazo cerrado (o LGR) se parte de la representación en el plano s de los polos y ceros contenidos en G(s)H(s).

ANALISIS DE ESTABILIDAD

LGR con Matlab

Ejemplo 1: obtenga el LGR de:

$$G(s)H(s) = K\frac{(s^2+6s+10)}{(s+0.5)(s+2)(s+4)}$$

Definamos el script:

```
>> % Definición de G(s)H(s)
>> num=[1 6 10]; den=conv(conv([1 0.5],[1 2]),[1 4]);
>> % El comando rlocus(num,den) genera el LGR de G(s)H(s)
>> rlocus(num,den)
% Para aplicaciones posteriores, G(s)H(s) se expresa como función
%racional:
>> g=tf(num,den)
```

ANALISIS DE ESTABILIDAD

LGR con Matlab

Ejemplo 1:

```
% rlocus(num,den) y rlocus(g) generan la misma gráfi ca.
% Si se desea que el LGR se muestre mediante una serie de referencias
% espaciadas, se defi ne el rango de ganancias K y el intervalo deseado:
% k=(0:intervalo:ganancia máxima);
>> k=0:0.1:50;
>> rlocus(g,k) % LG a manera de sucesiones de polos espaciados.
>> axis([−5 0.2 −2.5 2.5]), % Comando para personalizar los ejes.
```

Analizar las gráficas resultantes.

ANALISIS DE ESTABILIDAD

LGR con Matlab

Podemos utilizar el comando LGR en Matlab para el diseñar sistemas de control. Considerando, como parámetros de diseño, aquellos referentes al régimen transitorio: amortiguamiento λ, frecuencia angular de oscilación ω, frecuencia natural no amortiguada ω_n y constante de tiempo τ.

Por lo tanto es posible ajustar K para satisfacer las condiciones de funcionamiento requeridas

ANALISIS DE ESTABILIDAD

LGR con Matlab

[k,poles]=rlocfind(num,den). En el LGR que se genera, Matlab muestra un cursor para que el usuario elija una ubicación específi ca sobre el LGR. Para ello, hay que hacer clic en el punto seleccionado, después de lo cual Matlab presenta la ganancia y la ubicación de los polos de lazo cerrado correspondientes.

[k,poles]=rlocfind(num,den,polo específico). Comando semejante a la instrucción anterior, sólo que en vez de que se muestre el cursor en la pantalla, Matlab indica la ganancia y los polos restantes relacionados con el polo específico escrito por el usuario.

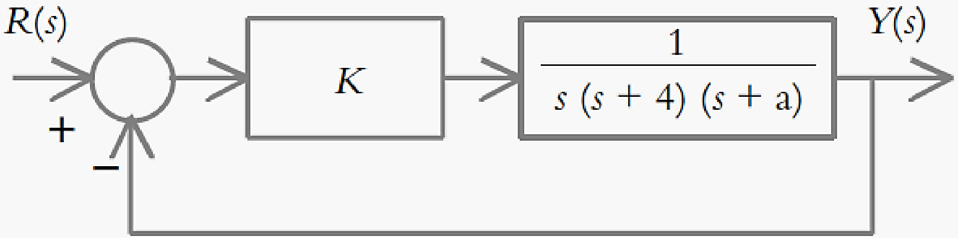
Ver ejemplo 6.14 (pag 284) Hernández-Gaviño

ANALISIS DE ESTABILIDAD

Aplicación del LGR para parámetros distintos a K:

El método de LGR puede utilizarse para hacer variar cualquier otro parámetro del sistema, por ejemplo, ubicar un determinado polo p, ajustar el amortiguamiento λ de un polinomio característico, etcétera.

Ejemplo 1: sea el siguiente lazo de control



ANALISIS DE ESTABILIDAD

Aplicación del LGR para parámetros distintos a K:

Considere en principio $a = -10$ y $K = 32.4854$, por lo que los polos de lazo cerrado se ubicarán en $p_1 = p_2 = -1.7607\ y\ p_3 = -10.4785$; por lo tanto, el sistema resultante logra aproximarse a un polinomio cuadrático. Si se mantiene fija la ganancia K, analice el comportamiento del parámetro a para el intervalo $0 < a < \infty$.

ANALISIS DE ESTABILIDAD

Aplicación del LGR para parámetros distintos a K:

Para resolver debemos hallar la función de transferencia en lazo cerrado del sistema para $K = 32.4854$:

$$T(s) = \frac{32.4854}{s^3 + 4\,s^2 + 32.4854 + a(s^2 + 4\,s)}$$

En base a esto armaremos una nueva FT de lazo cerrado equivalente, llevando el polinomio del denominador en la forma $1 + GH$, para esto multiplicamos y dividimos por el siguiente factor:

$$\frac{1}{s^3 + 4\,s^2 + 32.4854}$$

ANALISIS DE ESTABILIDAD

Aplicación del LGR para parámetros distintos a K:

Acomodamos matemáticamente la nueva FT $T'(s)$ en la forma $\frac{G}{1+GH}$

$$T'(s) = \frac{\dfrac{32.4854}{s^3 + 4s^2 + 32.4854}}{1 + a\dfrac{(s^2 + 4s)}{s^3 + 4s^2 + 32.4854}}$$

Donde:

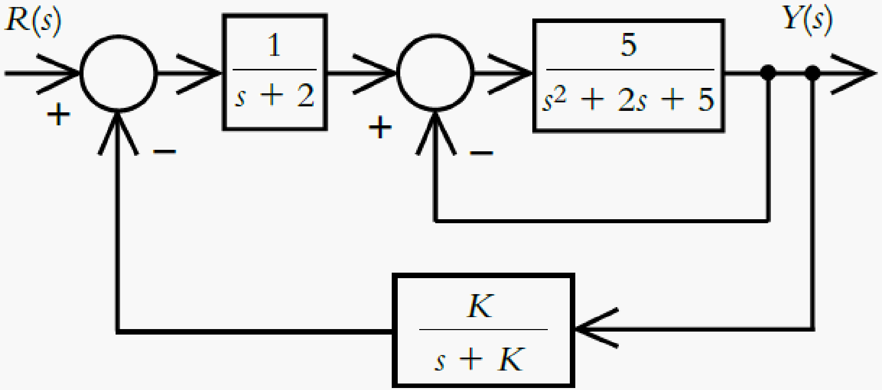
$$G(s)H(s)' = a\,\frac{s(s+4)}{s^3 + 4s^2 + 32.4854}$$

Con esto podemos armar el LGR respectivo.

ANALISIS DE ESTABILIDAD

Ejercicio para resolver en clase:

Obtenga el LGR de la siguiente configuración:



UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

50 AÑOS

FACULTAD DE INGENIERÍA UNaM

Muchas Gracias

Bibliografía:

- Introducción a los sistemas de control-Hernandez Gaviño