UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

50 AÑOS

FACULTAD DE INGENIERÍA UNaM

CONTROL AUTOMÁTICO
AÑO 2025

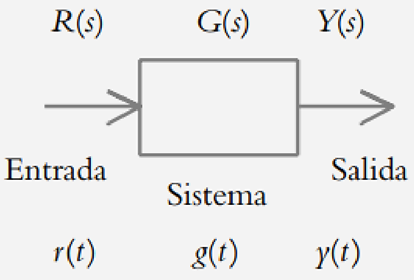
Ingeniería Mecatrónica

RELACIÓN ENTRE ENTRADA, SISTEMA Y SALIDA

Sea un sistema $\boldsymbol{g(t)}$ lineal de orden n e invariante en el tiempo al que se aplica una entrada $\boldsymbol{r(t)}$ o $\boldsymbol{x(t)}$, queda representado por una ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes y no homogénea.

$$\underbrace{\left(a_n\frac{d^n}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{d}{dt}+a_o\right)}_{\text{sistema}}\underbrace{y}_{\text{salida}} = \underbrace{b_o r(t)}_{\text{entrada}}$$

La relación entrada-sistema-salida se puede observar en el siguiente diagrama de bloque:

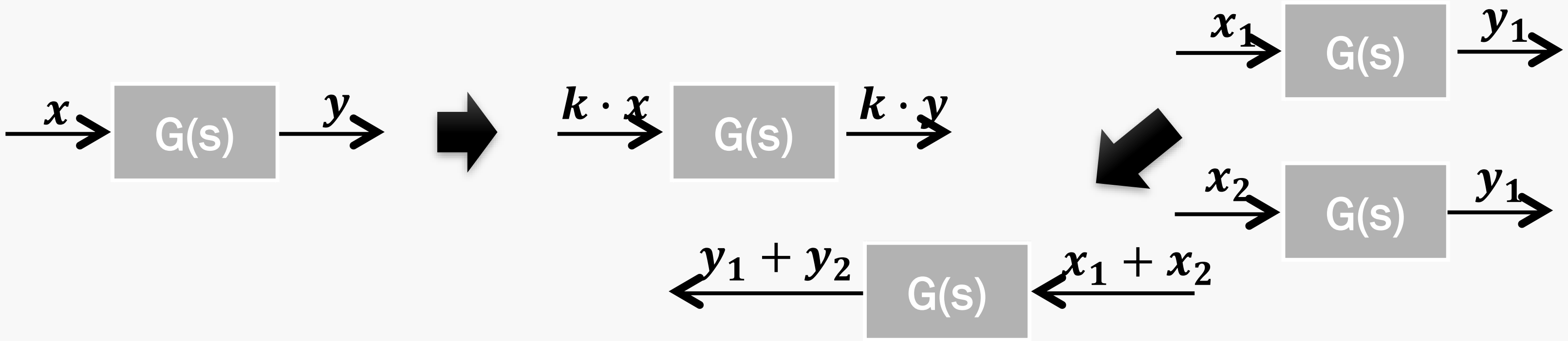


RELACIÓN ENTRE ENTRADA, SISTEMA Y SALIDA

Que es un sistema lineal e invariante en el tiempo LTI (Linear Time-Invariant)?

Es aquel que cumple las siguientes condiciones:

Linealidad: el sistema es lineal si satisface el principio de superposición que engloba las propiedades de proporcionalidad o escalado y aditividad.



RELACIÓN ENTRE ENTRADA, SISTEMA Y SALIDA

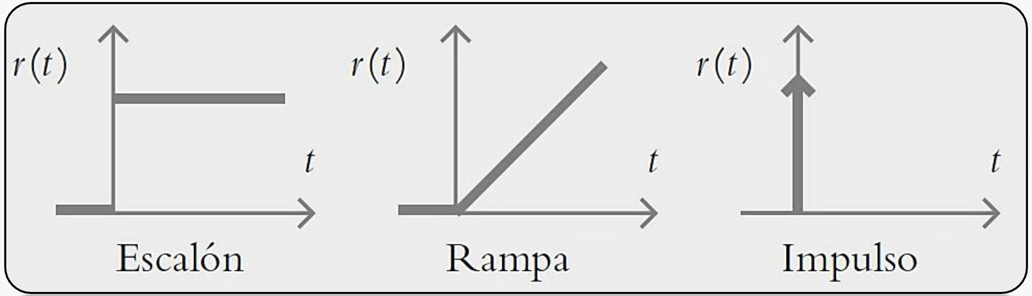
Invariabilidad: Un sistema es invariante con el tiempo si su comportamiento y sus características son fijas. Esto significa que los parámetros del sistema no van cambiando a través del tiempo y que por lo tanto, una misma entrada nos dará el mismo resultado en cualquier momento (ya sea ahora o después).

$$x(t) \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow y(t) \quad \Rightarrow \quad x(t-T) \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow y(t-T)$$

RELACIÓN ENTRE ENTRADA, SISTEMA Y SALIDA

Para los sistemas de control la entrada o comportamiento deseado pueden ser:

- Referencia constante o función escalón: $r(t) = A \cdot U(t)$.
- Referencia variable o función rampa: $r(t) = A \cdot t \cdot U(t)$; también puede ser parabólica: $r(t) = A \cdot t^2 \cdot U(t)$
- Referencia especial o función impulso: $\delta(t)$



RELACIÓN ENTRE ENTRADA, SISTEMA Y SALIDA

Si realizamos la **TL** ,es decir, su equivalente en el dominio s hallamos la salida en función de la siguiente relación:

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

$$\boldsymbol{Y(s) = R(s) \cdot G(s)}$$

Aplicando las distintas entradas vistas anteriormente, pero en el dominio s, obtenemos la salida o respuesta según sea el caso:

RELACIÓN ENTRE ENTRADA, SISTEMA Y SALIDA

- Para un entrada tipo escalón:

$$Y(s) = \frac{A}{s} \cdot G(s)$$

- Para una entada tipo rampa:

$$Y(s) = \frac{A}{s^2} G(s)$$

- Para una entrada tipo impulso:

$$Y(s) = 1 \cdot G(s) = G(s)$$

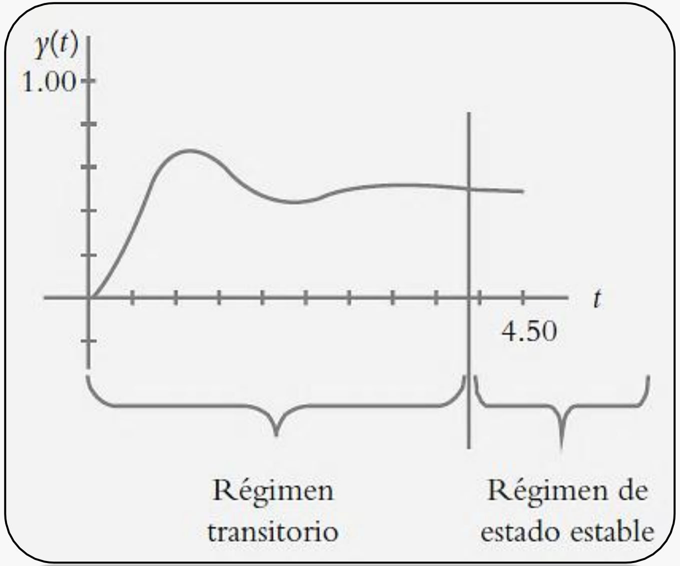
Nota: Por lo tanto si conocemos la respuesta al impulso (salida) podemos obtener la función del sistema $g(t)$.

RELACIÓN ENTRE ENTRADA, SISTEMA Y SALIDA

Por lo tanto para analizar la respuesta o salida en el dominio del tiempo ante una entrada especifica aplicamos la transformada inversa:

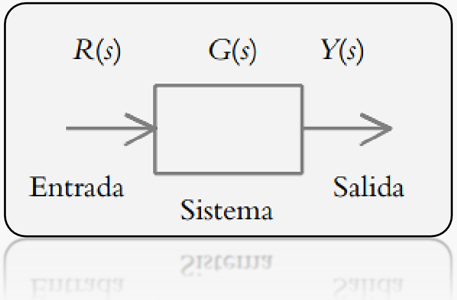
$$\mathcal{L}^{-1}\{R(s) \cdot G(s)\} = y(t)$$

Para un sistema estable, la respuesta $y(t)$ del sistema a una entrada $r(t)$ consta de dos componentes: régimen transitorio (o natural) y régimen en estado estable (o forzado).



FUNCIÓN TRANSFERENCIA

La F.T. de un sistema se define como el cociente de la transformada de Laplace de la variable de salida y la transformada de Laplace de la variable de entrada.

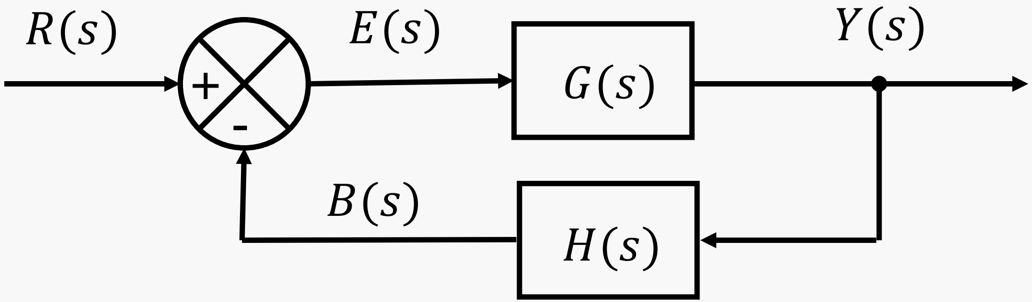


- ✓ La F.T. depende de las características del sistema y no de la magnitud y tipo de entrada.
- ✓ No proporciona información acerca de la estructura interna del sistema.
- ✓ Para su análisis dinámico se considera las condiciones iniciales nulas.

FUNCIÓN TRANSFERENCIA

La función de transferencia es una propiedad del sistema y depende de las propiedades físicas de los componentes del sistema, es por lo tanto independiente de las entradas aplicadas

Sea un lazo cerrado:



Función de transferencia en lazo abierto: $\frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$

Función de transferencia lazo cerrado: $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$

FUNCIÓN TRANSFERENCIA

Si $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{t})$ es lineal, su correspondiente transformada de Laplace $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{s})$ se denomina función transferencia y tendrá la forma:

$$G(s) = \mathrm{K}\frac{(s+z_0)(s+z_1)\cdots}{(s+p_0)(s+p_1)\cdots}$$

Donde las raíces del polinomio del numerador llamaremos **ceros**, y las raíces del denominador llamaremos **polos**.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

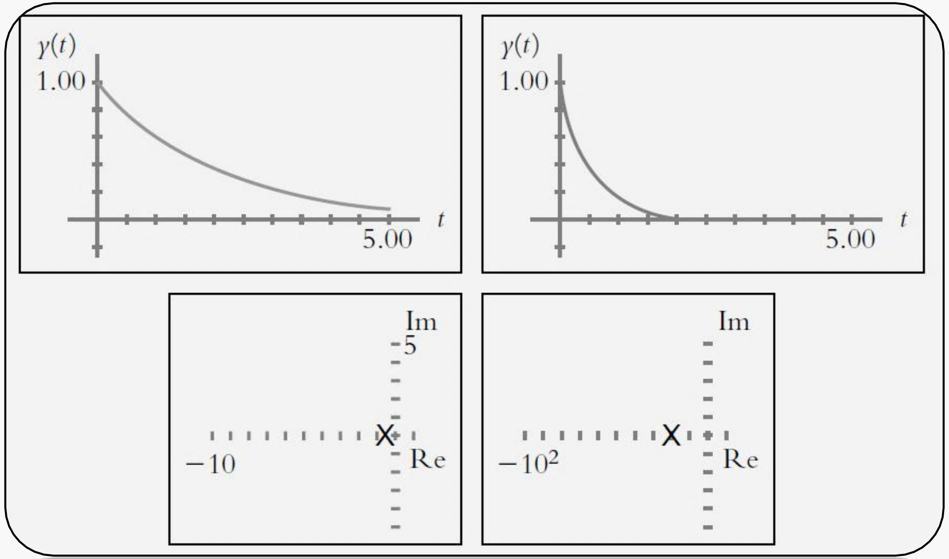
50 AÑOS

FACULTAD DE INGENIERÍA UNaM

FUNCIÓN TRANSFERENCIA

Al polo mas cercano al eje $j\omega$ se le llama polo dominante, ya que es el elemento que ejerce mayor efecto sobre el sistema.

Polo real:
comparando los diagramas en dominio del tiempo con el dominio en s de las funciones:
$\boldsymbol{g_1(t) = e^{-0.5t}}$ y $\boldsymbol{g_2(t) = e^{-2t}}$
tenemos:



FUNCIÓN TRANSFERENCIA

Podemos observar que en el **dominio tiempo** ambas funciones tienen valor final nulo y que una de las funciones alcanza mas rápidamente el valor final.

En el **dominio s** podemos ver que la posición del polo nos indica la velocidad de respuesta del sistema. Cuanto mas alejado hacia la izquierda esta el polo del eje $j\omega$ mas rápido será el sistema y en caso contrario mas lento se volverá el mismo.

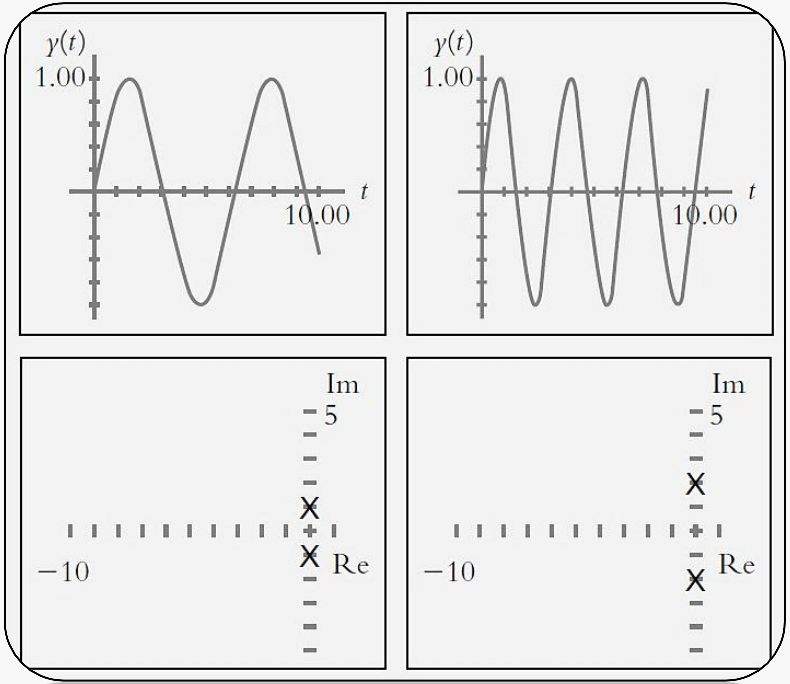
UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

50 AÑOS

FACULTAD DE INGENIERÍA UNaM

FUNCIÓN TRANSFERENCIA

Parte imaginaria: teniendo en cuenta las funciones $\boldsymbol{g_1(t) = \sin t}$ y $\boldsymbol{g_2(t) = \sin 2t}$ cuyas representaciones en el dominio tiempo y s se muestran en la figura. Podemos ver que la parte imaginaria del polo dominante corresponde a la frecuencia angular de oscilación ω del sistema.



ANALISIS CUALITATIVO DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA

Sistemas de primer orden: son aquellos que quedan definidos como por una ED de primer orden:

$$a \cdot \frac{dy}{dt} + b \cdot y = c \cdot r(t)$$

Aplicando Laplace obtenemos su ecuación de transferencia:

$$\boldsymbol{G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(c/a)}{s + (b/a)} \to \frac{(c/a)}{s + (b/a)} \cdot \frac{(a/b)}{(a/b)} = \frac{c/b}{(a/b)s + 1} = \frac{K}{\tau \cdot s + 1}}$$

$\boldsymbol{K}$ =ganancia del sistema (factor de amplificación entre la entrada y salida).

$\boldsymbol{\tau}$ = constante del tiempo del sistema.

ANALISIS CUALITATIVO DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA

Si aplicamos una entrada escalón $r(t) = AU(t)$ obtendremos la respuesta $y(t)$:

$$Y(s) = R(s) \cdot G(s) = \frac{A}{s} \cdot \frac{K}{\tau \cdot s + 1}$$

Anti-transformando obtenemos:

$$\boldsymbol{y(t) = A \cdot K\left[1 - e^{-t/\tau}\right]}$$

Cuyo valor final será:

$$\boldsymbol{\lim_{t \to \infty} y(t) = A \cdot K}$$

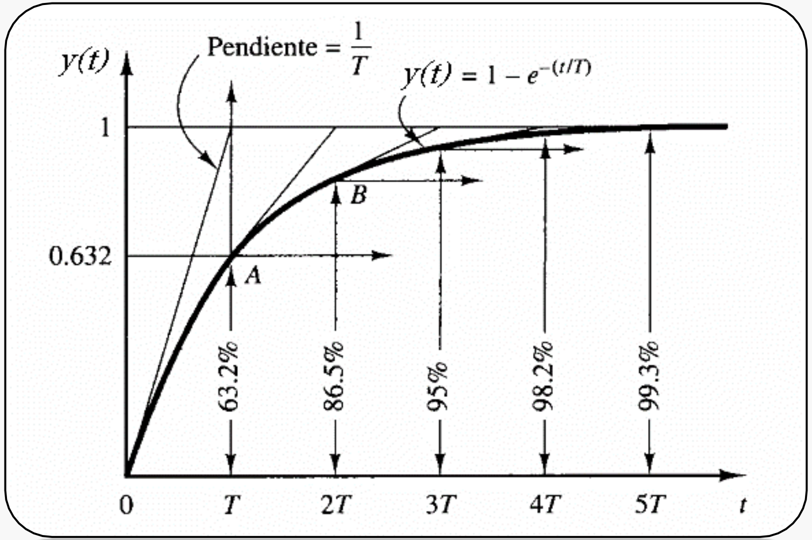
Si conocemos A, K y τ podemos determinar directamente la respuesta al escalón del sistema de primer orden.

ANALISIS CUALITATIVO DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA

Normalizando para $A \cdot K = 1$ tenemos:

$$\boldsymbol{y(t) = 1 - e^{-t/\tau}}$$

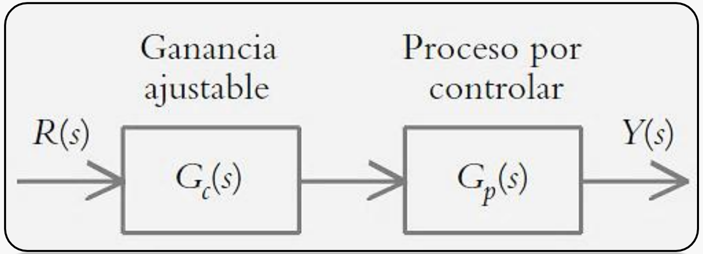
El tiempo de asentamiento (ta) que requiere el sistema para alcanzar su valor final corresponde a 4 constantes de tiempo.



ANALISIS CUALITATIVO DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA

Sistema de primer orden en lazo abierto:

$\mathrm{G(s)} = G_c(s) \cdot G_p(s)$



$$\mathrm{G(s)} = \frac{K \cdot K_s}{\tau \cdot s + 1} = \frac{\boldsymbol{K_{LA}}}{\boldsymbol{\tau_{LA} \cdot s + 1}}$$

Donde:

$$\boldsymbol{K_{LA}} = K \cdot K_s \rightarrow Ganancia\ en\ lazo\ abierto$$
$$\boldsymbol{\tau_{LA}} \rightarrow constante\ de\ tiempo\ en\ lazo\ abierto$$

Importante: NO confundir la ganancia del sistema con la ganancia ajustable.

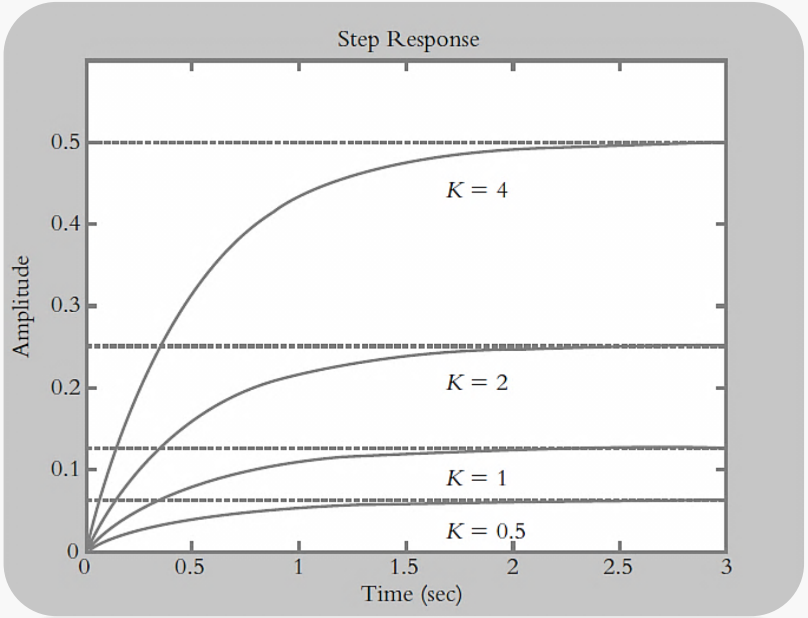
UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

50 AÑOS

FACULTAD DE INGENIERÍA UNaM

ANALISIS CUALITATIVO DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA

Variando *K*s entre 0 y 5 tenemos:



ANALISIS CUALITATIVO DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA

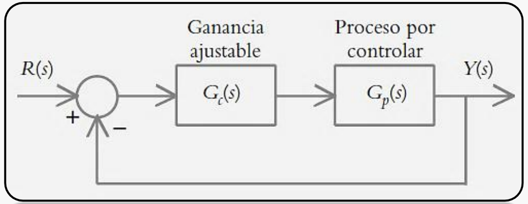
Sistema de primer orden en lazo cerrado:

$$\boldsymbol{T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}}$$

En lazo abierto

$$G(s) = G_c(s) \cdot G_p(s)$$

Y que $H(s)=1$



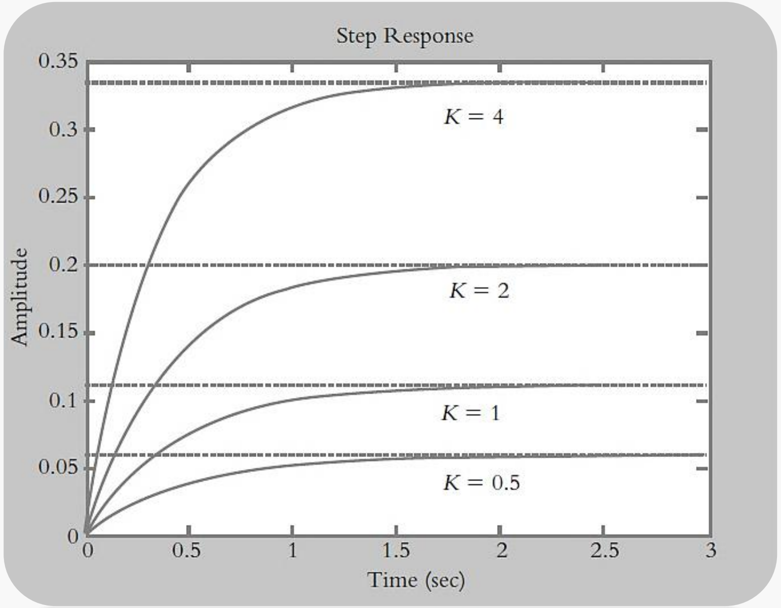
$$T(s) = \frac{\dfrac{K_{LA}}{\tau_{LA} \cdot s + 1}}{1 + \dfrac{K_{LA}}{\tau_{LA} \cdot s + 1}} = \frac{\dfrac{K_{LA}}{1 + K_{LA}}}{\dfrac{\tau_{LA}}{1 + K_{LA}} s + 1} = \frac{K_{LC}}{\tau_{LC} s + 1}$$

$$\mathbf{K_{LC} = \frac{K_{LA}}{1 + K_{LA}}} \rightarrow \textbf{ganancia en lazo cerrado}$$

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{LC}} = \frac{\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{LA}}}{\mathbf{1 + K_{LA}}} \rightarrow \textbf{constante de tiempo en lazo cerrado}$$

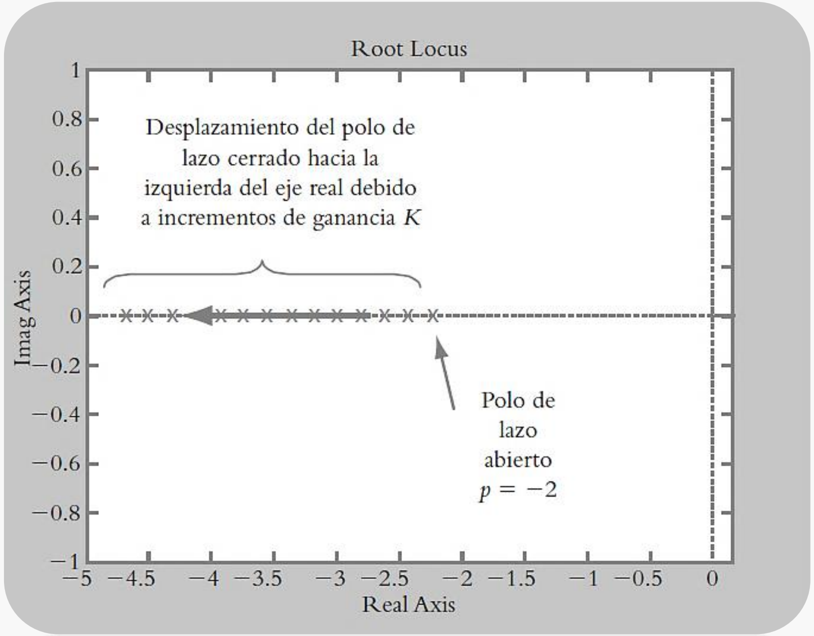
ANALISIS CUALITATIVO DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA

Variando Ks entre 0 y 5 tenemos:



ANALISIS CUALITATIVO DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA

En el plano s tenemos:



ANALISIS CUALITATIVO DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA

Conclusión: en el análisis de lazo abierto vemos que el incremento de la ganancia $\boldsymbol{Ks}$, ante una entrada escalón, no afecta a la velocidad del sistema ya que su polo permanece en la misma posición, en cambio en el lazo cerrado el polo se desplazara hacia la izquierda como consecuencia del incremento de $\boldsymbol{Ks}$ por lo que la velocidad del sistema se hace cada vez mas rápida.

La representación de los polos de lazo cerrado ante la variación de ganancia se denomina lugar geométrico de raíces

ANALISIS CUALITATIVO DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA

Sistemas de 2do orden:

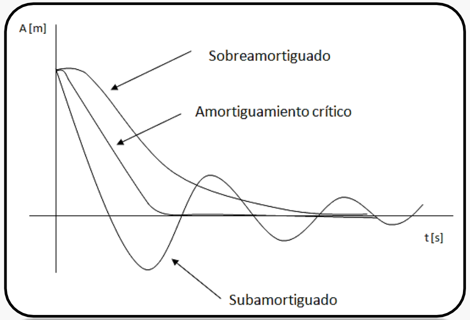
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt}a_1 + a_0 \cdot y = b_0 \cdot r(t)$$

Aplicando la transformada de Laplace obtenemos la función transferencia:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\boldsymbol{b_0}}{\boldsymbol{s^2 + a_1 s + a_0}}$$

Según sean los valores de a_0 respecto de a_1 el sistema de 2do orden puede ser:

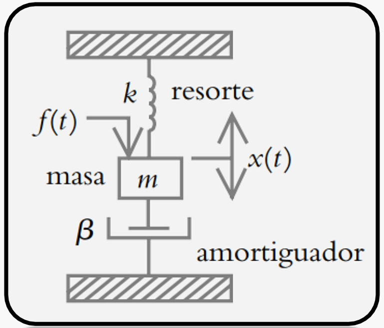
- ✓ Sobre-amortiguado.
- ✓ Críticamente amortiguado.
- ✓ Sub-amortiguado.
- ✓ Libre oscilatorio.



ANALISIS CUALITATIVO DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA

Por ejemplo para un sistema masa-resorte-amortiguador tenemos que su función transferencia es:

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + \beta s + k}$$



Analizando las raíces del polinomio característico (polinomio del denominador) nos permitirá obtener el comportamiento del sistema para distintos casos.

ANALISIS CUALITATIVO DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA

Realizando un arreglo matemático del polinomio característico tenemos:

$$s^2 + 2\lambda\omega_n s + \omega_n{}^2 = 0$$

Donde:

$$\boldsymbol{\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \text{frecuencia natural no amortiguada}}$$

$$\boldsymbol{\lambda = \frac{1}{2}\frac{\beta}{\sqrt{km}} \rightarrow amortuguamiento\ del\ sistema}$$

La importancia de numero λ radica en que se le pueden asignar diferentes valores con lo cual el comportamiento resultante del sistema será totalmente distinto

ANALISIS CUALITATIVO DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA

Respuesta libre oscilatoria $\lambda = 0$ los polos resultantes son complejos con parte real nula.
Respuesta críticamente amortiguada $\lambda = 1$ los polos son reales repetidos.
Respuesta sobre-amortiguada $\lambda > 1$ los polos son reales distintos.
Respuesta sub-amortiguada $0 < \lambda < 1$ los polos serán complejos conjugados con parte real distinta de cero.

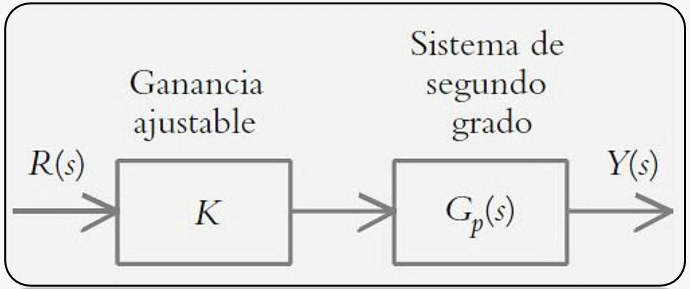
ANALISIS CUALITATIVO DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA

Análisis del sistema de 2do grado en lazo abierto:

$$G_c(s) = K$$

$$G_p(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\lambda\omega_n)}$$

$$\mathrm{G(s)} = G_c(s) \cdot G_p(s)$$

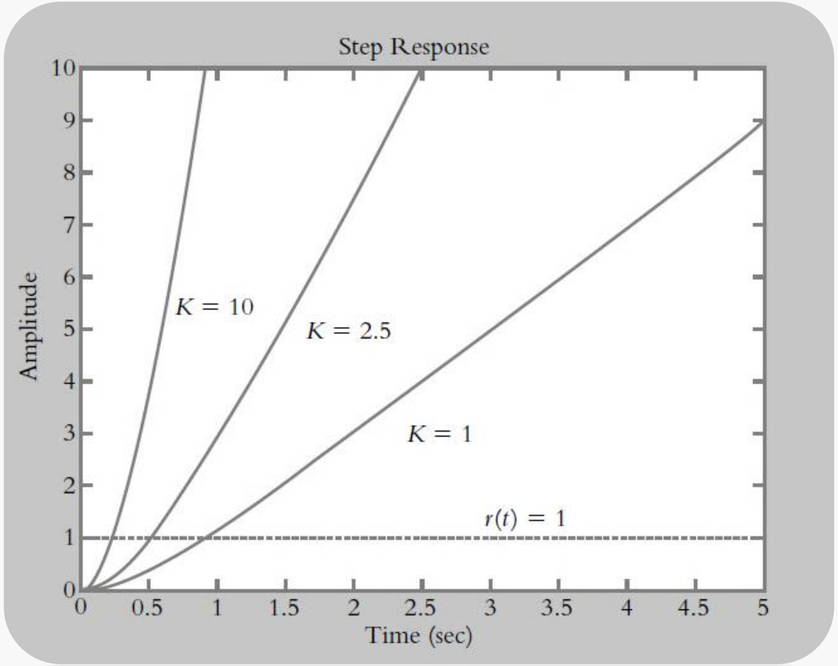


$$\mathrm{G(s)} = \frac{K\omega_n^2}{s(s + 2\lambda\omega_n)}$$

$$0 < K < 10, \lambda = 0.5, \omega_n = 2$$

ANALISIS CUALITATIVO DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA

Como podemos observar el sistema es incapaz de seguir la referencia ante una entrada escalón.



ANALISIS CUALITATIVO DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA

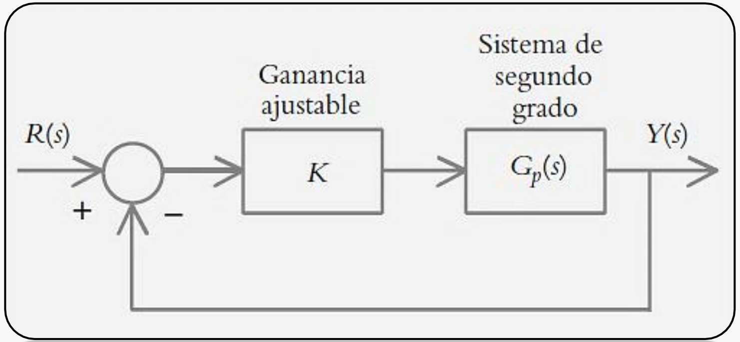
Lazo cerrado:

$$G_c(s) = K$$

$$G_p(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\lambda\omega_n)}$$

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)}$$

$$\mathrm{T}(\mathrm{s}) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\lambda\omega_n s + K\omega_n^2}$$



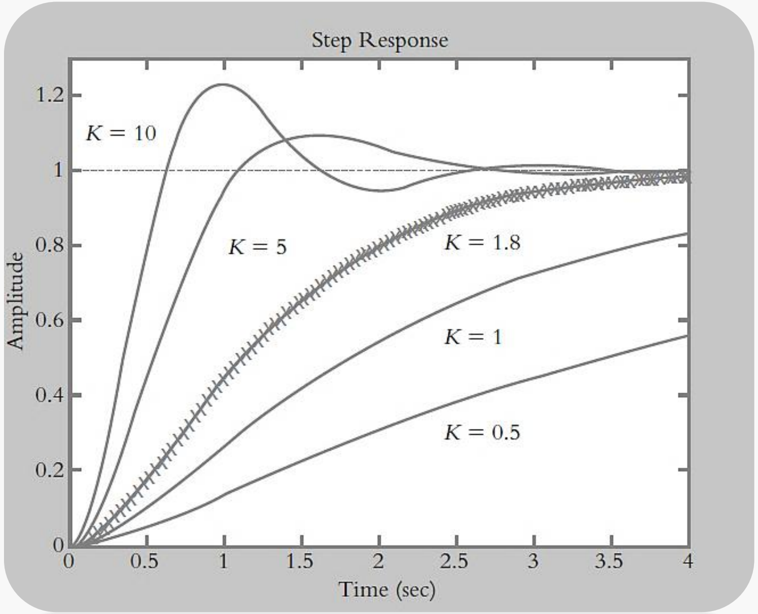
UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

50 AÑOS

FACULTAD DE INGENIERÍA UNaM

ANALISIS CUALITATIVO DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA

En este caso observamos que la respuesta para valores de K mayores a 1.8 (comportamiento subamortiguado) el offset es mínimo.



ANALISIS CUALITATIVO DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA

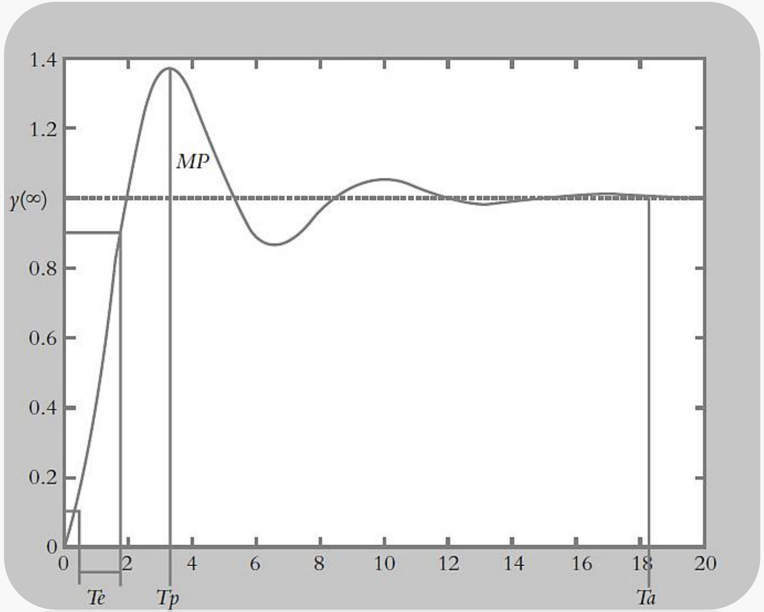
Para diseñar sistemas de control es necesario identificar ciertos parámetros tanto en el régimen transitorio como en el permanente. Por lo tanto si se tomara como referencia el comportamiento (salida) de un sistema de 2do orden sub-amortiguado ante una entrada escalón. Los parámetros a tener en cuenta son:

ANALISIS CUALITATIVO DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA

Máximo pico de sobreimpulso MP: es la máxima sobredesviación de la respuesta respecto a su valor final.
Tiempo de pico Tp: el tiempo en el que se alcanza su máximo pico de sobreimpulso.
Tiempo de asentamiento Ta: tiempo que necesita el sistema para alcanzar su valor final (4τ).
Tiempo de elevación Te: tiempo requerido para que la respuesta pase del 10% al 90% de su valor final.

ANALISIS CUALITATIVO DE LA RESPUESTA DE UN SISTEMA

Respuesta sub-amortiguada de un sistema de 2do orden para una entrada escalón unitario.



Muchas Gracias

Bibliografía:

- ❑ Introducción a los sistemas de control-Hernandez Gaviño
- ❑ Ingeniería de control moderna-Katsuhiko Ogata
- ❑ Control Automático de procesos-Smith Corripio