UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

50 AÑOS

FACULTAD DE INGENIERÍA UNaM

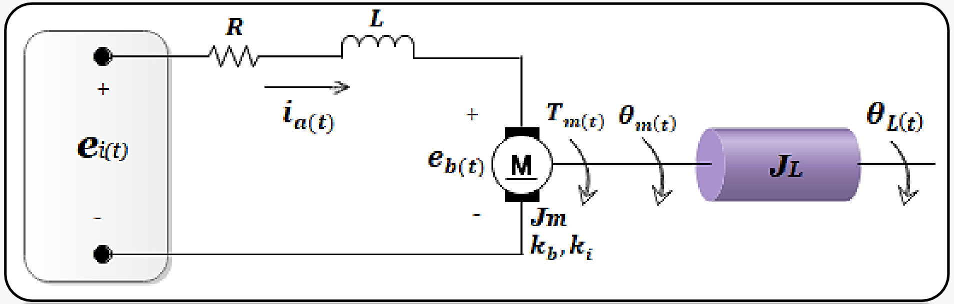
CONTROL AUTOMÁTICO
AÑO 2025

Ingeniería Mecatrónica

ECUACIONES DIFERENCIALES (ED)

Para que me sirven?

Las leyes científicas, que por supuesto están basadas en experimentos u observaciones, se traducen en ecuaciones matemáticas. En cada caso las ED`s representan una simplificación idealizada del problema físico con el que nos encontramos, llamándose esta *idealización Modelo Matemático*.



ECUACIONES DIFERENCIALES (ED)

Tipos de ED:

EDO (ecuación diferencial ordinaria): es aquella que solamente contiene una sola variable independiente.

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$$

EDP (ecuación diferencial parcial): en este caso la ecuación diferencial tendrá dos o mas variables independientes

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2} = 0$$

ECUACIONES DIFERENCIALES (ED)

Como se clasifican las ED´s?

ORDEN: queda determinado por el orden del mayor derivada de la ED.

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$$

2°ORDEN

GRADO: queda determinado por el exponente de la mayor derivada contenida en la ED.

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0$$

1°GRADO

ECUACIONES DIFERENCIALES (ED)

ED LINEAL: es aquella donde su suma esta formada por términos lineales.
Un término lineal es aquel que es de primer grado para las variables dependientes y sus derivadas; no hay productos y funciones trascendentales de las variables dependientes.

ED HOMOGENEA: es aquella donde la variable dependiente y sus derivadas están en todos y cada uno de los términos de la ecuación.

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=0$$

ECUACIONES DIFERENCIALES (ED)

Finalizando…en control para que nos sirve?

Si generalizamos una ED lineal de orden n y de coeficientes constantes:

$$\boldsymbol{a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 r\,(t)}$$

Podemos notar que el término que hace no homogénea la ED es de suma importancia en los sistemas de control, ya que $\boldsymbol{b_0\, r(t)}$ se interpreta como la entrada que se aplica al sistema.

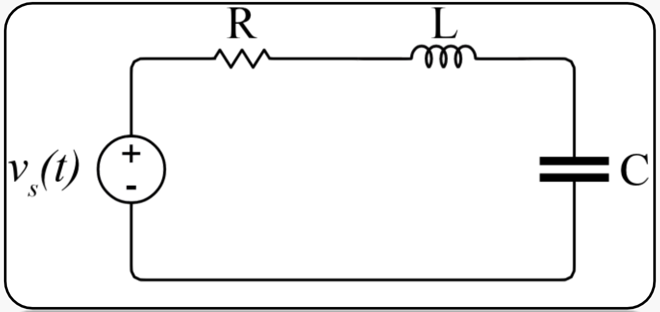
UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

50 AÑOS

FACULTAD DE INGENIERÍA UNaM

Aplicaciones de la ED

Sea el siguiente sistema RLC



Hallar a ecuación integro-diferencial (en función de la corriente del circuito *i*) o diferencial (en función de la carga *q*) del circuito RLC. Para la resolución se debe tener en cuenta la ley de Kirchhoff.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

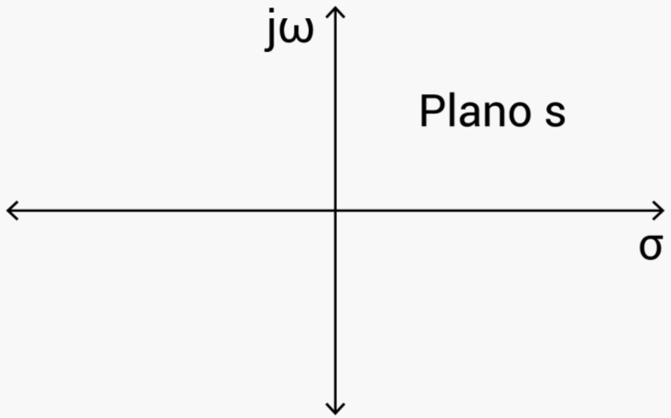
50 AÑOS

FACULTAD DE INGENIERÍA UNaM

Transformada de Laplace (TL)

Para que utilizaríamos la TL?

Es una herramienta muy útil para resolver las ED`s, es decir, podemos transformar las ED´s lineales NO HOMOGÉNEAS en ecuaciones algebraicas.



La TL convierte una función *g(t)* del dominio en el tiempo, definida para tiempos mayores o iguales a cero, en una función *G(s)* propia del dominio s mediante una integral impropia.

Transformada de Laplace (TL)

La TL convierte una ecuación diferencial de orden n en una ecuación algebraica equivalente al orden de la ED:

$$L\{g(t)\} = \int_0^{\infty} g(t)e^{-st}dt = G(s)$$

$$G(s) = K\frac{(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + b_1 s + b_0)}{(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_1 s + a_0)}e^{-T}$$

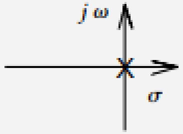
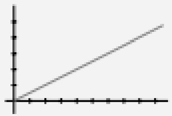
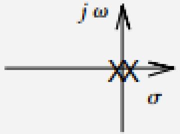
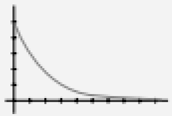
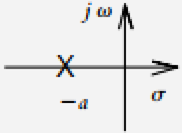
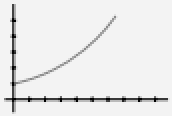
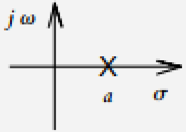
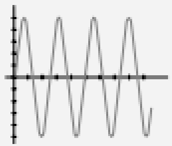
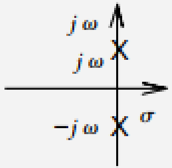
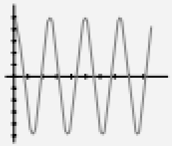
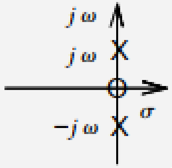
$$G(s) = K\frac{(s+z_0)(s+z_1)\cdots}{(s+p_0)(s+p_1)\cdots}$$

k=es la constante del sistema.
m=es e grado del polinomio del numerador
n=es el grado de polinomio del denominador
T=es el atraso de tiempo (que consideramos cero)

z=Ceros del sistema
p=Polos del sistema

Transformada de Laplace (TL)

Diagramas de polos y ceros

$g(t)$	Gráfica en tiempo	$G(s)$	Gráfica en el plano
1. A		$\frac{A}{s}$	
2. At		$\frac{A}{s^2}$	
3. Ae^{-at}		$\frac{A}{s+a}$	
4. Ae^{at}		$\frac{A}{s-a}$	
5. $A \operatorname{sen} \omega t$		$A\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	
6. $A \cos \omega t$		$A\frac{s}{s^2+\omega^2}$	

Transformada de Laplace (TL)

$g(t)$	$G(s)$
$A\,U(t)$	$A\frac{1}{s}$
At	$A\frac{1}{s^2}$
At^n	$A\frac{n!}{s^{n+1}}$
Ae^{-at}	$A\frac{1}{s+a}$
Ae^{at}	$A\frac{1}{s-a}$
$A \operatorname{sen} \omega t$	$A\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$A \cos \omega t$	$A\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{\pm at}$	$\frac{1}{s \mu a}$

Pares de TL

$g(t-T)U(t-T)$	$G(s)e^{-sT}$
$g'(t)$ $g''(t)$	$sG(s)-g(0)$ $s^2G(s)-sg(0)-g'(0)$
$\int_o^t g(u)\,du$	$G(s)\frac{1}{s}$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

50 AÑOS

FACULTAD DE INGENIERÍA UNaM

Transformada de Laplace (TL)

Propiedades

Propiedad	Señal	Transformada
	$f(t)$ $g(t)$	$F(s)$ $G(s)$
Linealidad	$Af(t) + Bg(t)$	$AF(s) + BG(s)$
Diferenciación en t	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
Diferenciación en t	$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) ... - f^{(n-1)}(0)$
Desplazamiento en s	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
Diferenciación en s	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
Escalamiento en t	$f(at)$	$(1/a)F(s/a)$
	$\begin{cases} f(t-a) & \text{si } t > a \\ 0 & \text{si } t < a \end{cases}$	$e^{-as} F(s)$
	$f(t)$ periódica (P)	$\frac{\int_0^P e^{-st} f(t) dt}{1-e^{-sP}}$
Convolución	$f(t) * g(t)$	$F(s)\,G(s)$
Integración en t	$\int_0^t f(u) du$	$F(s)/s$

Transformada de Laplace (TL)

Mientras descansamos…

Resolver los siguientes ejercicios:

$$L\{e^{-4t}\cos(2t)\} \rightarrow G(s) = \frac{s+4}{(s+4)^2+4} = \frac{s}{s^2+8s+20}$$

$$L\left\{m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + \mathrm{ky}\right\} \rightarrow m[s^2 \cdot Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)] + b[sY(s) - y(0)] + kY(s) = F(s)$$

$$L\{\cos(t+4)U(t+4)\} \rightarrow G(s) = \frac{s}{s^2+1}e^{4s}$$

Transformada Inversa de Laplace (TI)

Si $L\{g(t)\} = G(s)$ se dice que *g(t)* es la transformada inversa de la función *G*(*s*); esto es:

$$\boldsymbol{L^{-1}\{G(s)\} = g(t)}$$

Las propiedades básicas de Laplace también son aplicables a las propiedades de su inversa

Para que me sirve la TI?

Para nuestro estudio, podemos hallar la función (respecto de t) de la respuesta de nuestro sistema.

Transformada Inversa de Laplace (TI)

Pares de TI

$G(s)$	$g(t)$
$A\frac{1}{s}$	$A\,U(t)$
$A\frac{1}{s^2}$	$A\,t$
$A\frac{1}{s^{n+1}}$	$A\frac{t^n}{n!}$
$A\frac{1}{s+a}$	Ae^{-at}
$A\frac{1}{s-a}$	Ae^{+at}
$A\frac{1}{s^2+\omega^2}$	$\frac{A}{\omega}\operatorname{sen}\omega t$
$A\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$A\cos\omega t$

Transformada Inversa de Laplace (TI)

Descomposición en fracciones parciales: en ocasiones ocurre que $G(s)$ es de tal forma que la transformada inversa no puede determinarse directamente, por lo tanto podemos obtener expresiones mas sencillas utilizando el método llamado descomposición en fracciones parciales (o simples).

Caso I: $G(s)$ tiene polos reales

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

$$\boldsymbol{G(s) = \frac{A}{(s+p_1)} + \frac{B}{(s+p_2)} + \cdots \frac{N}{(s+p_n)}}$$

Transformada Inversa de Laplace (TI)

Caso II: $G(s)$ tiene n polos reales repetidos

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s+p)^n}$$

$$\boldsymbol{G(s) = \frac{A}{(s+p)} + \frac{B}{(s+p)^2} + \cdots \frac{N}{(s+p)^n}}$$

Caso III: $G(s)$ tiene polos complejos distintos

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s^2+b_1s+c_1)(s^2+b_2s+c_2)\cdots(s^2+b_ns+c_n)}$$

$$\boldsymbol{G(s) = \frac{As+B}{(s^2+b_1s+c_1)} + \frac{Cs+D}{(s^2+b_2s+c_2)} + \cdots \frac{Ms+N}{(s^2+b_ns+c_n)}}$$

Transformada Inversa de Laplace (TI)

Caso IV: $G(s)$ tiene polos complejos repetidos

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s^2 + bs + c)^n}$$

$$\boldsymbol{G(s) = \frac{As + B}{(s^2 + bs + c)} + \frac{Cs + D}{(s^2 + bs + c)^2} + \cdots \frac{Ms + N}{(s^2 + bs + c)^n}}$$

Ultimo descanso..

Por descomposición de fracciones parciales obtenga la TIL de:

$$G(s) = \frac{2s^2-4}{(s+1)(s-2)(s-3)}$$

$$G(s) = \frac{s^2+2s+3}{(s^2+2s+2)(s^2+2s+5)}$$

$$G(s) = \frac{2s^2 + 6s + 5}{(s + 2)(s + 1)^2}$$

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

50 AÑOS

FACULTAD DE INGENIERÍA UNaM

Muchas Gracias

Bibliografía:

- Introducción a los sistemas de control-Hernández Gaviño
- Ingeniería de control moderna-Katsuhiko Ogata
- Control Automático de procesos-Smith Corripio