CONTROL AUTOMATICO

ANALISIS DE ESTABILIDAD

Análisis de respuesta de un sistema de orden n:

Sea la función de transferencia:

$$G(s) = \mathrm{K}\frac{(b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + b_{m-1} s + b_m)}{(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_{n-1} s + a_n)}$$

La naturaleza de las raíces del denominador son las que determinan el patrón de la respuesta temporal a una dada señal de entrada y nos permite un conocimiento cualitativo de la dinámica del sistema. Por lo que su *ecuación característica* será:

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_{n-1} s + a_n = 0$$

ANALISIS DE ESTABILIDAD

Analizando tenemos:

Polos reales y distintos: p1, p2, etc. La respuesta temporal tendrá componentes de la forma: $C_1 e^{p_1 t}$, $C_2 e^{p_2 t}$ etc. de modo que los transitorios convergerán a cero si los polos son negativos.

Polos reales múltiples: En este caso, para un polo p con multiplicidad r, la función temporal que resultaría de la transformación inversa contendría términos de la forma:

$$\left[C_1 + \frac{C_2}{1!}t + \frac{C_3}{2!}t^2 + \cdots + \frac{c_r}{(r-1)!}t^{r-1}\right] \cdot e^{pt}$$

Los transitorios convergerán a cero si p es (-).

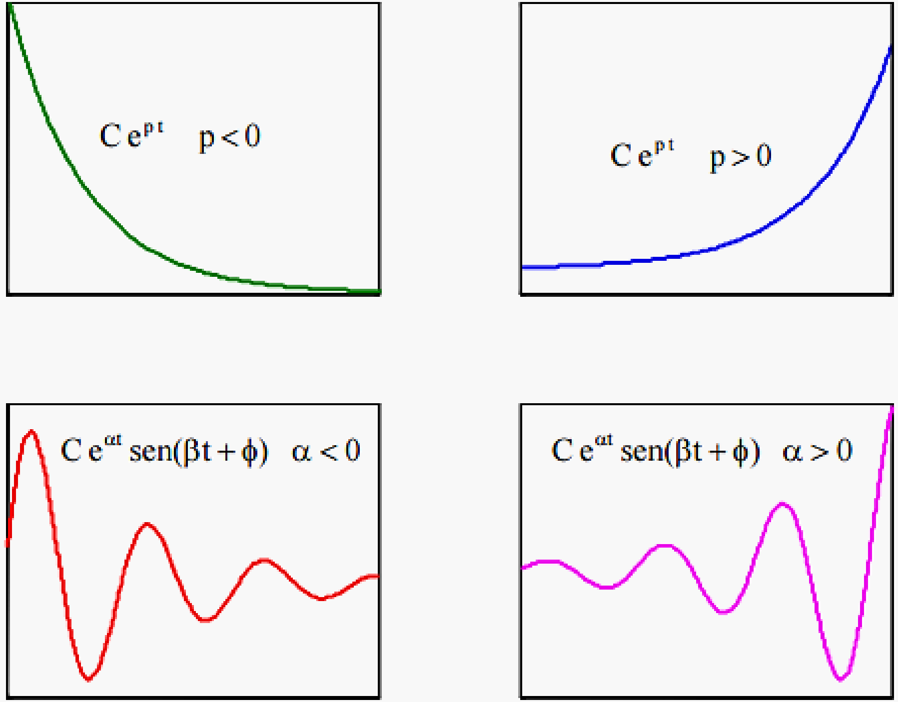
ANALISIS DE ESTABILIDAD

Polos complejos conjugados: $\alpha \pm j\beta$. La respuesta resulta oscilatoria, con una componente temporal de la forma $C \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin(\beta t + \phi)$ Según cuál sea el signo de α la sinusoide se amplificará (α > 0) o decaerá (α < 0).

En resumen, en las raíces de la ecuación característica está la información sobre el patrón de la respuesta temporal de un sistema

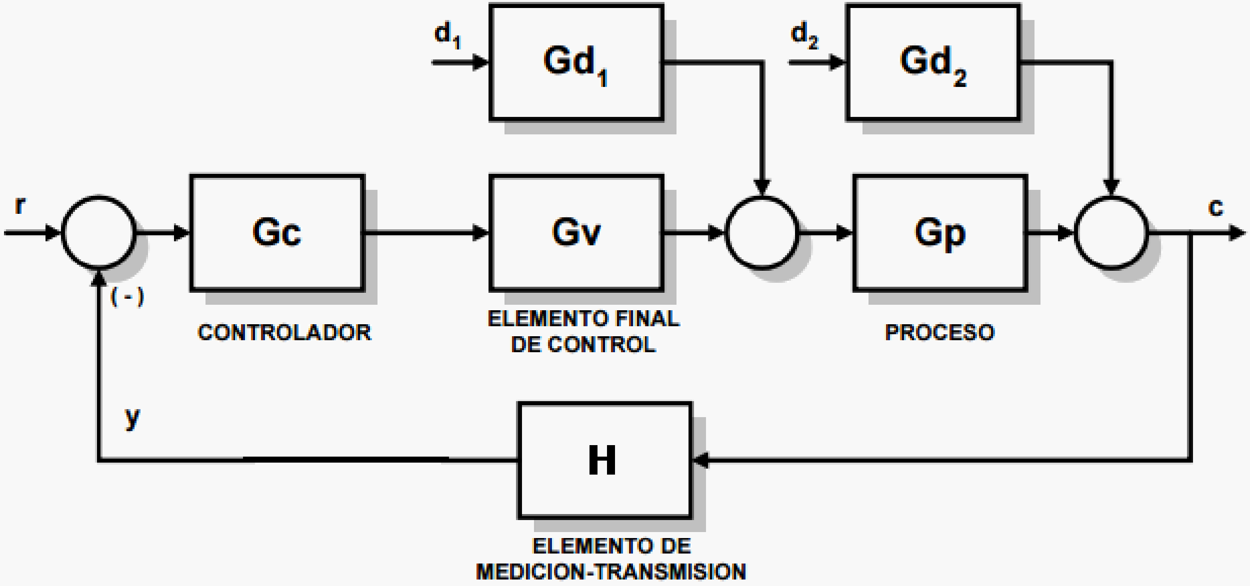
ANALISIS DE ESTABILIDAD

Respuesta temporal según la ubicación de los polos de la ecuación característica



ESTABILIDAD DE SISTEMAS EN LAZO CERRADO

Consideremos el siguiente lazo:



ESTABILIDAD DE SISTEMAS EN LAZO CERRADO

El sistema se ve sometido a distintas perturbaciones *d1* y *d2* que inciden en distintos puntos del lazo. La respuesta *y(t)* resultará de la contribución de las perturbaciones y de los cambios del valor deseado *r*. aplicando el algebra de bloques obtenemos:

$$Y(s) = \frac{G_c(s) \cdot G_p(s) \cdot G_V(s)}{1 + G_c(s) \cdot G_p(s) \cdot G_V(s) \cdot H(s)} r + \frac{G_{d2}(s)}{1 + G_c(s) \cdot G_p(s) \cdot G_V(s) \cdot H(s)} d_2 +$$

$$+ \frac{G_p(s) \cdot G_{d1}(s)}{1 + G_c(s) \cdot G_p(s) \cdot G_V(s) \cdot H(s)} d_1 \rightarrow Y(s) = T(s) \cdot R(s) = R(s) \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Queda en evidencia que, independientemente de cuál sea la señal de entrada considerada, la ecuación característica siempre es la misma.

ESTABILIDAD DE SISTEMAS EN LAZO CERRADO

*Por lo tanto definimos la **ecuación característica** de lazo cerrado como:*

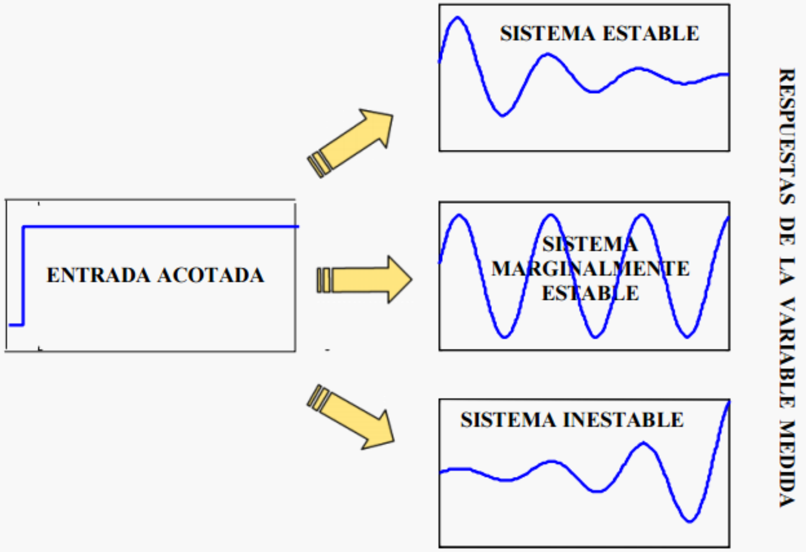
$$1 + G_c(s) \cdot G_p(s) \cdot G_V(s) \cdot H(s) = 0$$

- *La naturaleza de sus raíces indicarán cuál es el patrón de la respuesta temporal del lazo cerrado cuando se vea sometido a cambios en las entradas.*
- *Se puede ver también que el patrón de respuesta de un lazo viene determinado por lo elementos del lazo, independientemente de cuál sea la perturbación incidente.*

ESTABILIDAD DE SISTEMAS EN LAZO CERRADO

Un sistema se dice que es estable si para toda entrada acotada produce una salida acotada, independientemente de su estado inicial.

Los transitorios de la salida se pueden relacionar con las raíces de la ecuación característica.



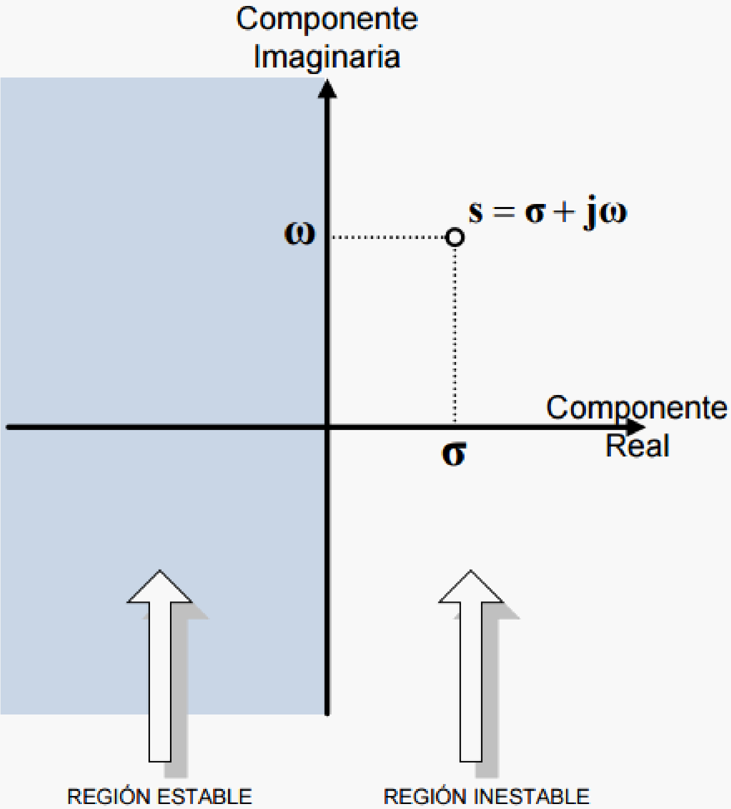
UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

50 AÑOS

FACULTAD DE INGENIERÍA UNaM

ESTABILIDAD DE SISTEMAS EN LAZO CERRADO

Un sistema es estable si las raíces de la *ecuación característica* son reales negativas o complejas conjugadas con parte real negativa. O dicho en forma más compacta, si todas las raíces se encuentran en el semiplano izquierdo de la variable compleja s.



UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

50 AÑOS

FACULTAD DE INGENIERÍA UNaM

ESTABILIDAD DE SISTEMAS EN LAZO CERRADO

Analizando la *ecuación característica*, queda en evidencia que las raíces (estabilidad del sistema en lazo cerrado) dependen del *Gc(s)*, esto es, del controlador. Como se sabe, se pueden elegir el tipo de controlador (función de transferencia) y el valor de sus parámetros (sintonización). Si el proceso y los elementos de medición y actuación ya están fijados, se puede concluir entonces que la estabilidad del sistema de control dependerá de la elección del tipo y sintonización del controlador.

ESTABILIDAD DE ROUTH

Criterio de Routh: El Test de Routh permite identificar el número de raíces en el semiplano derecho a través de un procedimiento relativamente simple.
Primero se debe expresar la ecuación característica en forma polinomial:

$$D(s) = (a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_{n-1} s + a_n) = 0$$

Hay que verificar que a_0 sea positiva, de lo contrario, debe multiplicarse los miembros de la ecuación por –1.

Nota: En e caso de que la ecuación característica sea una función racional de polinomios debemos analizar el polinomio del numerador.

ESTABILIDAD DE ROUTH

Si alguno de los coeficientes a_0 , a_1 , a_2 … a_{n-1} , a_n , es negativo, entonces al menos una raíz se ubica en el semiplano derecho y no es necesario ningún análisis adicional. Más aún, el número de cambios de signos es igual a la cantidad de raíces en el semiplano derecho (Teorema de los signos de Descartes).

ESTABILIDAD DE ROUTH

Condición suficiente: si todos los coeficientes a_0 , a_1 , a_2 ... a_{n-1} , a_n son positivos se debe construir el Arreglo de Routh que posee n filas:

Las dos primeras filas se construyen con los coeficientes a_0 , a_1 , a_2 ... a_{n-1} , a_n . Si n es impar se agrega una columna de ceros y si n par, la segunda fila se completa con un 0.

$$
\begin{array}{l}
s^n \\ s^{n-1} \\ s^{n-2} \\ s^{n-3} \\ s^{n-4} \\ \cdots \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0
\end{array}
\begin{bmatrix}
a_0 & a_2 & a_4 & \cdots\cdots \\
a_1 & a_3 & a_5 & \cdots\cdots \\
b_1 & b_2 & b_3 & \cdots\cdots \\
c_1 & c_2 & c_3 & \cdots\cdots \\
d_1 & d_2 & d_3 & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
e_1 & e_2 & 0 & \cdots\cdots \\
f_1 & 0 & 0 & \cdots\cdots \\
g_1 & 0 & 0 & \cdots\cdots
\end{bmatrix}
$$

ESTABILIDAD DE ROUTH

$$
\begin{array}{l}
s^n \\ s^{n-1} \\ s^{n-2} \\ s^{n-3} \\ s^{n-4} \\ \cdots \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0
\end{array}
\begin{bmatrix}
\boxed{\begin{matrix} a_0 & a_2 & a_4 & \ldots\ldots \\ a_1 & a_3 & a_5 & \ldots\ldots \end{matrix}} \\
\begin{matrix}
b_1 & b_2 & b_3 & \ldots\ldots \\
c_1 & c_2 & c_3 & \ldots\ldots \\
d_1 & d_2 & d_3 & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
e_1 & e_2 & 0 & \ldots\ldots \\
f_1 & 0 & 0 & \ldots\ldots \\
g_1 & 0 & 0 & \ldots\ldots
\end{matrix}
\end{bmatrix}
$$

Las dos primeras filas se construyen con los coeficientes del polinomio característico

ESTABILIDAD DE ROUTH

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$$

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_2 & a_4 & \cdots\cdots \\ a_1 & a_3 & a_5 & \cdots\cdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots\cdots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots\cdots \\ d_1 & d_2 & d_3 & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ e_1 & e_2 & 0 & \cdots\cdots \\ f_1 & 0 & 0 & \cdots\cdots \\ g_1 & 0 & 0 & \cdots\cdots \end{bmatrix}$$

Los coeficientes de la tercera fila en adelante se construyen a través de operaciones empleando las dos filas inmediatas anteriores

ESTABILIDAD DE ROUTH

Las fórmulas para el cómputo de los distintos elementos del Arreglo de Routh son:

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \qquad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \qquad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} \qquad \ldots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \qquad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \qquad c_1 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1} \qquad \ldots$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} \qquad d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1} \qquad d_3 = \frac{c_1 b_4 - b_1 c_4}{c_1} \qquad \ldots$$

ESTABILIDAD DE ROUTH

Examinando los coeficientes de la primera columna del arreglo a_0, a_1, b_1, c_1, ... e_1, f_1 ...si algún coeficiente es negativo, al menos una raíz está en el semiplano derecho y el sistema será inestable. Más aún, el número de cambios de signos indica la cantidad de raíces en tal semiplano.

ESTABILIDAD DE ROUTH

El número de cambio de signos resulta igual al número de raíces en el semiplano derecho

$$
\begin{array}{c}
s^n \\ s^{n-1} \\ s^{n-2} \\ s^{n-3} \\ s^{n-4} \\ \cdots \\ s^2 \\ s^1 \\ s^0
\end{array}
\begin{bmatrix}
\boxed{\begin{array}{c} a_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ d_1 \\ \cdots\cdots \\ e_1 \\ f_1 \\ g_1 \end{array}} &
\begin{array}{c} a_2 \\ a_3 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \\ \cdots\cdots \\ e_2 \\ 0 \\ 0 \end{array} &
\begin{array}{c} a_4 \\ a_5 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \\ \cdots\cdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} &
\begin{array}{c} \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{array}
\end{bmatrix}
$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

50 AÑOS

FACULTAD DE INGENIERÍA UNaM

ESTABILIDAD DE ROUTH

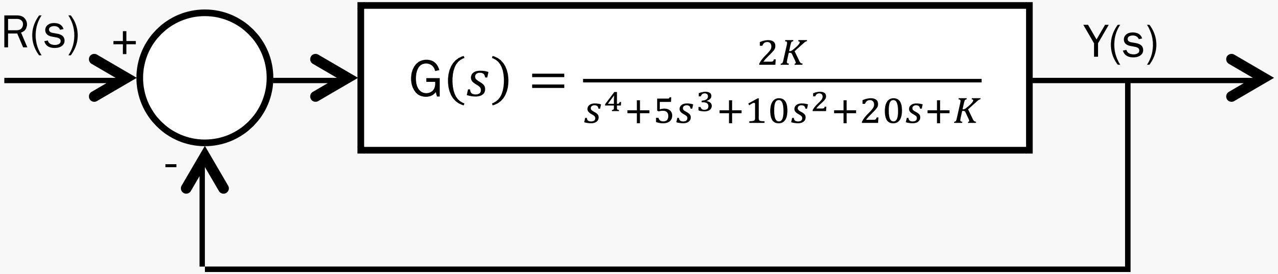
Con el **criterio de Routh**, además de lograr un análisis de estabilidad de un sistema en lazo abierto o en lazo cerrado, podemos obtener los valores o rangos de la ganancia del controlador ($Gc(s)$) para que el sistema se comporte de manera estable.

ESTABILIDAD DE ROUTH

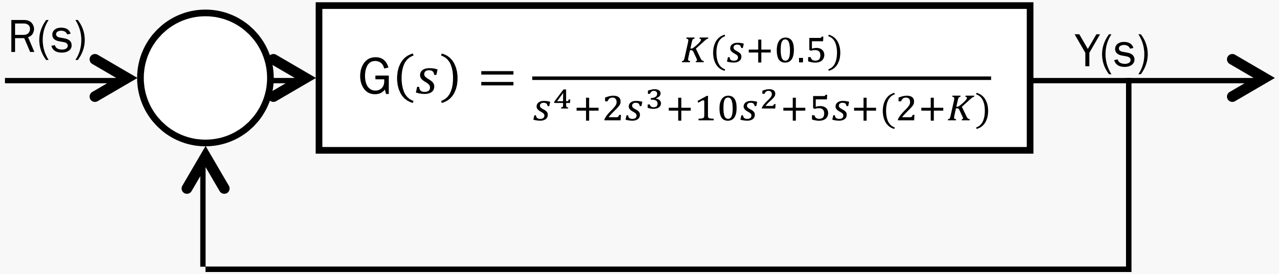
Ejercicios: analizar la estabilidad de los siguientes sistemas:

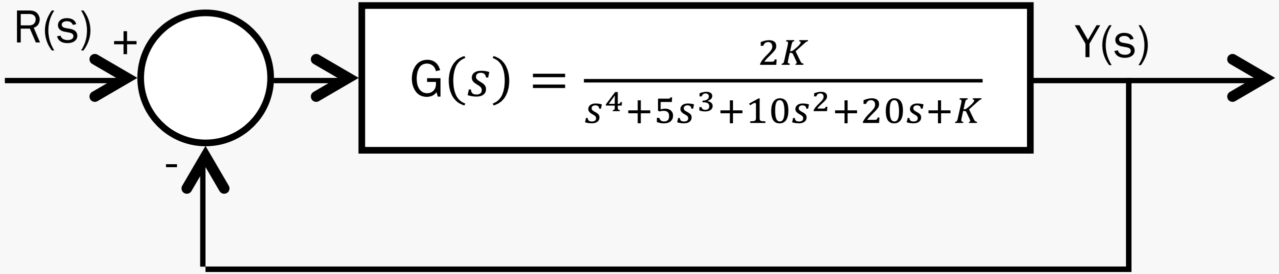
Sea la siguiente Ecuación característica

$$F(s) = s^5 + s^4 + 10s^3 + 72s^2 + 125s + 240$$



ESTABILIDAD DE ROUTH





UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

50 AÑOS

FACULTAD DE INGENIERÍA UNaM

Muchas Gracias

Bibliografía:

- Introducción a los sistemas de control-Hernandez Gaviño
- Ingeniería de control moderna-Katsuhiko Ogata
- Control Automático de procesos-Smith Corripio