

CAPITULO 4

MEDICIÓN DE ANGULOS

4.	Medición de ángulos	4-1
4.1.	Límites del campo topográfico planimétrico	4-2
4.2.	Medición de ángulos horizontales por medio de distancias horizontales	4-3
4.2.1.	Por la ley del coseno	4-3
4.2.2.	Por construcción de triángulo isósceles	4-4
4.3.	Medición de ángulos con teodolitos	4-6
4.3.1.	Condiciones de exactitud	4-6
4.3.1.1.	El eje vertical [VV] debe coincidir con la vertical	4-6
4.3.1.2.	El eje horizontal [HH] debe ser perpendicular a [VV]	4-8
4.3.1.3.	El eje de colimación [CC] debe ser perpendicular a [HH]	4-10
4.3.1.4.	El eje vertical [VV] debe pasar por el centro del círculo horizontal [O]	4-11
4.3.1.5.	El eje de colimación [CC] debe cortar a [VV]	4-12
4.3.1.6.	Intervalos de los círculos graduados con igual amplitud	4-14
4.3.1.6.1	Método de repetición	4-15
4.3.1.6.2	Método de reiteración	4-17
4.3.1.7.	El eje de colimación [CC] y el eje del nivel tórico deben ser paralelos	4-18
4.4.	Sistemas de lectura de círculos graduados	4-20
4.4.1.	Sistema de Nonio o Vernier	4-20
4.4.2.	Otros sistemas de lectura	4-22
	Problemas propuestos	4-23

4. MEDICIÓN DE ÁNGULOS

La topografía puede, en forma muy general, ser clasificada en planimétrica y altimétrica.

Planimétricamente un punto de la superficie terrestre puede ser ubicado sobre el plano horizontal por medio de sus coordenadas polares al medir el ángulo horizontal y la distancia (figura 1.3). La ubicación altimétrica se determina por medio del ángulo vertical.

Durante siglos, el hombre ha ideado diferentes instrumentos para la medición simultánea de ángulos horizontales y verticales, siendo quizás la aparición del “POLIMETRUM”¹ (figura 4.1), diseñado por el clérigo Martín Waldseemüler alrededor del año 1.512, el primer prototipo de los teodolitos actuales.

También se le atribuye al matemático inglés Leonard Digges la invención en la segunda mitad del siglo XVI del primer instrumento de medida de ángulos predecesor del teodolito.

En el presente capítulo estudiaremos los instrumentos y métodos utilizados en la medición angular.

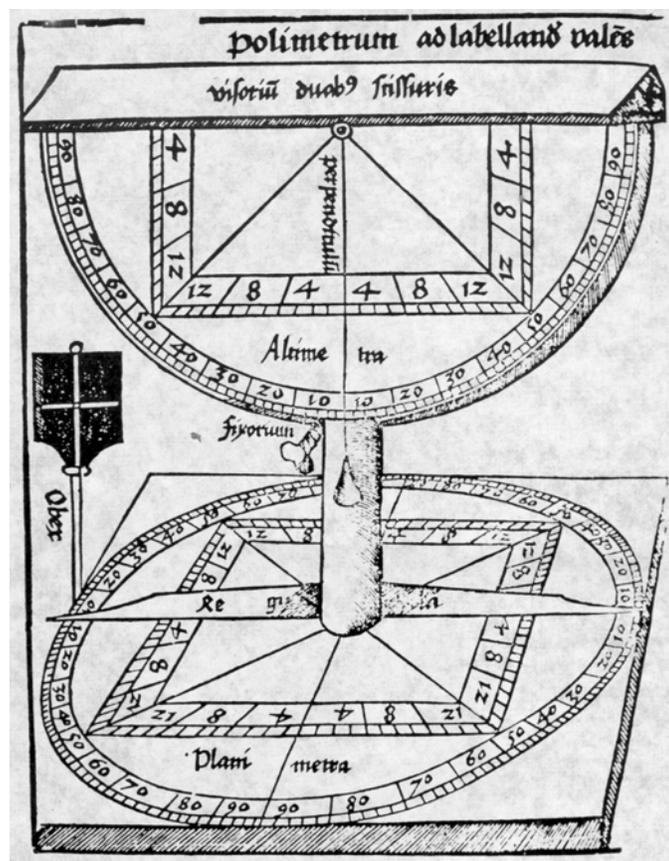


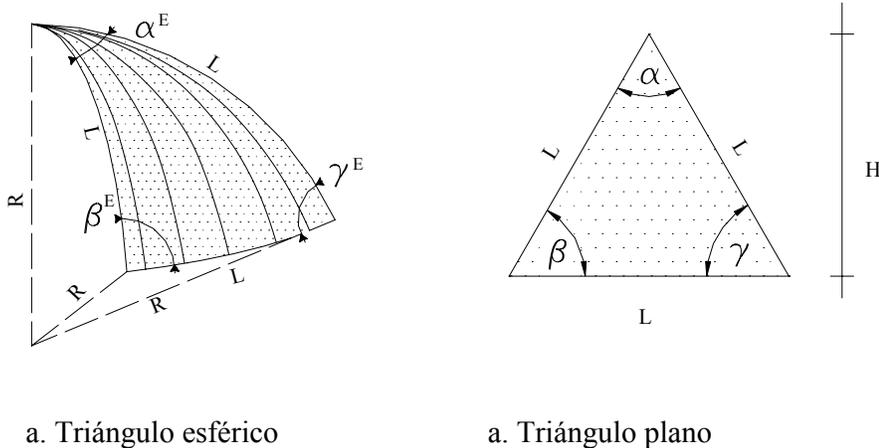
Figura 4.1. El Polimetrum

¹ Bedini Silvio A. (1991). Publicado en la portada de la Revista Profesional Surveyor, Vol. 11, No. 5,.

4.1. Límites del Campo Topográfico Planimétrico

Los ángulos horizontales pueden ser medidos directamente con brújula o teodolito, o en forma indirecta por medio de la medición de distancias horizontales.

Como los ángulos horizontales se miden sobre el plano horizontal, es necesario determinar hasta que punto la Tierra puede ser considerada como plana, sin que el error que se cometa en la medición del ángulo sea mayor que la precisión del equipo utilizado para la medición del ángulo.



a. Triángulo esférico

a. Triángulo plano

Figura 4.2. El triángulo esférico

En un triángulo esférico (figura 4.2.a) se cumple

$$\alpha^E + \beta^E + \gamma^E = 180^\circ + EE \quad (4.1)$$

en donde el exceso esférico EE viene dado por

$$EE'' = \frac{206.265'' A^E}{R^2} \quad (4.2)$$

siendo:

A^E = área del triángulo esférico

R = radio de la esfera terrestre = 6.367 km

Un triángulo plano equivalente al triángulo esférico, con un área A^P , se puede obtener corrigiendo los ángulos del triángulo esférico con un valor igual a

$$C_{EE}'' = \frac{-EE''}{3} \quad (4.3)$$

sustituyendo (4.2) en (4.3)

$$C_{EE}'' = \frac{206.265'' A^P}{3R^2} \quad (4.4)$$

en donde

A^P = área del triángulo plano equivalente

Considerando la figura 4.2.b

$$A^P = \frac{L^2}{4} \tan 60^\circ \quad (4.5)$$

y sustituyendo (4.5) en (4.4) tenemos:

$$C_{EE}'' = \frac{206.265'' \times L^2 \tan 60^\circ}{12R^2} \quad (4.6)$$

Resolviendo la (4.6) para distintos valores de L tenemos

Tabla 4.1
Valores de C_{EE}''

L (km)	25	30	35	40
C_{EE}''	0,46	0,66	0,90	1,18

Considerando que los ángulos horizontales pueden ser medidos con equipos con apreciaciones de 1", y recordando el límite del campo topográfico para la medición de distancias (determinado en el capítulo 3), podemos establecer un campo topográfico planimétrico de 25 km.

Habiendo establecido los límites del campo topográfico, tanto planimétrico como para la medición de distancias, podemos definir a la topografía que se realiza dentro de estos límites, considerando la Tierra como plana, como **topografía plana**.

4.2. Medición de Ángulos Horizontales por Medio de Distancias Horizontales

4.2.1. Por la Ley del Coseno

Los ángulos de un triángulo oblicuo como el mostrado en la figura 4.3, pueden ser determinados en función de sus lados mediante la aplicación de la Ley del Coseno

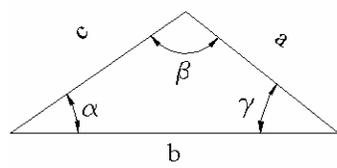


Diagrama de un triángulo oblicuo con lados a , b , c y ángulos α , β , γ . El ángulo α está opuesto al lado a , β opuesto a b , y γ opuesto a c .

$$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

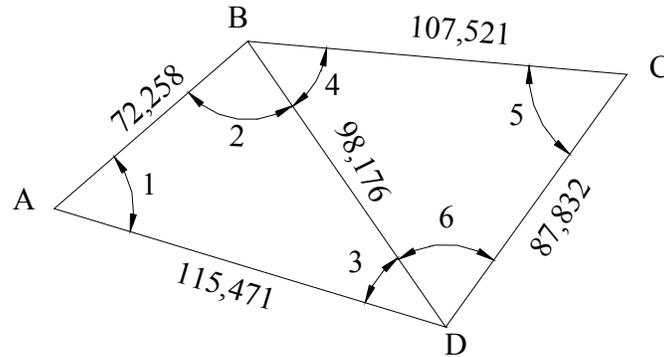
$$\beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) \quad (4.7)$$

$$\gamma = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)$$

Figura 4.3. Cálculo del ángulo en función de los lados. Ley del coseno

Ejemplo 4.1

Con las distancias horizontales indicada en la figura E.4.1. Calcule los ángulos en los vértices 1, 2, ..., 6

**Figura E.4.1****Solución**

Para facilitar los cálculos requeridos es recomendado la tabulación de los datos en la forma que se indica.

Tabla TE4.1

TRIÁNGULO	VÉRTICE	ÁNGULO	LADOS			ÁNGULO HORIZONTAL
			ADYACENTES	OPUESTO		
ABD	A	1	72,258	115,471	98,176	57°42'10",4
	B	2	98,176	72,258	115,471	83°49'29",2
	D	3	115,471	98,176	72,258	38°28'20",4
					Σ	179°59'60"
BCD	B	4	107,521	98,176	87,832	50°18'10",3
	C	5	87,832	107,521	98,176	59°19'18",9
	D	6	98,176	87,832	107,521	70°22'30",8
					Σ	179°59'60"

4.2.2. Por Construcción de Triángulo Isósceles

Otro procedimiento de fácil aplicación es la construcción de un triángulo isósceles en el vértice del ángulo a medir (figura 4.4), trazando un arco de radio conveniente, interceptando los lados adyacentes en los puntos b y c, luego se mide la cuerda b, c. A partir de la figura 4.4. se tiene

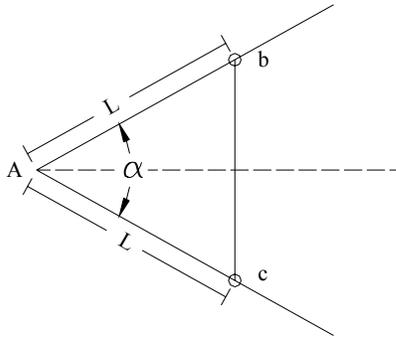


Figura 4.4

$$\alpha = 2 \arcsen\left(\frac{bc}{2L}\right) \quad (4.8)$$

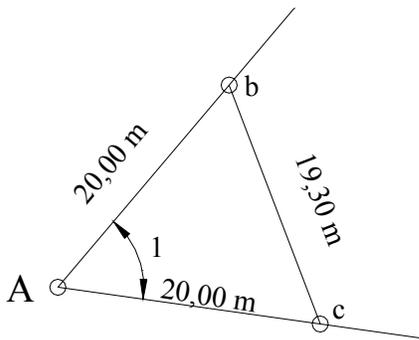


Figura E.4.2.

Ejemplo 4.2

Sobre el vértice A de la figura E.4.2., se decidió efectuar la medición del ángulo por el método del triángulo isósceles, obteniendo los datos que se muestran en la figura E.4.2. Calcule el valor del ángulo 1.

Solución

Reemplazando los datos de la figura E4.2 en la ecuación (4.8) tenemos:

$$\alpha = 2 \arcsen\left(\frac{19,300}{2 \times 20}\right) = 57,69762$$

$$\alpha = 57^{\circ}41'51'',4$$

Ejemplo 4.3

Calcule los elementos necesarios para replantear el punto B de la figura E4.3. conociendo la alineación AC, α y la distancia AB.

Solución:

El replanteo se puede calcular mediante la aplicación de la (4.8) asumiendo $L = 10$ m y calculando bc.

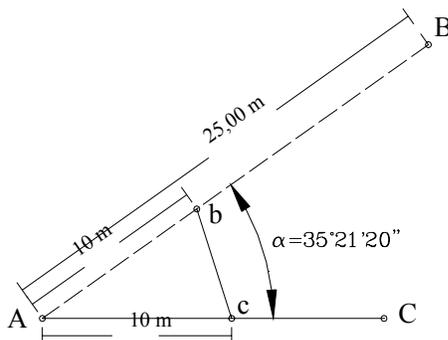


Figura E. 4.3.

$$\alpha = 2 \arcsen\left(\frac{bc}{2L}\right)$$

$$bc = 2L \sen \frac{\alpha}{2} = 20 \sen\left(\frac{35^\circ 21' 20''}{2}\right)$$

$$bc = 6,073 \text{ m}$$

Parados en el vértice A, con una cinta indicando una lectura de 10 m, y en c, con una cinta indicando una lectura de 6,073 m; localizamos, por intersección, el punto b. Como el punto b debe caer dentro de la alineación AB, localizamos B a una distancia de 25 m, a partir de A sobre la prolongación de la alineación Ab, o midiendo 15 m a partir de b sobre la misma alineación.

4.3. Medición de Ángulos con Teodolitos

Para el estudio del presente capítulo, destinado a la medición de ángulos con teodolitos, es necesario, en primer lugar, determinar las condiciones que se deben cumplir para la medición exacta de los ángulos.

4.3.1. Condiciones de Exactitud

Para facilitar el estudio de las condiciones de exactitud de un teodolito nos referiremos a la representación esquemática de los ejes de un teodolito de la figura 2.22. Para medir correctamente los ángulos horizontales se debe cumplir

4.3.1.1. El eje vertical (VV) o eje de rotación de la alidada debe coincidir con la vertical del lugar determinado por la dirección de la plomada. Esta condición se verifica en el momento de puesta en estación del teodolito mediante el empleo del nivel tórico en la base del teodolito. A continuación se describe el procedimiento de campo para la puesta en estación de un teodolito.

Puesta en Estación de un Teodolito

1. Coloque el instrumento sobre la estación tratando que la base del trípode esté lo más nivelada posible, y la plomada lo más cerca posible del punto de estación. Debe tenerse cuidado de extender las patas del trípode hasta una altura conveniente para que el proceso de medición se haga en forma cómoda y rápida.
2. Fije una de las patas del trípode firmemente al terreno y levantando las otras dos, mientras observa la plomada, muévalas lentamente hasta que el retículo de la plomada óptica coincida exactamente con el punto de estación.
3. Fije las patas del teodolito firmemente al terreno y actuando sobre los tornillos nivelantes de la base del teodolito [B]*, vuelva a centrar la plomada sobre la estación.
4. Deslizand las patas extensibles del trípode (figura 4.5), centre la burbuja del nivel esférico de la base del teodolito [C].

* En el presente capítulo, al mencionar algunas de las partes de un teodolito, nos referiremos a la representación esquemática de un teodolito de la figura 2.23.

5. Compruebe que la plomada aun coincida con el punto de estación. De ser necesario, afloje un poco el tornillo de sujeción del trípode a la base del teodolito y desplace suavemente la base hasta volver a lograr la coincidencia. Ajuste nuevamente el tornillo de sujeción.

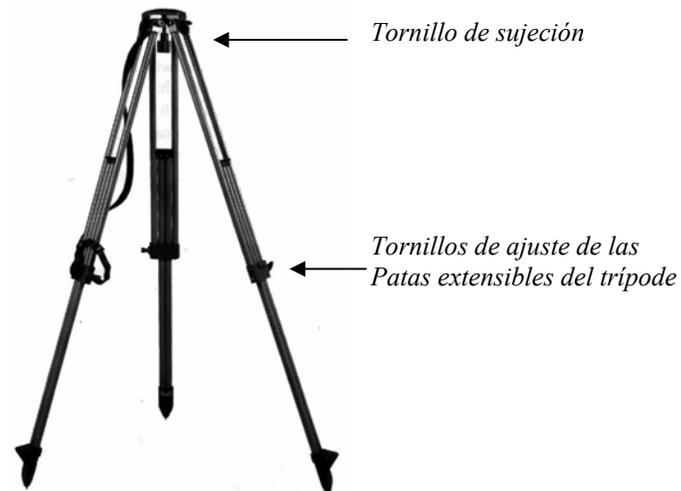


Figura 4.5. Trípode con Patas Extensibles

6. Con los tornillos nivelantes [B], vuelva a centrar la burbuja del nivel esférico.
7. Proceda a nivelar el nivel tórico [L], alineando el eje del nivel paralelo a dos tornillos nivelantes [B] tal y como se muestra en la figura 4.6.a.

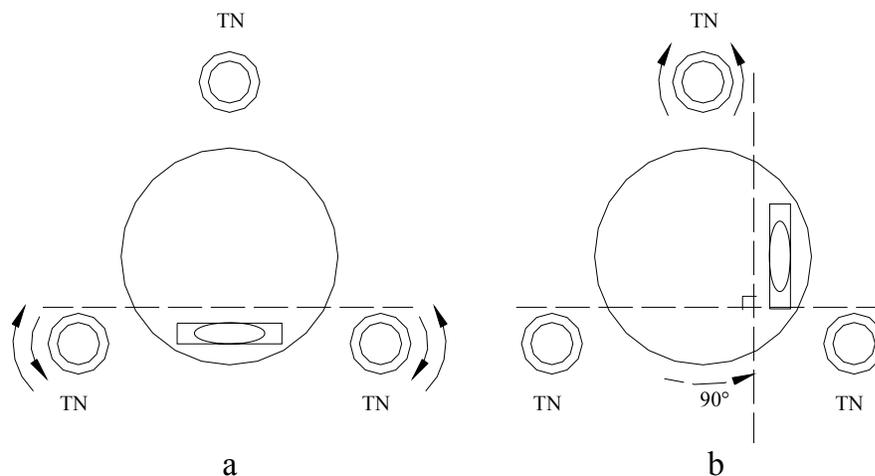


Figura 4.6. Centrado del nivel tórico

8. Centre la burbuja del nivel tórico con rotación opuesta de los tornillos nivelantes paralelos.
9. Rote la alidada 90° y centre nuevamente la burbuja con el tornillo restante tal y como se muestra en la figura 4.6.b.
10. Repita los pasos 7, 8, y 9 hasta que la burbuja quede centrada en cualquier posición.

Si para cualquier posición de la alidada no se logra el centrado de la burbuja, se debe proceder a la rectificación del nivel tórico siguiendo el procedimiento descrito por Costantini¹, Trutman².

4.3.1.2 El eje horizontal [HH] o eje de rotación del círculo vertical debe ser perpendicular al eje vertical [VV].

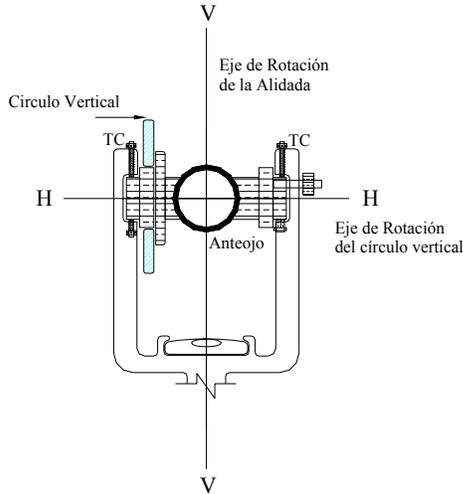


Figura 4.7.

Si esta condición no se cumple ocurrirá un error de inclinación. Aunque en los instrumentos modernos esta condición viene garantizada por el fabricante (por un determinado número de años de servicio del instrumento en condiciones normales de funcionamiento), es conveniente identificar la ocurrencia del error de inclinación a fin de determinar la necesidad de corrección del instrumento.

La ocurrencia del error de inclinación se verifica una vez estacionado y nivelado el teodolito, colimando un punto "P" muy alto y anotando la lectura al círculo horizontal L_1 . Luego se rota el anteojo alrededor de HH (vuelta de campana) y se colima nuevamente el punto P anotando la lectura L_2 (figura 4.8).

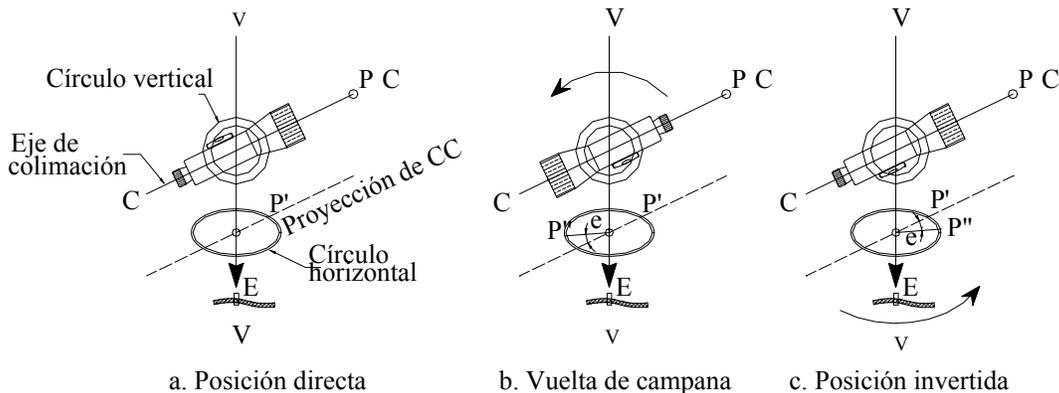


Figura 4.8. Verificación del error de inclinación

Se debe verificar que $L_2 - L_1 = 180^\circ$. De no cumplirse esta condición, el error de inclinación vendrá dado por:

$$E_i = \frac{(L_2 - L_1) - 180^\circ}{2} \quad (4.9)$$

En caso de comprobarse la presencia de un error de inclinación apreciable, éste se puede corregir imponiendo sobre la última lectura con el tornillo de coincidencia del círculo horizontal [I] la lectura corregida.

¹ Costantini, W. (1977), *Topografía I. Facultad de Ingeniería*. Universidad de Los Andes. Mérida pp- 4-6, 4-8.

² Trutman, O. (1976). *El Teodolito y su Empleo*. Wild Heerbrugg, Suiza. pp. 19, 21.

Al efectuar esta operación, el punto P se desplazará una cantidad igual a la corrección angular, siendo necesario colimar nuevamente el punto P por medio de los tornillos de corrección (TC en figura 4.7).

Ejemplo 4.4

Se desea comprobar si existe la presencia de un error de inclinación que afecte la precisión en la medida de ángulo para lo cual se estacionó y niveló un teodolito; siguiendo el procedimiento descrito anteriormente se anotaron las siguientes lecturas:

$$\begin{array}{ll} \text{Pos, Directa} & L_1 = 02^{\circ}22'35'' \\ \text{Pos, Conjugada} & L_2 = 182^{\circ}23'08'' \end{array}$$

Solución:

Aplicando la ecuación (4.9) tendremos:

$$E = \frac{(182^{\circ}23'08'' - 02^{\circ}22'35'') - 180^{\circ}}{2} = +16''$$

$$E = +16''$$

La corrección de la lectura L_2 será $C = -16''$ y la lectura L_2 debe ser

$$L_2 = (182^{\circ}23'08'') - (0^{\circ}00'16'') = 182^{\circ}22'52''$$

Actuando sobre el tornillo de coincidencia del círculo horizontal [I], se impone la lectura L_2 corregida, con lo cual el retículo vertical se habrá desplazado de la señal (figura 4.9.b). Finalmente, haciendo uso de los tornillos de corrección, colimamos nuevamente el punto P (figura 4.9.c).

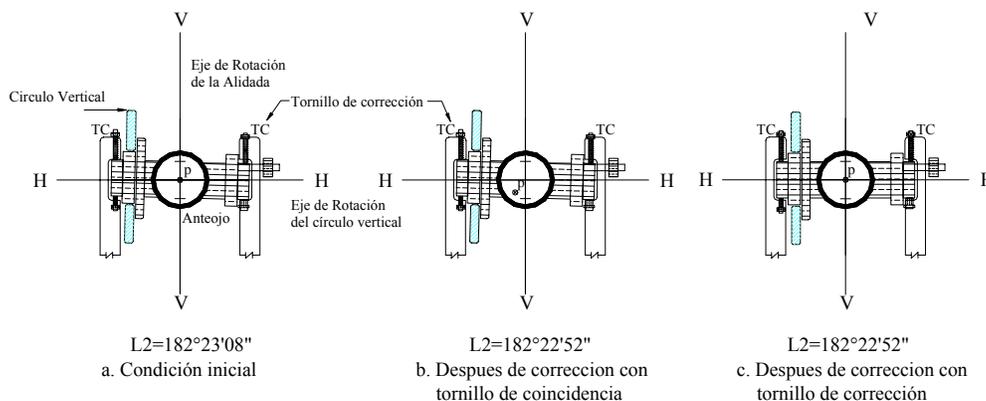
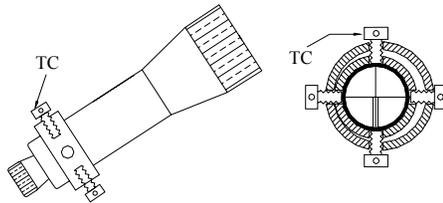


Figura 4.9. Corrección del error de inclinación

4.3.1.3 El eje de colimación [CC] debe ser perpendicular al eje horizontal [HH].

De no cumplirse esta condición, aparecerá un error instrumental denominado error de colimación, que afectará la medición de los ángulos horizontales. Al igual que en el caso anterior, esta condición viene garantizada por el fabricante.



Este error se verifica de igual forma que el error de inclinación, con la diferencia de que el punto P debe estar ubicado aproximadamente en el horizonte del instrumento y la corrección se hace por medio de los tornillos de corrección del retículo (figura 4.10).

Figura 4.10. Tornillos de corrección del error de colimación

Ejemplo 4.5

Se desea comprobar la ocurrencia del error de colimación de un teodolito, para lo cual, luego de seguir el procedimiento descrito, se obtuvieron los siguientes datos:

$$L_1 = 43^{\circ}22'18''$$

$$L_2 = 223^{\circ}22'30''$$

Calcule el error de colimación e indique el proceso de ajuste necesario.

Solución

Aplicando la ecuación (4.9)

$$E = \frac{(223^{\circ}22'30'' - 43^{\circ}22'18'') - 180^{\circ}}{2} = +06''$$

La corrección a la lectura L_2 será $C = -06''$

Luego L_2 debe ser

$$L_2 = 223^{\circ}22'30'' - 0^{\circ}00'06'' = 223^{\circ}22'24''$$

$$L_2 = 223^{\circ}22'24''$$

Actuando sobre el tornillo de coincidencia del círculo horizontal [I] se impone la lectura L_2 , con lo cual, el retículo vertical se habrá desplazado de la señal (figura 4.11). Finalmente, haciendo uso de los tornillos de corrección del retículo, colimamos nuevamente el punto P.

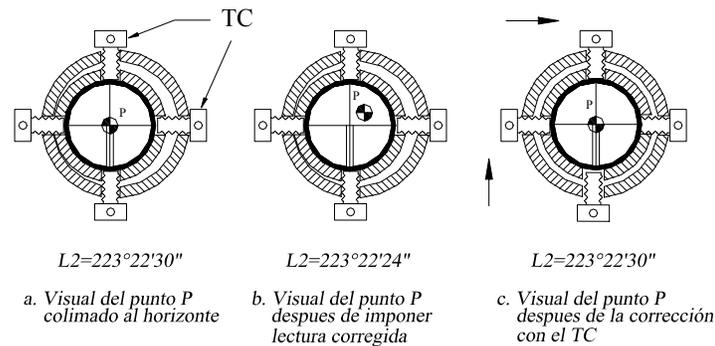


Figura 4.11 Corrección del error de colimación

4.3.1.4. El eje vertical [VV] debe pasar por el centro del círculo horizontal [O].

De no cumplirse esta condición, la medición de los ángulos horizontales quedará afectada por el error de excentricidad de la alidada, el cual para excentricidades de 1/100 mm puede inducir errores angulares de unos 40”.

Debido a la importancia de este error, los fabricantes de instrumentos colocan, para las lecturas al círculo horizontal, dos índices de lectura diametralmente opuestos, ya que se demuestra³ que **el error angular de excentricidad de la alidada se elimina tomando como valor del ángulo medido el promedio de las lecturas a los índices diametralmente opuestos del círculo horizontal.**

$$\alpha = \frac{\alpha_A + \alpha_B}{2} \quad (4.10)$$

α = ángulo medido libre del error de excentricidad de la alidada

α_A = ángulo medido en el índice A

α_B = ángulo medido en el índice B, diametralmente opuesto al índice A.

Actualmente, a fin de eliminar el error de excentricidad, la mayoría de los teodolitos con sistemas ópticos de lectura proyectan, sobre el ocular de lectura, el promedio de las lecturas correspondientes a dos sectores del círculo diametralmente opuestos.

La figura 4.12 muestra ejemplos de sistemas de doble lectura

³ Costantini, W. (1977). Op. cit. P 4-15, 4-16.

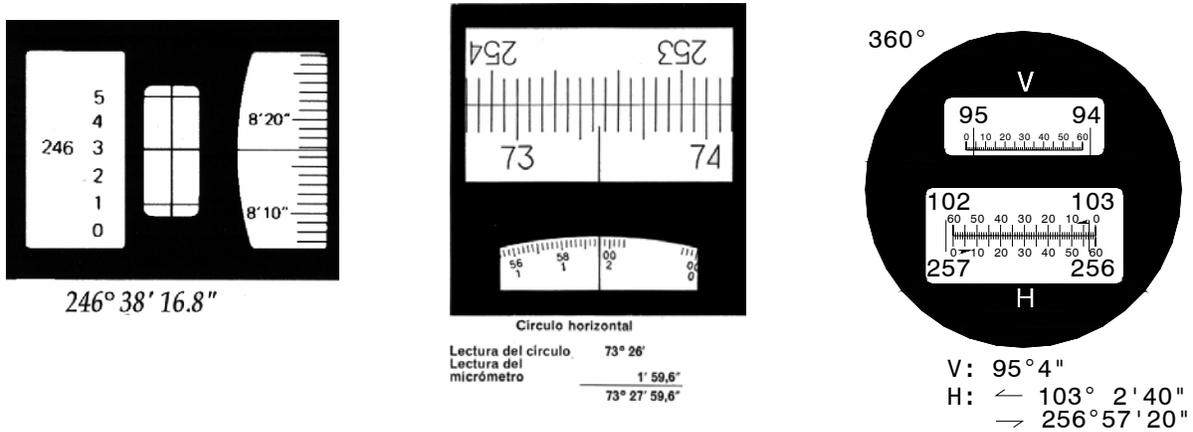


Figura 4.12. Sistemas de doble lectura para eliminar el error de excentricidad de la alidada

4.3.1.5. El eje de colimación [C.C] debe cortar al eje vertical [VV]

De no cumplirse esta condición, la excentricidad existente generará el **error angular de excentricidad del eje de colimación**, como se muestra en la figura 4.13.

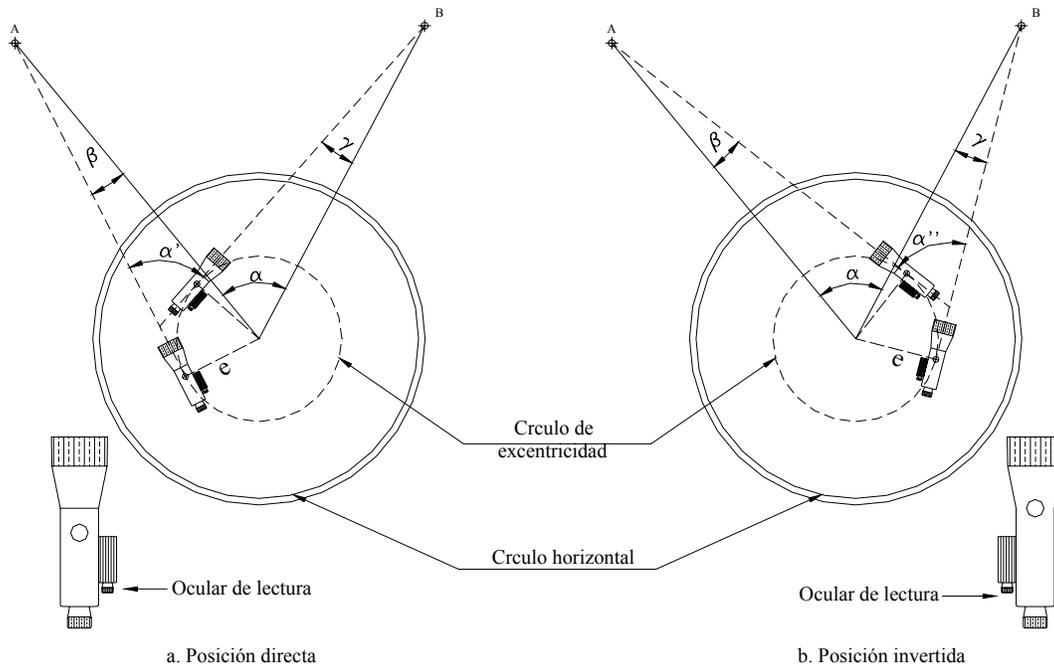


Figura 4.13. Error de excentricidad del eje de colimación

En la figura 4.13.a α' es el ángulo horizontal medido en campo, afectado por el error de excentricidad del eje de colimación, y α representa el ángulo horizontal libre del error de excentricidad del eje de colimación. Por relación del triángulo en la figura 4.13.a, tenemos.

$$\alpha = \alpha' + \beta - \gamma \tag{4.11}$$

Si hacemos rotar el eje de colimación 180° alrededor de (HH), es decir, damos vuelta de campana para colocar el anteojo en posición conjugada (figura 4.13.b), tendremos por procedimiento análogo

$$\alpha = \alpha'' - \beta + \gamma \quad (4.12)$$

y sumando (4.11) y (4.12) nos queda:

$$\alpha = \frac{\alpha' + \alpha''}{2} \quad (4.13)$$

en donde α' y α'' son las lecturas en las posiciones conjugadas del anteojo.

La ecuación (4.13) representa la ley de Bessel y nos indica que *el promedio de los ángulos obtenidos en las posiciones conjugadas del anteojo nos da el valor del ángulo horizontal libre del error de excentricidad del eje de colimación.*

Ejemplo 4.6

Los datos de la figura E4-6 corresponden a una serie de lecturas realizadas a los índices A y B de un teodolito Keuffel en las dos posiciones conjugadas del anteojo. Calcule el ángulo en A libre de los errores de excentricidad de la alidada y del eje de colimación.

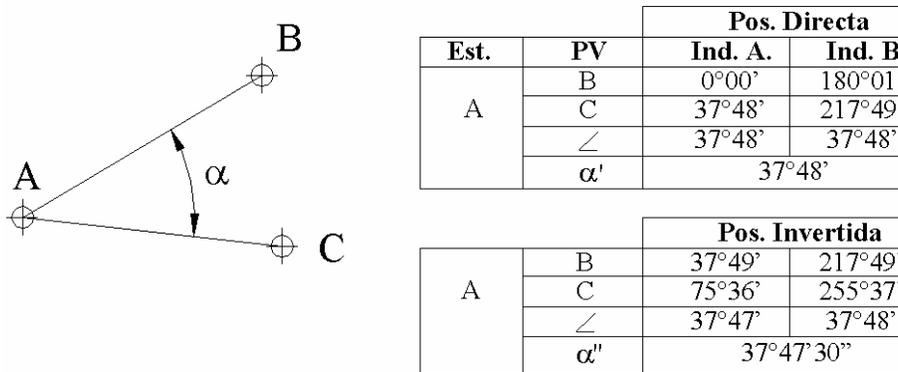


Figura E4-6

Solución

El ángulo α' libre del error de excentricidad de la alidada vendrá dado por el promedio de las diferencias de lecturas a los índices A y B en posición directa.

$$\alpha' = 37^\circ 48' 00''$$

Efectuando las mismas operaciones para la posición invertida (conjugada) tenemos

$$\alpha'' = 37^{\circ}47'30''$$

que representa el valor del ángulo libre del error de excentricidad de la alidada en posición conjugada.

El valor del ángulo α libre del error de excentricidad del eje de colimación vendrá dado por el promedio entre α' y α'' .

$$\alpha = 37^{\circ}47'45''$$

4.3.1.6. Intervalos de los círculos graduados con igual amplitud.

Este error instrumental, denominado error de graduación, se reduce al mínimo midiendo el ángulo con distintos sectores del círculo, tomando como valor probable la media de los ángulos medidos.

A fin de garantizar que la medición del ángulo sea realizada en todos los sectores del círculo, calculamos el número de sectores requeridos aplicando la ecuación (4.14).

$$NS = 180^{\circ}/\alpha \quad (4.14)$$

En donde:

NS = número de sectores requeridos

α = valor aproximado del ángulo a medir

Nótese que utilizamos 180° en lugar de los 360° que tiene un círculo; esto debido a que los teodolitos poseen doble índice de lectura diametralmente opuesto, es decir, mientras el índice "A" gira de 0° a 180° , el índice "B" gira de 180° a 360° .

Ejemplo 4.7

Determine el número de sectores en que hay que dividir un círculo para medir un ángulo de aproximadamente 45° , a fin de eliminar el error de graduación.

Solución

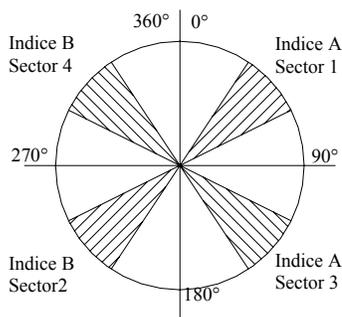


Figura E4-7

Aplicando la ecuación (4.14)

$$NS = 180^{\circ}/45^{\circ} = 4$$

En la práctica operativa, la medición de los ángulos sobre los diferentes sectores del círculo, determinados por la ecuación (4.14) se realiza bien sea por el método de reiteración o por el método de repetición, dependiendo del instrumento disponible.

4.3.1.6.1. Método de repetición.

En la aplicación de este método se utilizan teodolitos repetidores, o de doble eje, en los cuales el círculo horizontal puede girar alrededor del eje vertical junto con la alidada (figura 2.23.a).

Esta característica hace posible sumar las “n” mediciones de un ángulo con el mismo aparato, tomando como valor probable la enésima parte de la suma.

La ecuación (4.15) representa la fórmula general para la determinación de un ángulo por el método de repetición.

$$\alpha = \frac{L_f + n(360^\circ) - L_i}{N} \quad (4.15)$$

siendo:

L_f = lectura final al círculo horizontal (a la derecha)

L_i = lectura inicial al círculo horizontal (a la izquierda)

n = número de veces que el índice de lectura ha pasado por el cero de la graduación

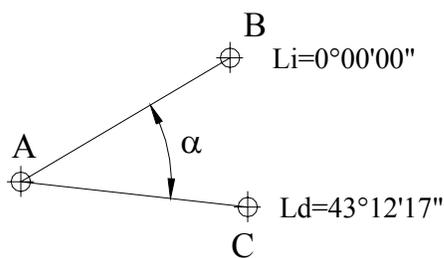
N = número de repeticiones ($N = nS$)

Generalmente, en la práctica operativa, se impone una lectura inicial (L_i) igual a cero.

En el ejemplo 4-8 se explicará el procedimiento de campo para medir ángulos por repetición.

Ejemplo 4.8

Medir por el método de repeticiones el ángulo α de la figura E4-8.



- a) Estacionados en el vértice A de la figura E4-8, colimamos el punto B e imponemos la lectura $L_i = 0^\circ 00' 00''$ en el círculo horizontal. En este momento están apretados los tornillos de fijación [E] y [H].
- b) Se afloja el tornillo de fijación del círculo a la alidada [H] y se gira en sentido horario hasta lograr una colimación aproximada del punto C, se ajusta [H] y con el tornillo de coincidencia [I] se completa la colimación a C; completando así la primera repetición.

Figura E4-8

- c) Se anota la lectura en C y se calcula el número de repeticiones requeridas.
 $L_c = 43^\circ 12' 17''$
 $N = NS = 180/43 \approx 4 \text{ rep.}$
 Faltan por realizar tres repeticiones para lo cual procedemos de la siguiente manera:
- d) Se afloja el tornillo de fijación del círculo a la base [E] y se colima nuevamente el punto B lo más cerca posible, se aprieta B y se afina la colimación con el tornillo de coincidencia [F].

- e) Se afloja el tornillo [H] y se colima nuevamente al punto C lo más cercano posible, se aprieta [H] y se termina la colimación con [I]. Se completa así la segunda repetición.
- f) Repetimos d y e hasta completar la cuarta repetición, anotando la lectura final al círculo horizontal.
 $L_f = 172^\circ 49' 20''$

El ángulo en α será:

$$\alpha = \frac{172^\circ 49' 20''}{4} = 43^\circ 12' 20''$$

Nótese que solamente es necesario anotar las lecturas al círculo al final de la primera y última repetición.

Un modelo de libreta de campo para la aplicación del método de repetición podría ser el siguiente

Est.	PV	L_i	L_f	N	Angulo promedio
A	B	0°00'00"		4	43°12'20"
	C	43°12'17"	172°49'20"		

Ejemplo 4.9

Los datos de la libreta de campo, que se reproducen a continuación, corresponden a una serie de 12 repeticiones efectuadas para medir el ángulo en A libre de los errores de excentricidad del eje de colimación y de graduación del círculo.

Las primeras seis repeticiones se hicieron en posición directa. Al final de la sexta repetición se dio vuelta de campana colimando nuevamente el punto B, siguiendo el paso e del ejemplo anterior.

Las siguientes seis repeticiones se hicieron con el anteojo en posición conjugada.

Calcule el ángulo en A.

Est.	PV	L_i	L_f	N/n	Angulo promedio
A	B	0°00'00"		12/1	
	C	35°15'20"	27°06'00"		

Solución

Como se puede observar en la lectura final, el círculo horizontal debe haber completado, al menos una vez, los 360° de la graduación.

El valor de n puede ser calculado de la siguiente manera:

$$n = Ent \left[\frac{N \cdot (L_{ic} - L_{iB}) + L_{iB}}{360^\circ} \right] \quad (4.16)$$

donde:

L_{iB} = lectura al inicio de la primera repetición

L_{iC} = lectura al final de la primera repetición

Sustituyendo valores en (4.16) tenemos,

$$n = Ent \left[\frac{12 \cdot (32^\circ 15' 20'' - 0^\circ) + 0^\circ 00' 00''}{360^\circ} \right] = 1$$

aplicando la ecuación (4.15)

$$\alpha = \frac{27^\circ 06' 00'' + 1 \cdot 360^\circ - 0^\circ}{12} = 32^\circ 15' 30''$$

$$\alpha = 32^\circ 15' 30''$$

4.3.1.6.2. Método de Reiteración

El método de reiteración se utiliza en aquellos teodolitos con un solo eje de rotación (figura 2.23.b), en los cuales el círculo está siempre fijo a la base, imposibilitando la suma de ángulos horizontales con el mismo aparato.

En este tipo de teodolitos existe un tornillo de corrimiento horizontal [G] que permite preestablecer, en forma aproximada, una determinada lectura.

En este método, al igual que en el método de repetición, debemos garantizar la medición del ángulo sobre el número de sectores determinado por la ecuación (4.14). El ángulo α , libre del error de graduación del círculo, será el promedio de los ángulos medidos en cada uno de los diferentes sectores.

El ejemplo 4.10 nos describe el procedimiento de campo empleado en la medición de un ángulo horizontal por el método de reiteración.

Ejemplo 4.10

Determinar por el método de reiteración el ángulo α de la figura E4.10.

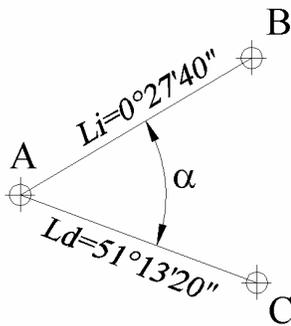


Figura E4.10

- a) Estacionados en A colimamos al punto B y ajustamos el tornillo de fijación de la alidada a la base [H]. Con el tornillo de corrimiento [G], imponemos una lectura cercana cero en el círculo horizontal. $L_B = 0^\circ 27' 40''$
- b) Soltamos el tornillo [H] y girando en sentido horario colimamos el punto C. Con el tornillo de coincidencia [I] afinamos la colimación a C. Anotamos la lectura al círculo horizontal en C. $L_C = 51^\circ 13' 20''$
- c) El valor de α para la primera repetición vendrá dado por la diferencia entre las lecturas en B y C.

$$\alpha = 51^\circ 13' 20'' - 0^\circ 27' 40'' = 50^\circ 45' 40''$$

d) Aplicando la ecuación (4.14), calculamos el número de reiteraciones requeridas para cubrir todos los sectores del círculo.

$$N = NS = 180/50 \approx 4 \text{ rep}$$

e) El incremento para cada reiteración será:

$$INC = 180/N \approx 45^\circ$$

La segunda, tercera y cuarta reiteración deben comenzar con lecturas en B aproximadas a 45° , 90° y 135° respectivamente.

f) Repetimos los pasos a, b y c hasta completar las reiteraciones requeridas, teniendo en cuenta las nuevas lecturas hacia B y C.

g) Finalmente, el ángulo α libre del error de graduación del círculo horizontal vendrá dado por el promedio de los ángulos medidos en cada una de las reiteraciones realizadas.

Método de Reiteración

Est.	Reit.	PV	Lecturas	α	α prom
A	1	B	$0^\circ 27' 40''$	$50^\circ 45' 40''$	$50^\circ 45' 38'',75$
		C	$51^\circ 13' 20''$		
	2	B	$45^\circ 18' 30''$	$50^\circ 45' 50''$	
		C	$96^\circ 04' 20''$		
	3	B	$90^\circ 18' 40''$	$50^\circ 45' 30''$	
		C	$141^\circ 04' 10''$		
	4	B	$136^\circ 32' 15''$	$50^\circ 45' 35''$	
		C	$187^\circ 17' 50''$		
		Σ	$203^\circ 02' 35''$		

4.3.1.7. El eje de colimación [CC] y el eje del nivel tórico del círculo vertical deben ser paralelos. Al no cumplirse esta condición, se genera el error de índice del círculo vertical.

Esta condición se puede comprobar como se explica a continuación:

- Estacionamos y nivelamos un teodolito en un punto dado (figura 4.14).
- Luego, con los tornillos de fijación [O] y de coincidencia [P] del círculo vertical, se coloca el eje de colimación en posición horizontal.
- Se comprueba que la burbuja del nivel tórico del círculo vertical este calada.
- Se coloca una mira vertical en el punto B, se toma la lectura al hilo medio en B. Obviamente, si la visual está desplazada un ángulo α con respecto a la horizontal tendremos que $L_B = L'_B - e$

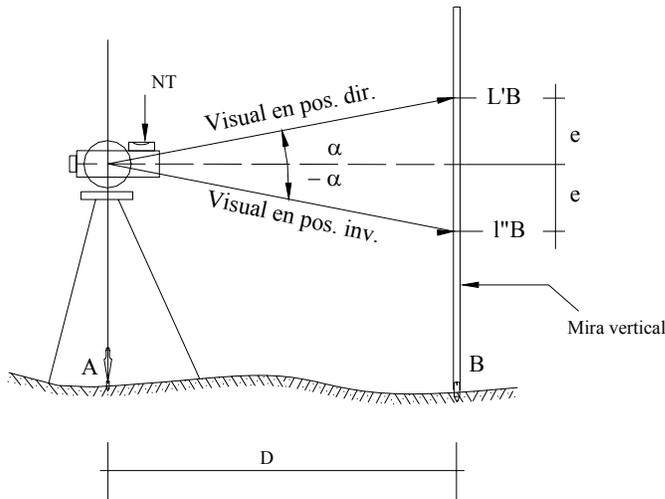


Figura 4.14

siendo:

e = error lineal índice del círculo vertical para la distancia D .

L'_B = lectura a la mira en posición directa

L''_B = lectura a la mira en posición invertida

- Si en vez de igualar las lecturas, sumamos nos queda:

$$L_B = \frac{L'_B + L''_B}{2} \quad (4.18)$$

La ecuación (4.18) nos indica que el promedio de las lecturas al círculo vertical en las dos posiciones conjugadas del anteojo nos da el valor del ángulo vertical, libre del error del índice de lectura del círculo vertical.

Existen teodolitos más sofisticados que utilizan un compensador vertical automático, eliminando el uso del nivel tórico del círculo vertical.

En caso de ser necesario ajustar el instrumento para eliminar el error del índice de lectura del círculo vertical, se procede como se indica a continuación:

- Damos vuelta de campana y colimamos el punto B en posición invertida. Anotamos la lectura del hilo medio B. De estar descorregido el instrumento, la inclinación del eje de colimación será igual pero en sentido contrario a la visual en posición directa, luego

$$L_B = L''_B + e.$$

- Igualando las dos lecturas previas tenemos,

$$e = \frac{L'_B - L''_B}{2} \quad (4.17)$$

- Actuando sobre el tornillo de coincidencia [P] del círculo vertical imponemos la lectura $L_B = L''_B + e$, con lo cual la burbuja del nivel tórico del círculo vertical quedará descentrada.
- Centramos nuevamente la burbuja actuando sobre tornillos de corrección del nivel tórico.

Por ser un procedimiento realizado en campo, es necesario repetir el proceso de comprobación y ajuste hasta comprobar la eliminación del error de índice.

4.4 Sistemas de Lectura de Círculos Graduados

4.4.1. Sistema de Nonio o Vernier

Uno de los primeros métodos utilizados para fraccionar y leer las graduaciones de un círculo con mayor precisión es el método de nonio o Vernier. Este método, aunque ha venido siendo desplazado por métodos más modernos, precisos y rápidos, aún es utilizado en equipos económicos que no requieren de una gran precisión.

En este sistema de lectura, empleado en la mayoría de teodolitos antiguos, conocidos generalmente como tránsito, el círculo horizontal está dividido en grados enteros, cada grado a su vez está dividido en 2, 3 ó 4 partes, correspondiendo cada subdivisión a 30, 20 ó 15 minutos respectivamente.

Para aumentar la precisión de las lecturas, se utiliza un sistema de nonio o vernier constituido por un nonio de corona circular concéntrica con el círculo (figura 4.15).

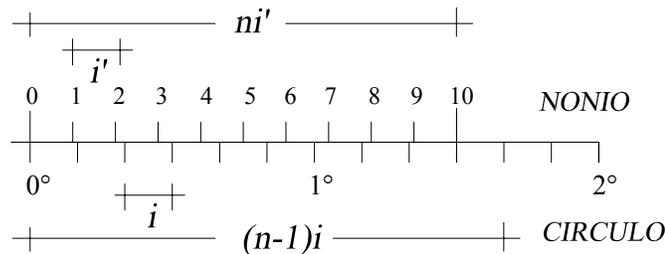


Figura 4.15 Sistema de lectura de ángulo con nonio

El nonio está dividido en n partes de igual amplitud i' , ocupando el espacio correspondiente a $(n-1)$ divisiones del círculo graduado con amplitud i .

La apreciación A del nonio viene dada por:

$$A = \frac{i}{n} \quad (4.19)$$

Como en la figura 4.15 un grado está dividido en seis partes iguales, la amplitud del círculo será

$$i = \frac{1^\circ}{6} = \frac{60'}{6} = 10'$$

luego

$$A = \frac{10'}{10} = 1'$$

A representa la menor lectura que podemos hacer con un nonio o vernier.

Ejemplo 4.11

Determine la apreciación y la lectura del nonio de la figura E4.11.

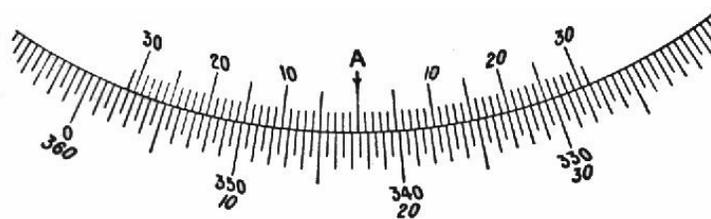


Figura E4.11

Solución

En el círculo mostrado en la figura E4-11, cada grado viene dividido en dos partes por lo que $i=60/2 = 30'$ como el nonio está dividido en 30 partes la apreciación del nonio será

$$A = \frac{30'}{30} = 1'$$

para la lectura al círculo horizontal con el índice A y leyendo de derecha a izquierda (sentido horario), procedemos de la siguiente manera:

- Anotamos la lectura entera al índice A es $L_A = 342^\circ 30'$
- Como el índice A no coincide exactamente con la graduación correspondiente a los $30'$, sino que se pasa por una cantidad que no se puede apreciar directamente, buscamos la coincidencia de una de las graduaciones del nonio con una de las graduaciones del círculo. En nuestro caso verificamos que la coincidencia se da en la quinta división del nonio (derecha a izquierda), por lo que la parte fraccionaria será $L'_A = 5'$
- La lectura horaria definitiva (L_+) corresponde a:

$$L_+ = L_A + L'_A = 342^\circ 30' + 05' = 342^\circ 35'$$

Repitiendo el procedimiento para determinar la lectura en sentido antihorario tenemos:

$$L_A = 17^\circ 00'$$

$$L'_A = 00^\circ 25'$$

$$L_- = 17^{\circ}25' \text{ (lectura antihoraria)}$$

Como chequeo,

$$L_+ + L_- = 360^{\circ}$$

$$342^{\circ}35' + 17^{\circ}25' = 360^{\circ}00'$$

4.4.2. Otros Sistemas de Lectura

Los sistemas de lectura de escalas han ido evolucionando constantemente con el tiempo. Se han incorporado microscopios para facilitar las lecturas, se han desarrollado sistemas de lectura de coincidencia en teodolitos de doble círculo que proporcionan directamente, en el ocular de lectura, el promedio aritmético de dos regiones del círculo diametralmente opuestas, eliminando el error de excentricidad de la alidada. Se han desarrollado sistemas con micrómetros ópticos de fácil lectura, y, más recientemente, teodolitos electrónicos con lecturas sobre pantallas de cristal líquido, con capacidad de archivar sobre tarjetas magnéticas o libretas electrónicas de campo.

Debido a la constante evolución de los sistemas de lectura, a la facilidad de lectura y a la diversidad de sistemas, no se hace necesario una discusión detallada de cada uno de los sistemas, por lo que nos conformaremos con los ejemplos suministrados en las figuras 2.17 a 2.21 del capítulo 2 y la figura 4.12 del presente capítulo.

Problemas Propuestos

- 4.1. Con los datos de la figura P4-1 calcule los ángulos en cada uno de los vértices y la distancia BD.

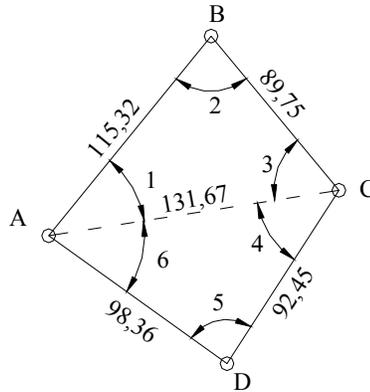


Figura P4-1

- 4.2. Con los datos de la figura P4-2, calcule los ángulos en los vértices. Compruebe sus resultados.

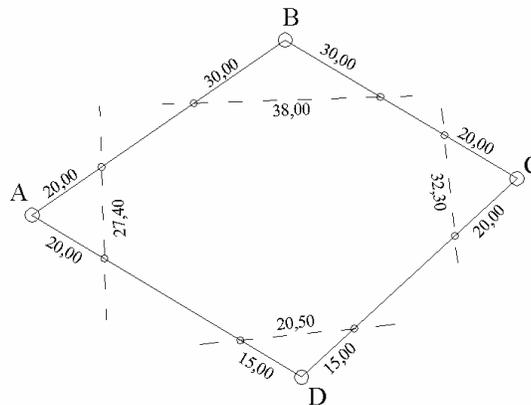


Figura P4-2

- 4.3. Con los datos de la figura P4-3, calcule los elementos necesarios para replantar con cintas el punto C a partir de B. Describa el proceso de campo.

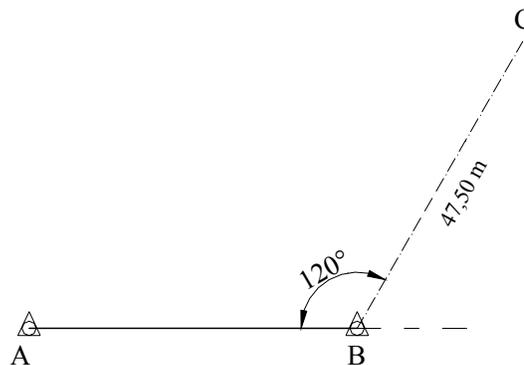


Figura P4-3

- 4.4. Calcule y describa el proceso de campo requerido para trazar con cinta métrica una perpendicular a AB que pase por el punto B.

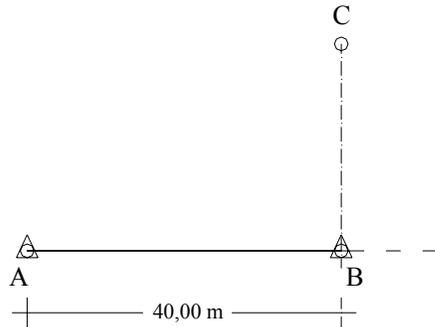


Figura P4-4

- 4.5. Los datos de la siguiente tabla corresponden a la medición de un ángulo por el método de repetición con lecturas a los índices A y B. Calcule el valor final del ángulo y diga qué errores se eliminan con este procedimiento.

Estación A Pos. Directa			
PV	Lecturas		Inicial
	Ind. A	Ind. B	
B	0°00'00"	180°00'00"	Final
C	34°17'20"	214°17'00"	
	205°43'00"	25°42'40"	

- 4.6. Los datos de la siguiente tabla corresponden a una serie de lecturas efectuadas a los índices A y B en las posiciones conjugadas del anteojo para la medición del ángulo en A por el método de repetición. Calcule el valor promedio del ángulo y diga qué errores se eliminan con la aplicación de este procedimiento.

Estación A

N = 3

Pos. Directa		
PV	Ind. A	Ind. B
B	0°00'00"	180°00'00"
C	62°37'20"	242°37'10"
LF	187°51'30"	07°52'00"
Pos. Invertida		
PV	Ind. A	Ind. B
B	187°51'30"	07°52'00"
C	15°43'30"	195°43'40"

- 4.7. Con los datos de la siguiente tabla, correspondientes a una serie de tres reiteraciones, calcule el ángulo en A.

Estación A

Reit.	Lect. B	Lect. C
1	0°17'30"	61°42'40"
2	60°00'20"	121°25'10"
3	120°10'10"	181°35'30"

- 4.8. Los datos de la tabla anexa corresponden a una serie de seis reiteraciones con lecturas a los índices A y B en las dos posiciones conjugadas del lente. Calcule el ángulo en el vértice y diga qué tipo de errores se eliminan con este procedimiento.

Estación A.		Pos. Dir.	
		Lecturas	
Reit.	PV	Ind. A	Ind. B
1	B	0°17'30"	180°17'20"
	C	61°42'40"	241°42'30"
2	B	60°00'20"	240°00'30"
	C	121°25'10"	301°25'00"
3	B	120°10'10"	300°10'00"
	C	181°35'30"	01°35'40"
		Pos. Inv.	
4	B	180°20'20"	0°20'20"
	C	241°45'30"	61°45'30"
5	B	240°10'20"	60°40'20"
	C	301°35'30"	122°05'40"
6	B	300°10'10"	120°50'20"
	C	01°35'10"	182°15'40"

