Procesamiento Digital de Señales

Unidad 2: Transformada Discreta de Fourier y Espectro de Señales

fppt.com

La DFT y la serie de Fourier de Tiempo Discreto

- A continuación se verá cómo utilizar la DFT para el cálculo de la serie de Fourier de Tiempo Discreto.

- Comparando las ecuaciones:

DFT:
$$X[k]=\begin{cases}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} & \text{para } 0\le k\le N-1\\ 0, & \text{para otros valores de } k\end{cases}$$

SFTD:
$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}.$$

La DFT y la serie de Fourier de Tiempo Discreto

- A continuación se verá cómo utilizar la DFT para el cálculo de la serie de Fourier de Tiempo Discreto.
- Comparando las ecuaciones:

DFT:

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} & \text{para } 0 \le k \le N-1 \\ 0, & \text{para otros valores de } k \end{cases}$$

SFTD:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}.$$

Factor de escala

La ventana de tiempo puede ser cualquiera siempre y cuando abarque un período

La DFT y la serie de Fourier de Tiempo Discreto

- En definitiva, **se pueden considerar expresiones equivalentes salvo una constante igual a 1/N**

DFT:
$$X[k]=\begin{cases}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} & \text{para } 0\le k\le N-1\\ 0, \text{ para otros valores de } k\end{cases}$$

SFTD:
$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n}.$$

- Es importante que la ventana de datos de la DFT abarque exactamente un período
- Se puede concluir que tienen las mismas propiedades

Propiedades de la DFT

1) Propiedad de linealidad

$$a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] \leftrightarrow a_1 X_1[k] + a_2 X_2[k]$$

1) Desplazamiento en el tiempo

$$x[n - n_0]_{\text{mod}\, N} \leftrightarrow W_N^{k n_0} X[k] \qquad W_N = e^{-j(2\pi/N)}$$

1) Desplazamiento en frecuencia

$$W_N^{-k n_0}\; x[n] \leftrightarrow X[k - k_0]_{\text{mod}\, N}$$

Propiedades de la DFT

- Notando que las variables n y k de la DFT deben estar restringidas al rango $0 \leq n, k \leq N-1$
- Así, los corrimientos $x[n-n_0]$ o $X[k-k_0]$ implican:

$$x[n-n_0]_{\mathrm{mod}\, N} \quad \mathrm{o} \quad X[k-k_0]_{\mathrm{mod}\, N}$$

- La notación $[m]_{\mathrm{mod}\, N}$ significa $[m]_{\mathrm{mod}\, N} = m + iN$

siendo i un entero (positivo o negativo) tal que

$$0 \leq [m]_{\mathrm{mod}\, N} \leq N-1$$

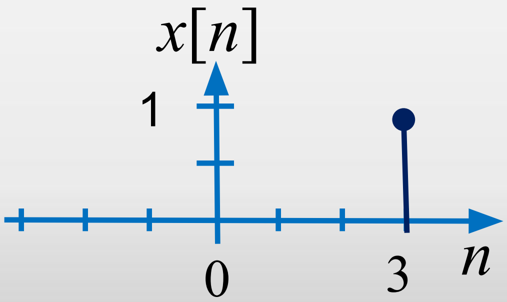
En definitiva, **el corrimiento es circular**

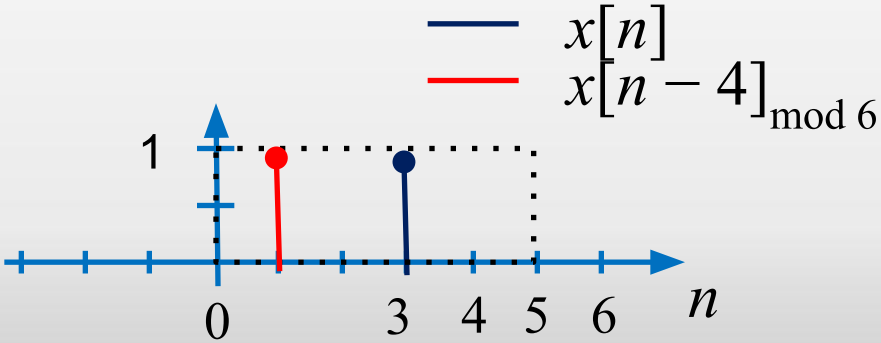
Propiedades de la DFT

- **Ejemplo de corrimiento circular en DFT:**

Si $x[n] = \delta[n-3]$, luego

$$x[n-4]_{\mathrm{mod}\,6} = \delta[n-7]_{\mathrm{mod}\,6} = \delta[n-7+6] = \delta[n-1]$$





Propiedades de la DFT

4) Conjugación:

$$x^*[n] \leftrightarrow X^*[-k]_{\text{mod } N}$$

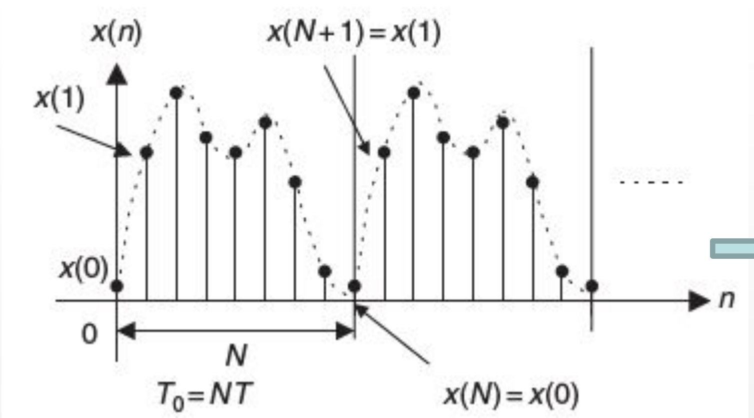
4) *Inversión temporal:* $x[-n]_{\text{mod } N} \leftrightarrow X[-k]_{\text{mod } N}$

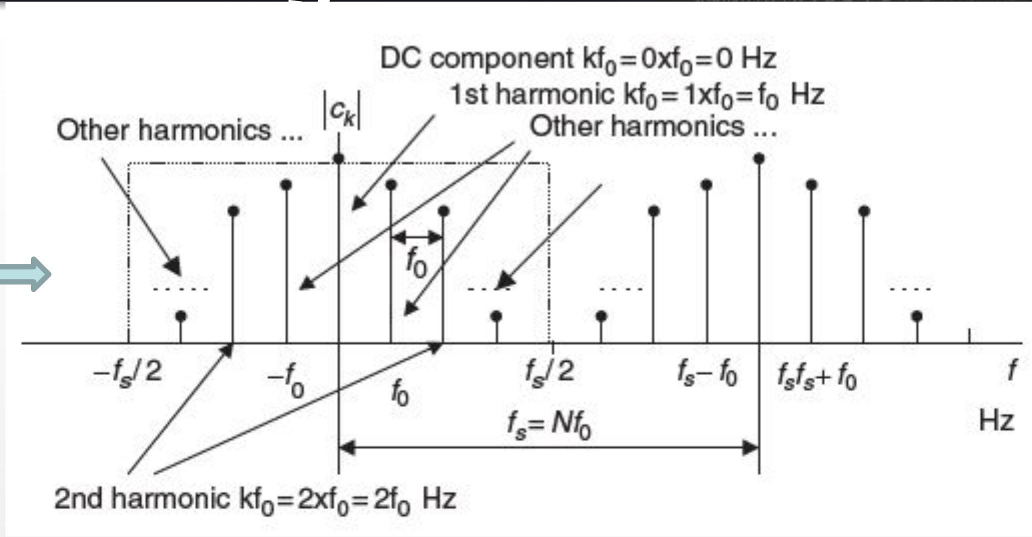
4) *Dualidad:* $X[n] \leftrightarrow Nx[-k]_{\text{mod } N}$

4) *Convolución circular:* $x_1[n] \otimes x_2[n] \leftrightarrow X_1[k]\, X_2[k]$

4) *Multiplicación:* $x_1[n]\, x_2[n] \leftrightarrow \dfrac{1}{N} X_1[k] \otimes X_2[k]$

Coeficientes de la serie de Fourier de Señales periódicas digitales

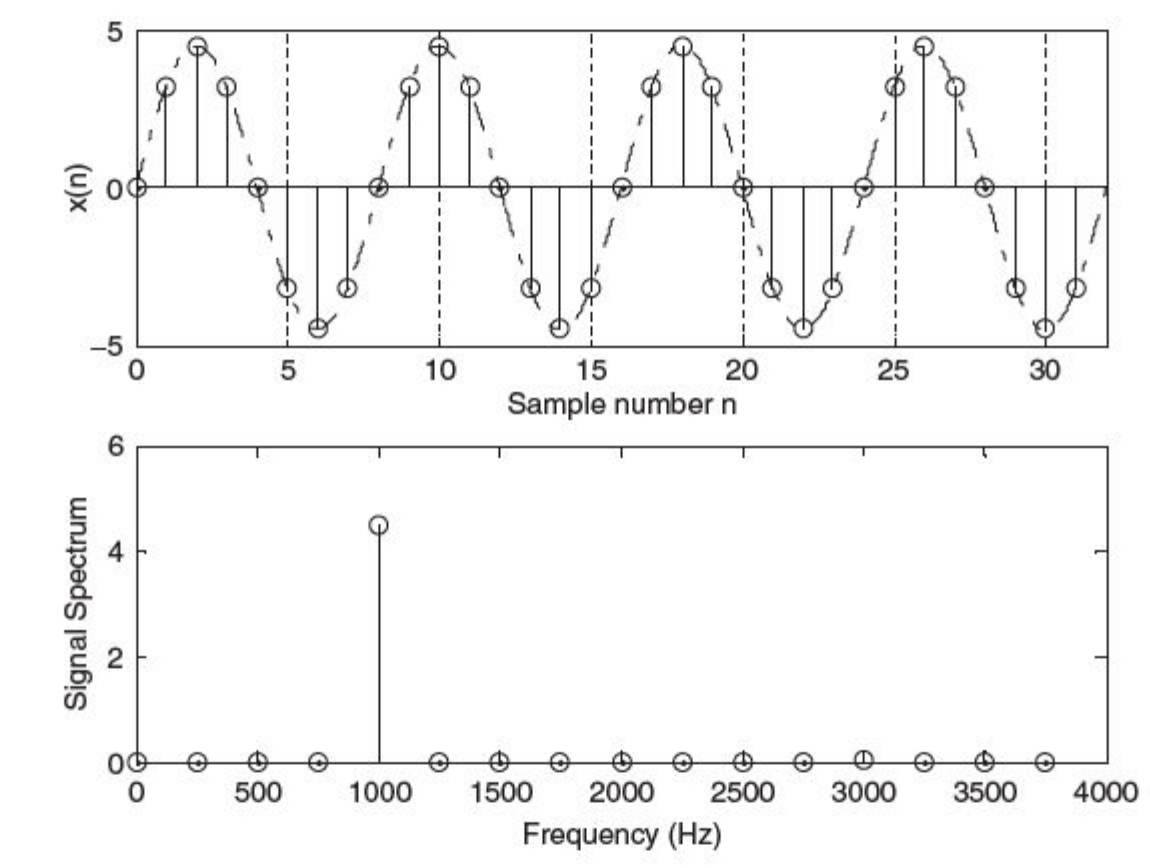




- Solo la porción entre las frecuencias $-f_s/2 < f < f_s/2$ representa toda la información espectral de la señal (two sides spectrum)

DFT de una senoide

- Senoide de 1.000 Hz, muestreada a 8.000 Hz



Relación entre la banda *k* y la frecuencia

$$\omega = \frac{k\omega_s}{N} \text{ (radians per second)},$$

$$f = \frac{kf_s}{N} \text{ (Hz)},$$

La resolución en frecuencia es:

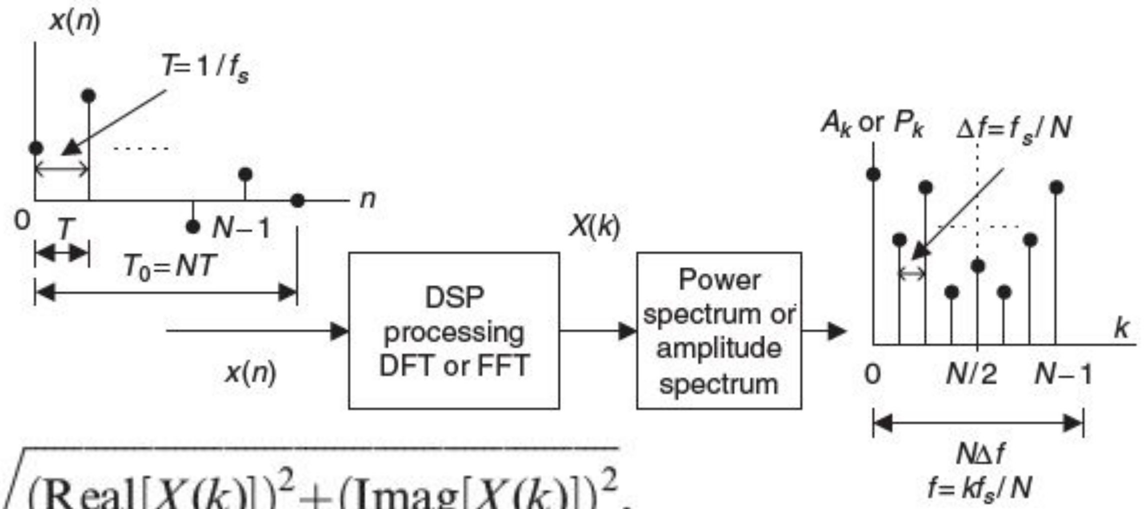
$$\Delta\omega = \frac{\omega_s}{N} \text{ (radians per second)},$$

$$\Delta f = \frac{f_s}{N} \text{ (Hz)}.$$

Ejercicio:

- Dada una secuencia $x[n] = [\ (1) \quad 2 \quad 3 \quad 4]$ cuya DFT de 4 puntos resulta $X(k) = [\ 10 \quad -2 + j2 \quad -2 \quad -2 - j2]$, dada una frecuencia de muestreo de 10 Hz,
  - Determinar el período de muestreo, los índices de tiempo, y la estampa de tiempo para la muestra $x[3]$
  - Determinar la resolución en frecuencia, el número de bandas, y mapear en frecuencia cada coeficiente de la DFT

Espectro de amplitud y espectro de potencia



$$A_k = \frac{1}{N}|X(k)| = \frac{1}{N}\sqrt{(\mathrm{Real}[X(k)])^2 + (\mathrm{Imag}[X(k)])^2},$$

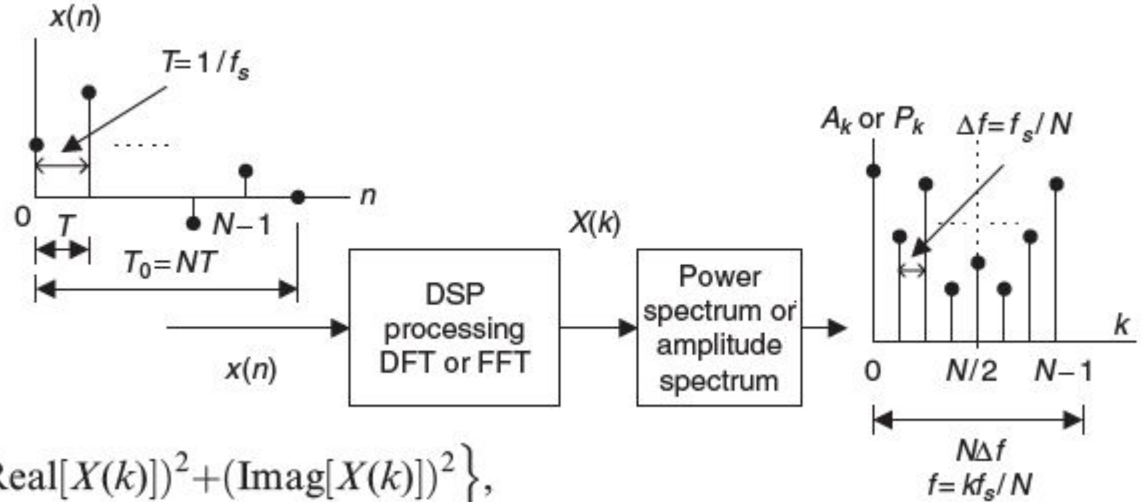
$$k = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

Espectro de amplitud a dos lados (two sides)

$$\bar{A}_k = \begin{cases} \frac{1}{N}|X(0)|, & k = 0 \\ \frac{2}{N}|X(k)|, & k = 1, \ldots, N/2 \end{cases}$$

Espectro de amplitud a un lado (one side) (se preserva la energía de la señal)

Espectro de amplitud y espectro de potencia



$$P_k = \frac{1}{N^2}|X(k)|^2 = \frac{1}{N^2}\left\{(\text{Real}[X(k)])^2 + (\text{Imag}[X(k)])^2\right\},$$
$$k = 0, 1, 2, \ldots, N-1.$$

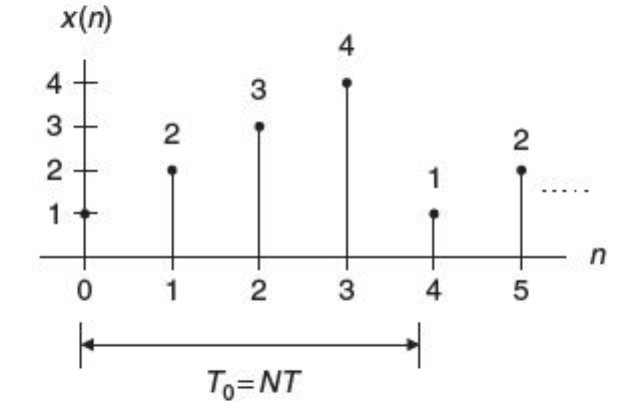
Espectro de potencia a dos lados (two sides)

$$\bar{P}_k = \begin{cases} \frac{1}{N^2}|X(0)|^2 & k = 0 \\ \frac{2}{N^2}|X(k)|^2 & k = 0, 1, \ldots, N/2 \end{cases}$$

Espectro de potencia a un lado (one side)

Ejercicio de espectro de amplitud y potencia

- Dada la secuencia:

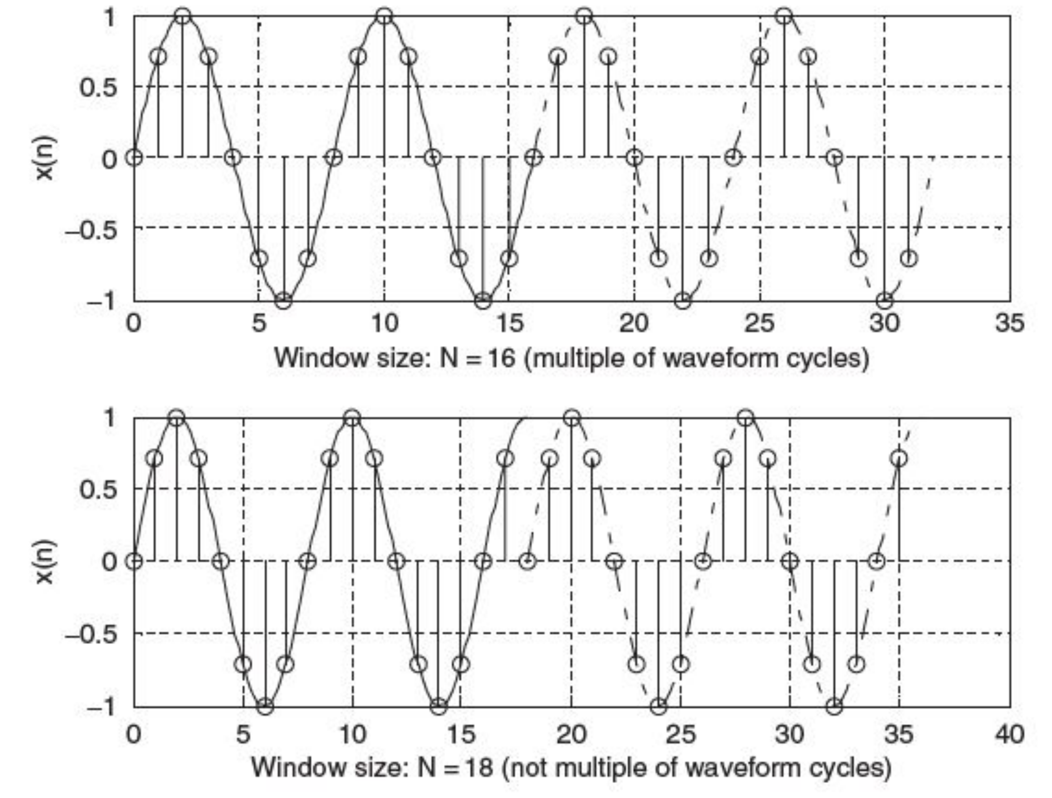


- Asumiendo una frecuencia de muestreo de 100 Hz, calcular el espectro de amplitud, fase y potencia.

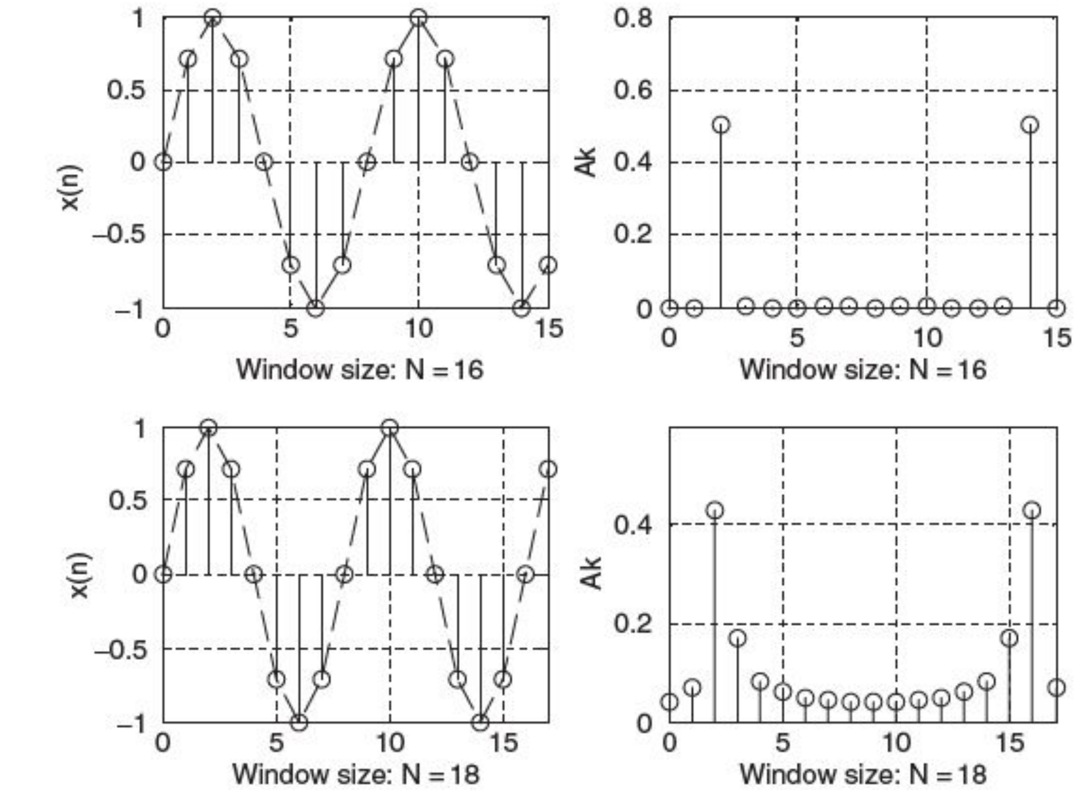
Ejercicio de resolución espectral

- Considere una secuencia muestreada a 10kHz, si se utiliza una DFT de 1024 para calcular el espectro:
  - Determinar la resolución espectral
  - Determinar la frecuencia más alta

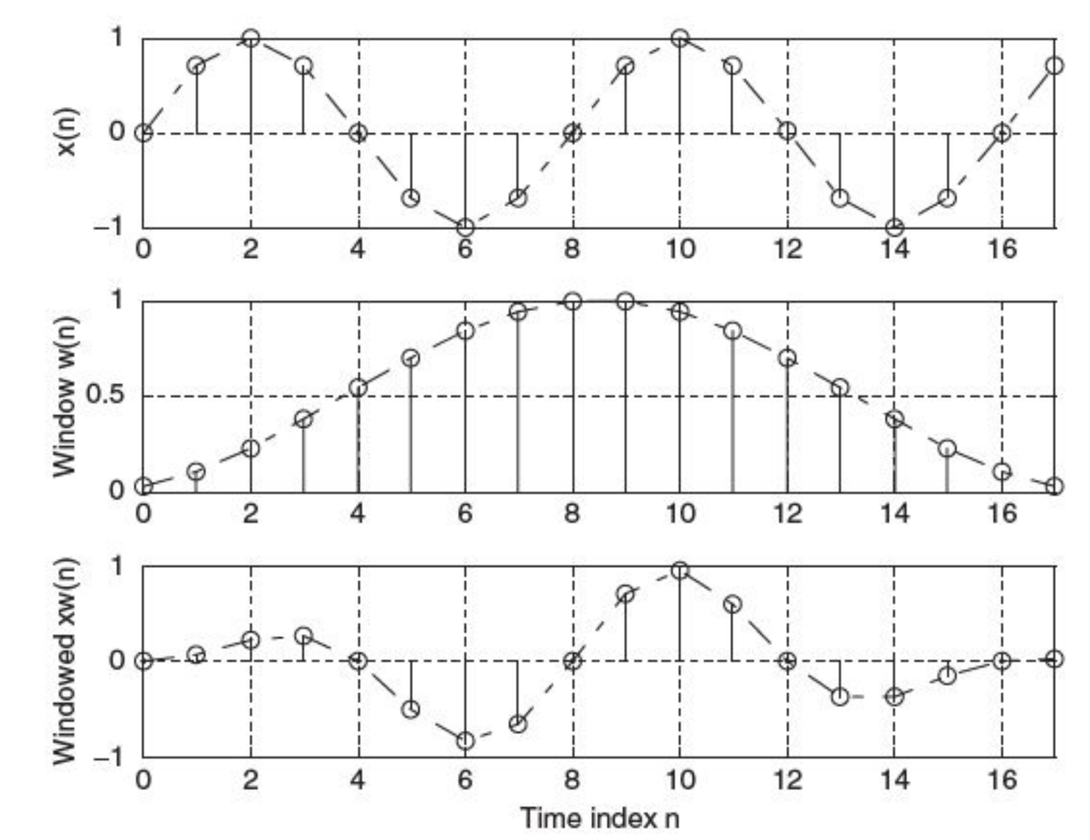
Efecto de Ventaneo



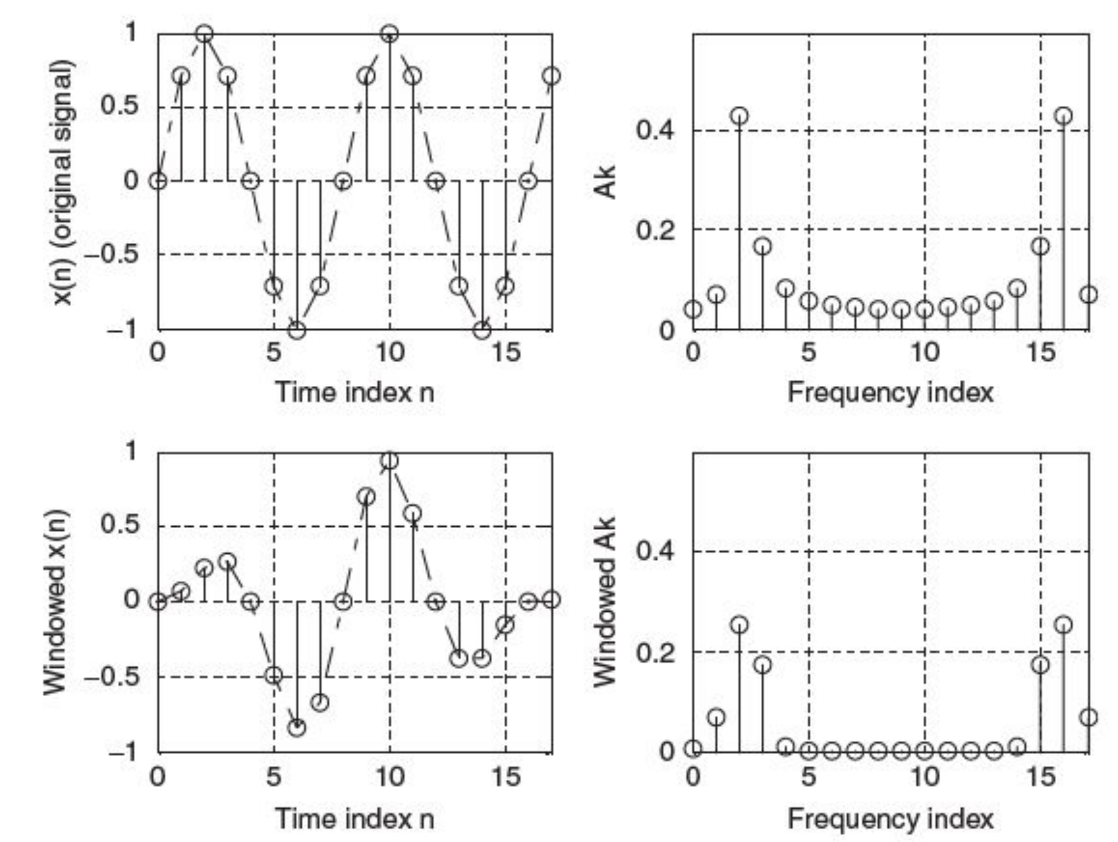
Efecto de Ventaneo



Efecto de Ventaneo



Efecto de Ventaneo



Efecto del Ventaneo de Datos

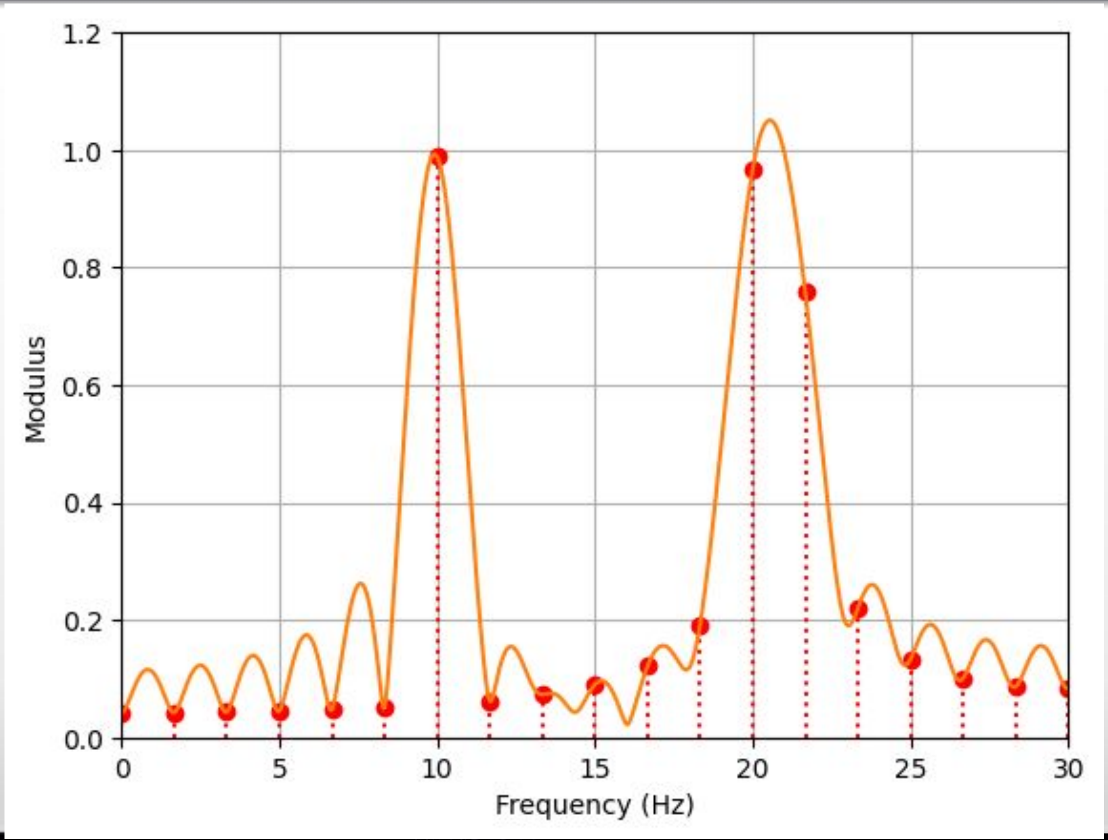
Efecto del ventaneo en el módulo de la Transformada de Fourier

Caso 1: Ventana rectangular (Truncamiento de Datos)

Considere la siguiente señal con tres componentes sinusoidales:

Con frecuencias de 10Hz, 20Hz y 21Hz, con amplitudes iguales a 1, la frecuencia de muestreo es igual a 60 Muestras/s

Efecto del Ventaneo de Datos

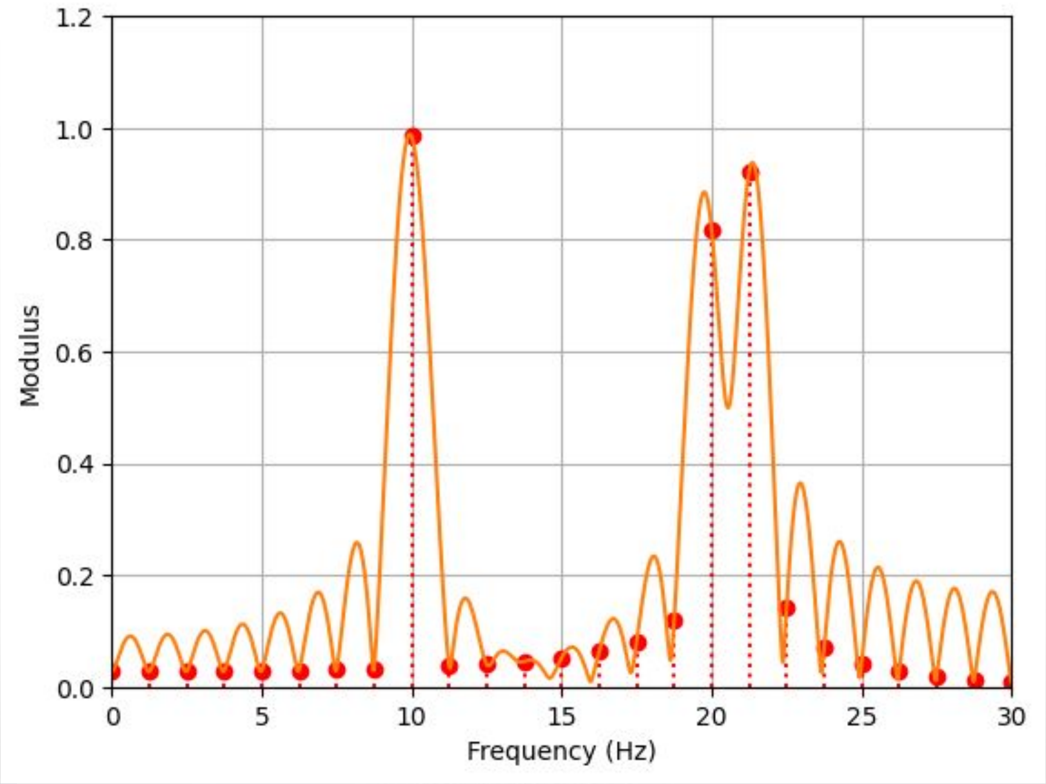


T = 0,6 segundos

$N = FsT = 36$

Resolución = 1,66 Hz = 1 / T

Efecto del Ventaneo de Datos

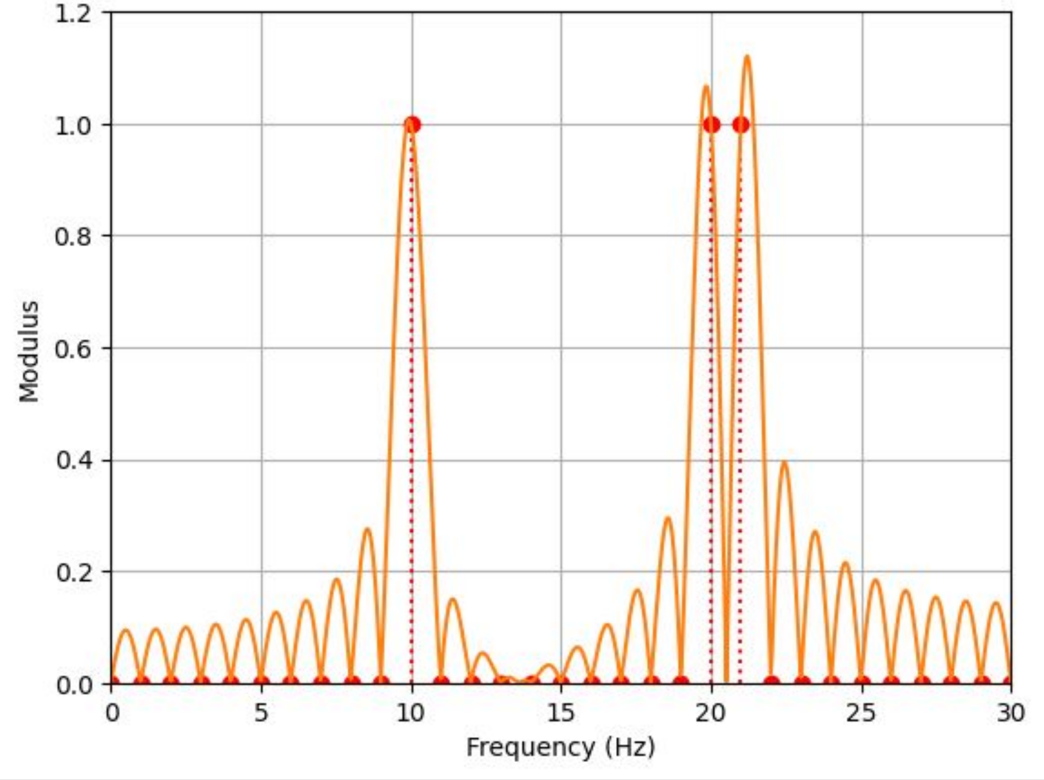


T = 0,8 segundos

$N = FsT = 48$

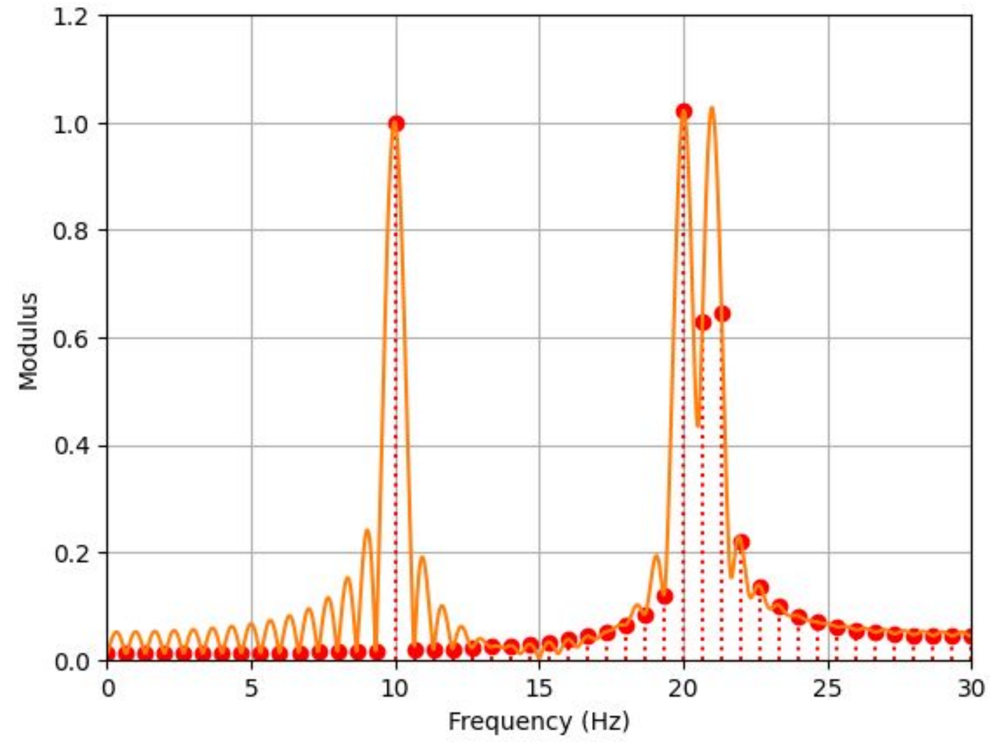
Resolución = 1,25 Hz = 1 / T

Efecto del Ventaneo de Datos



T = 1 segundos
$N = FsT = 60$
Resolución = 1 Hz = 1 / T
(considerar que el tiempo de observación no incluye un número entero de periodos

Efecto del Ventaneo de Datos

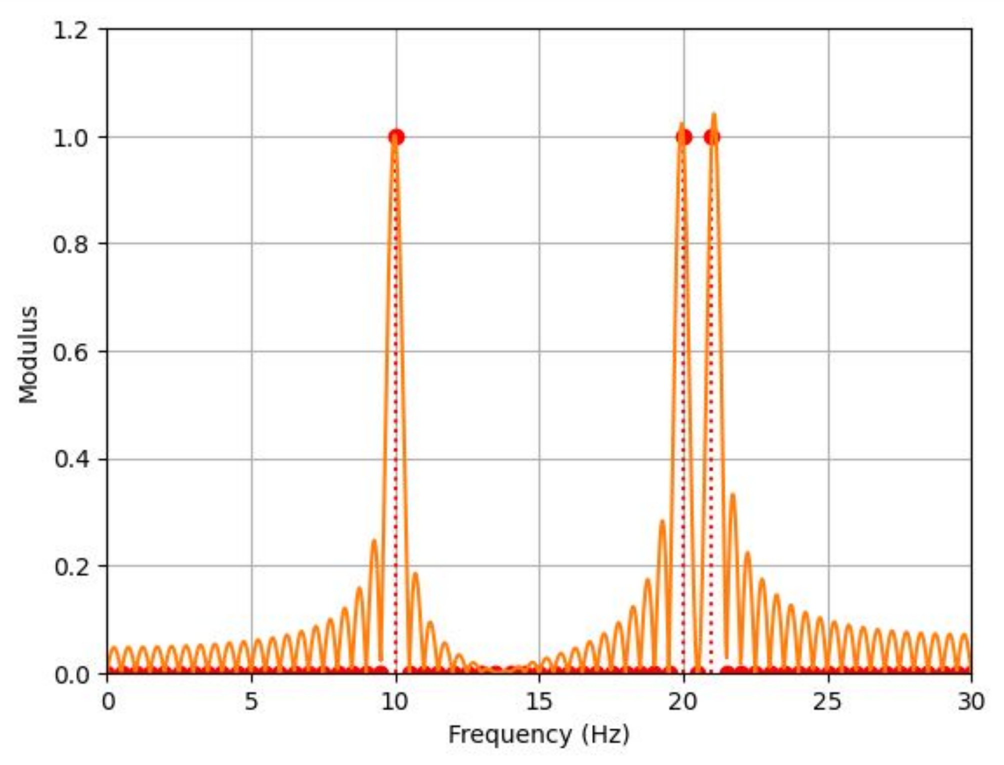


T = 1,5 segundos

$N = FsT = 90$

Resolución = 0,66 Hz = 1 / T

Efecto del Ventaneo de Datos

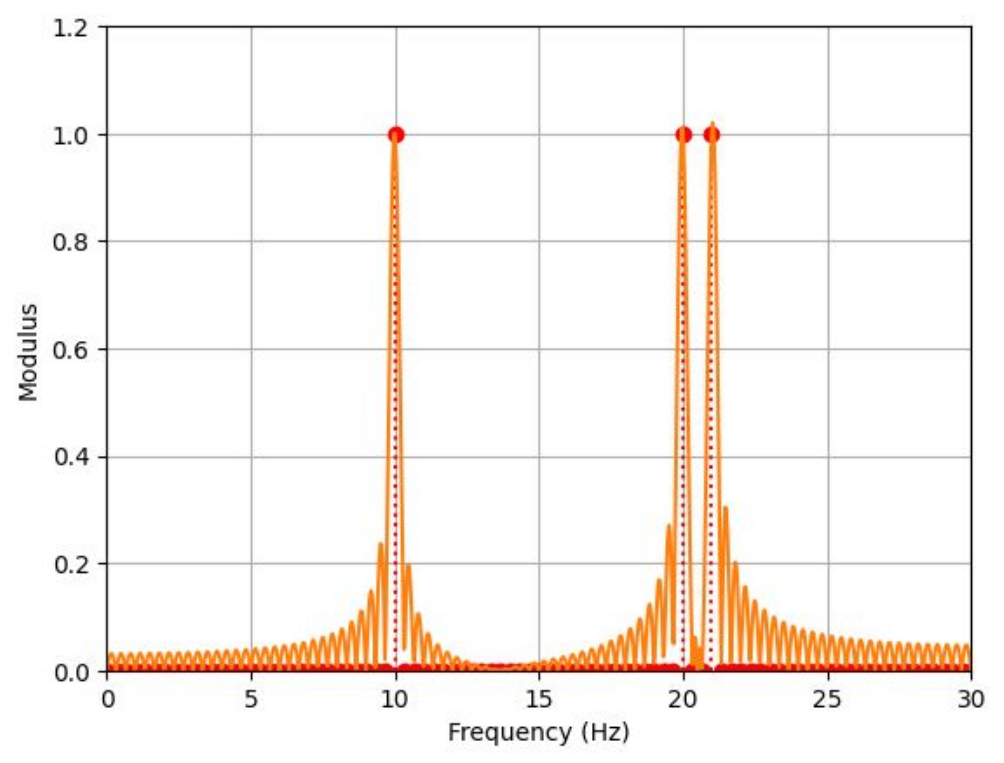


$T = 2$ segundos

$N = FsT = 120$

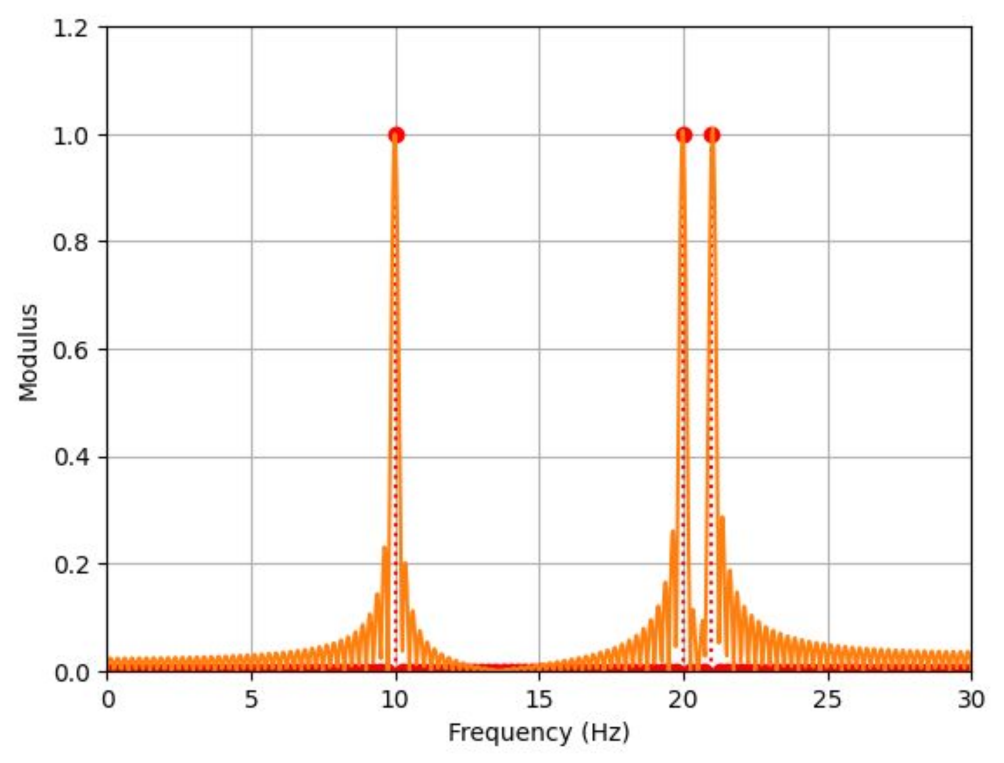
Resolución = 0,5 Hz
$= 1 / T$

Efecto del Ventaneo de Datos



T = 3 segundos
$N = FsT = 180$
Resolución = 0,33 Hz = 1 / T

Efecto del Ventaneo de Datos: Resolución en Frecuencia

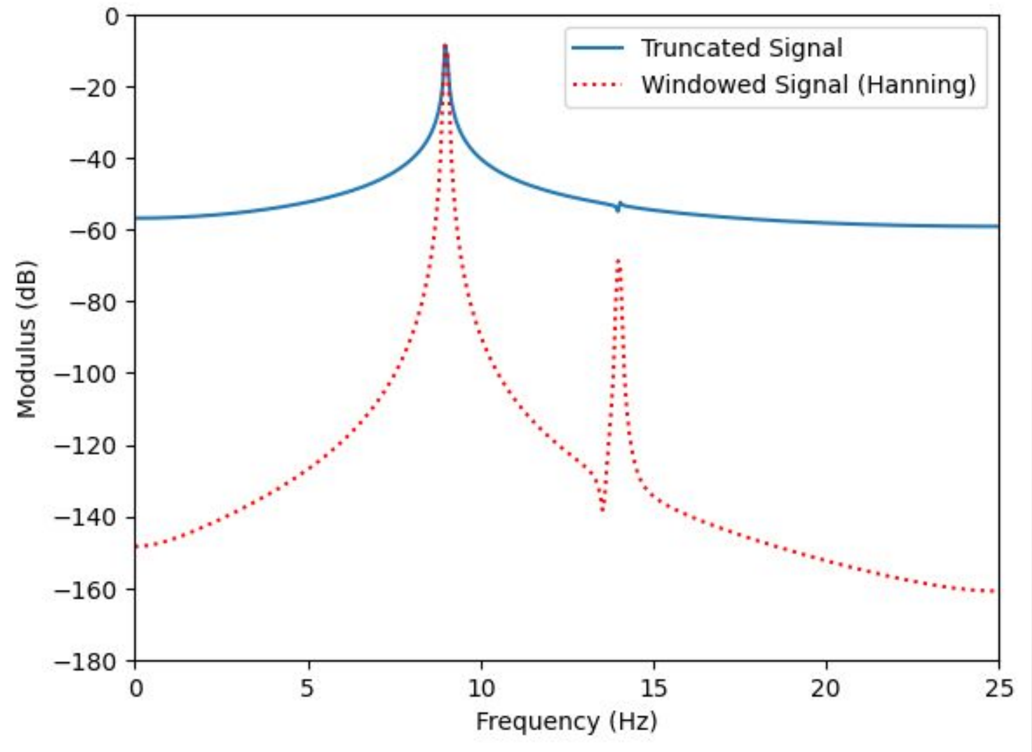


T = 4 segundos

$N = FsT = 240$

Resolución = 0,25 Hz = 1 / T

Efecto del Ventaneo de Datos: Resolución en Amplitud



T = 15,6 s

fs = 50 Hz

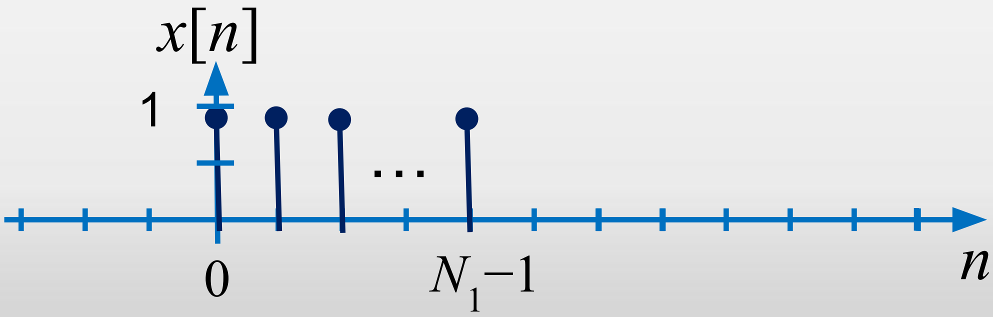
A1 = 1, A2 = 0,001

Comparación entre la ventana rectangular (truncar) y ventana de Hanning

La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

- Ejemplo: Graficar la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto de la siguiente señal:

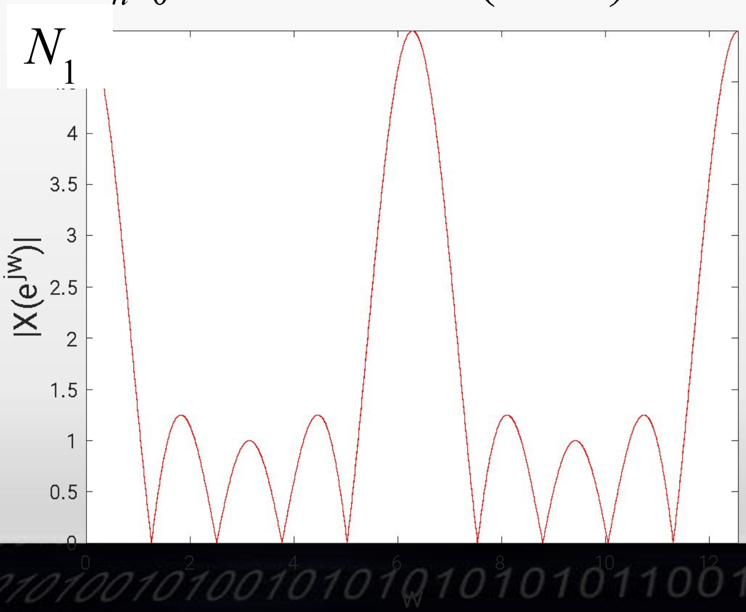
$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N_1 - 1 \\ 0, & \text{para otros } n \end{cases}$$



La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

- Ejemplo: Solución por TFTD

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N_1-1} e^{-j\omega n} = \frac{sen(\omega N_1/2)}{sen(\omega/2)} e^{-j\omega\frac{N_1-1}{2}}$$



La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

- Ejemplo: Resolución por DFT
- La definición de la DFT es:

$$X[k] = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} & \text{para } 0 \le k \le N-1 \\ 0, & \text{para otros valores de } k \end{cases}$$

- En Matlab, el comando asociado a esta transformada es fft

```
fft Discrete Fourier transform.
   fft(X) is the discrete Fourier transform (DFT) of vector X.
   For length N input vector x, the DFT is a length N vector X,
   with elements
                    N
     X(k) =        sum  x(n)*exp(-j*2*pi*(k-1)*(n-1)/N), 1 <= k <= N.
                   n=1
```

La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

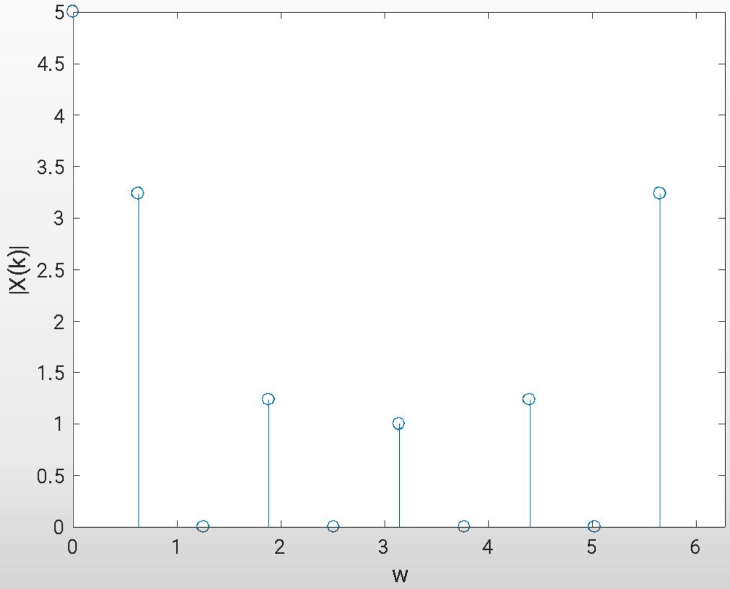
- Ejemplo: Resolución por DFT

Ejemplo1.m

```
clear all
clc

N=10;
N1=5;
x=[ones(1,N1) zeros(1,N-N1)];
X=fft(x);

w=0:2*pi/N:2*pi*(1-1/N);
figure(1)
stem(w,abs(X))
xlabel('w')
ylabel('|X(k)|')
```



La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

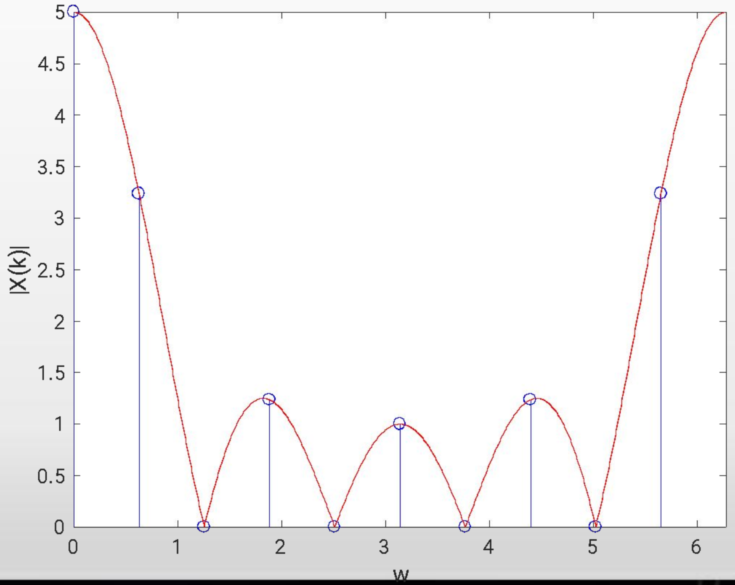
- Superponiendo al resultado TFTD:

Ejemplo1.m

```
clear all
clc

N=10;
N1=5;
x=[ones(1,N1) zeros(1,N-N1)];
X=fft(x);

w=0:2*pi/N:2*pi*(1-1/N);
figure(1)
stem(w,abs(X))
xlabel('w')
ylabel('|X(k)|')
```



La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

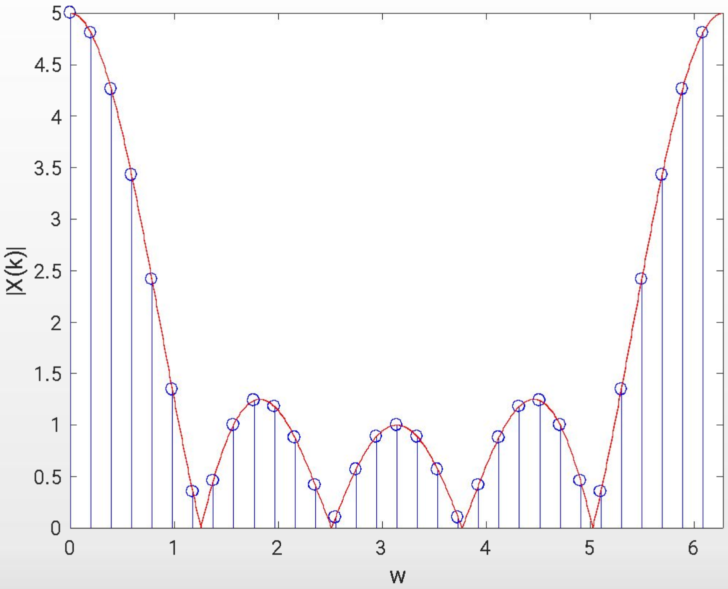
- Se puede aumentar las muestras en frecuencia

Ejemplo1.m

```
clear all
clc

N=32;
N1=5;
x=[ones(1,N1) zeros(1,N-N1)];
X=fft(x);

w=0:2*pi/N:2*pi*(1-1/N);
figure(1)
stem(w,abs(X))
xlabel('w')
ylabel('|X(k)|')
```



Zero padding (completar con ceros) Se mejora la resolución (pero, en algunos, casos de forma artificial)

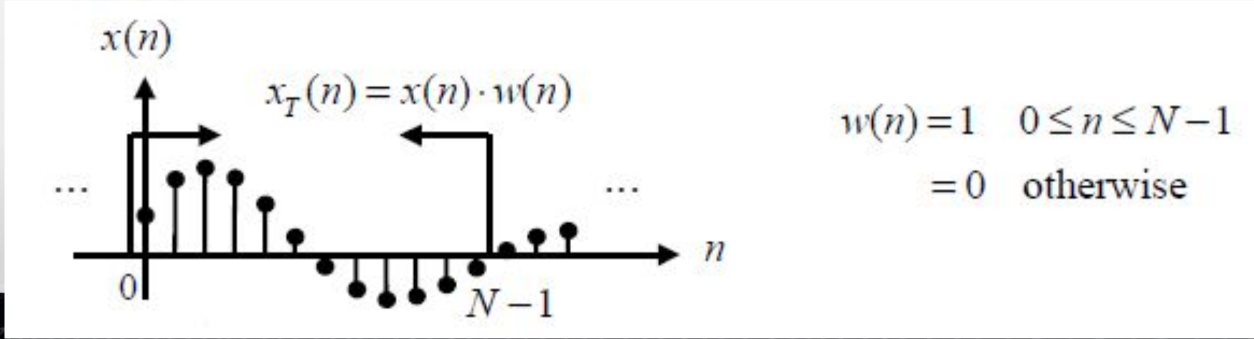
La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

- **Efecto de truncamiento de los datos**:

Considere una señal de longitud infinita de la cual se desea obtener la TFTD utilizando DFT

Es necesario restringir la duración de la señal (por una cuestión computacional).

Esto puede ser modelado como el producto de la señal $x(n)$ por una ventana $w(n)$ (ventana rectangular).



La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

- **Efecto de truncamiento de los datos**:

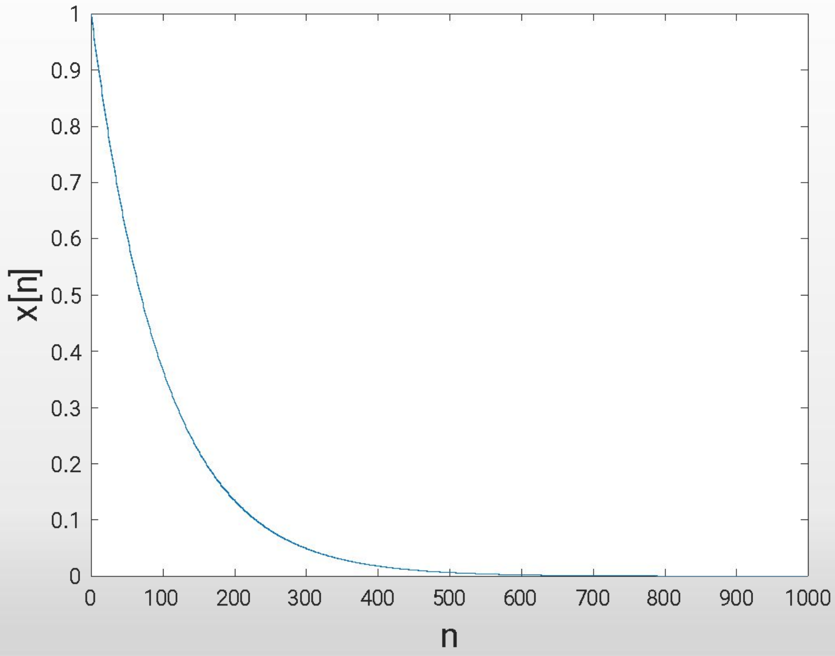
Así, al realizar el cálculo de la DFT de las muestras seleccionadas, se realiza en realidad un muestreo de la TFTD del producto $x(n)$ $w(n)$ Por propiedades de TFTD, se verifica que la transformada de este producto corresponde a la convolución circular de las transformadas individuales. Por lo tanto se obtienen muestras de un espectro de $x(n)$ distorsionado.

$$x_t[n] = x[n].w[n] \xleftrightarrow{TFTD} X_t(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\theta})W(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

- **Efecto de truncamiento de los datos:**

Ejemplo: determine la TFTD de la siguiente señal: $x[n] = a^n u[n], \text{ con } a = 0{,}99$

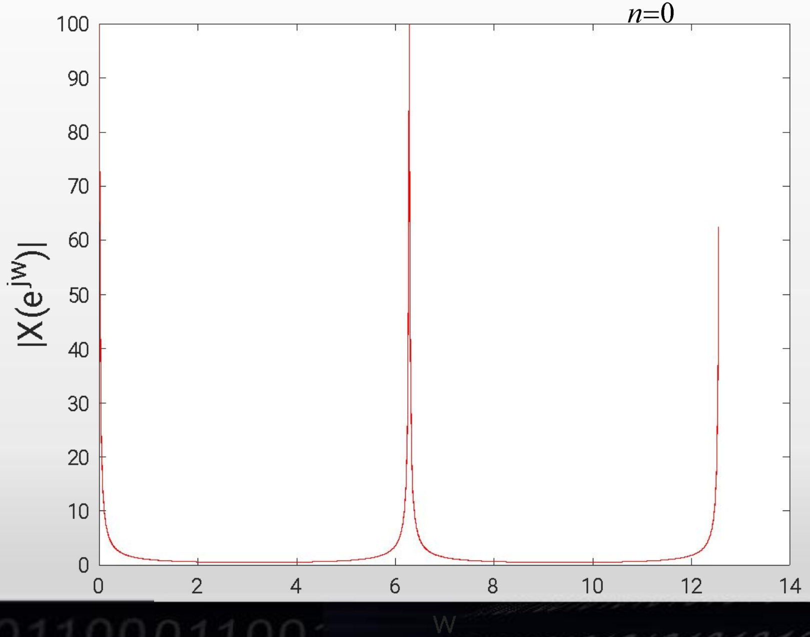


Señal de evolución muy lenta

La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

- **Efecto de truncamiento de los datos:**

Por definición: $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}} = \dfrac{1}{1-0,99e^{-j\omega}}$

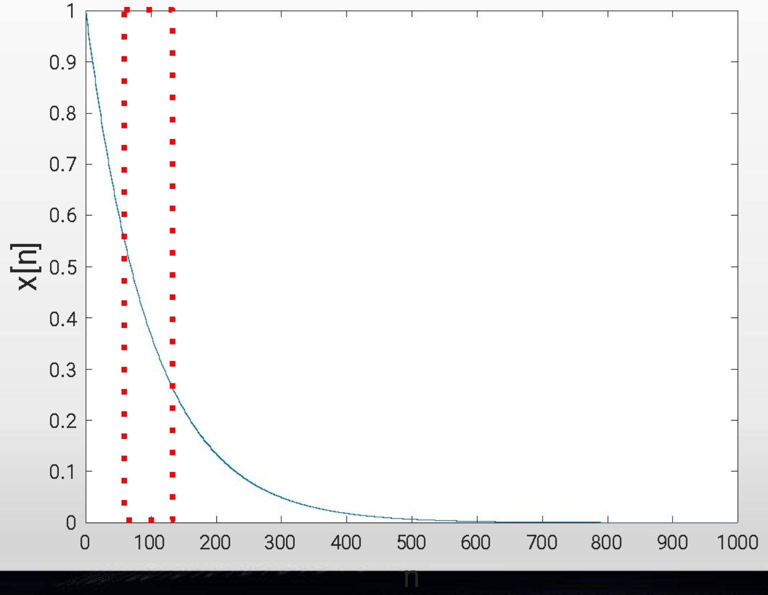


Espectro concentrado en bajas frecuencias

La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

- Efecto de truncamiento de los datos:

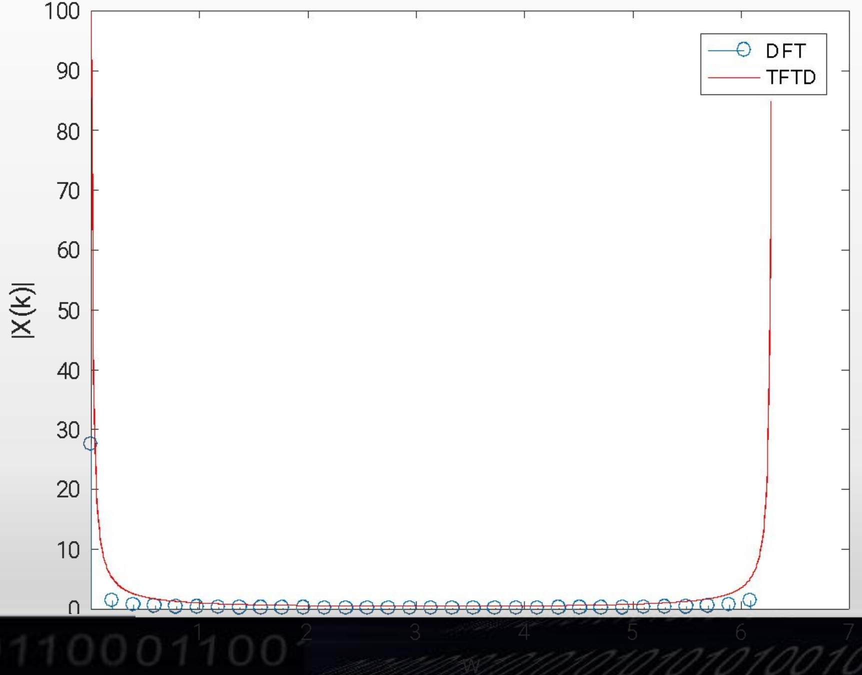
Haciendo el cálculo de DFT con truncando en 32 muestras



La DFT y la Transformada de Fourier de Tiempo Discreto (TFTD)

- Efecto de truncamiento de los datos:

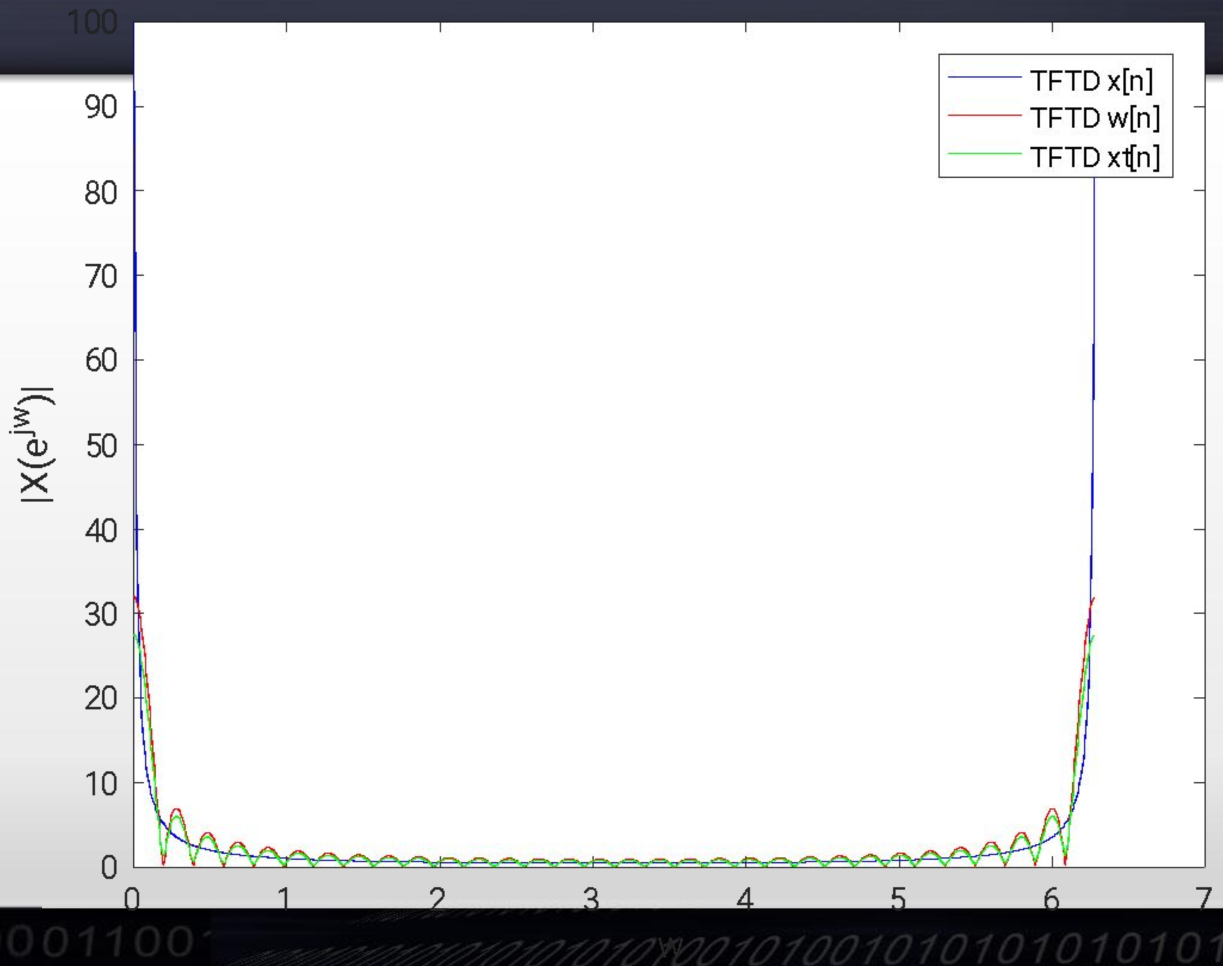
Haciendo el cálculo de DFT truncando en 32 muestras

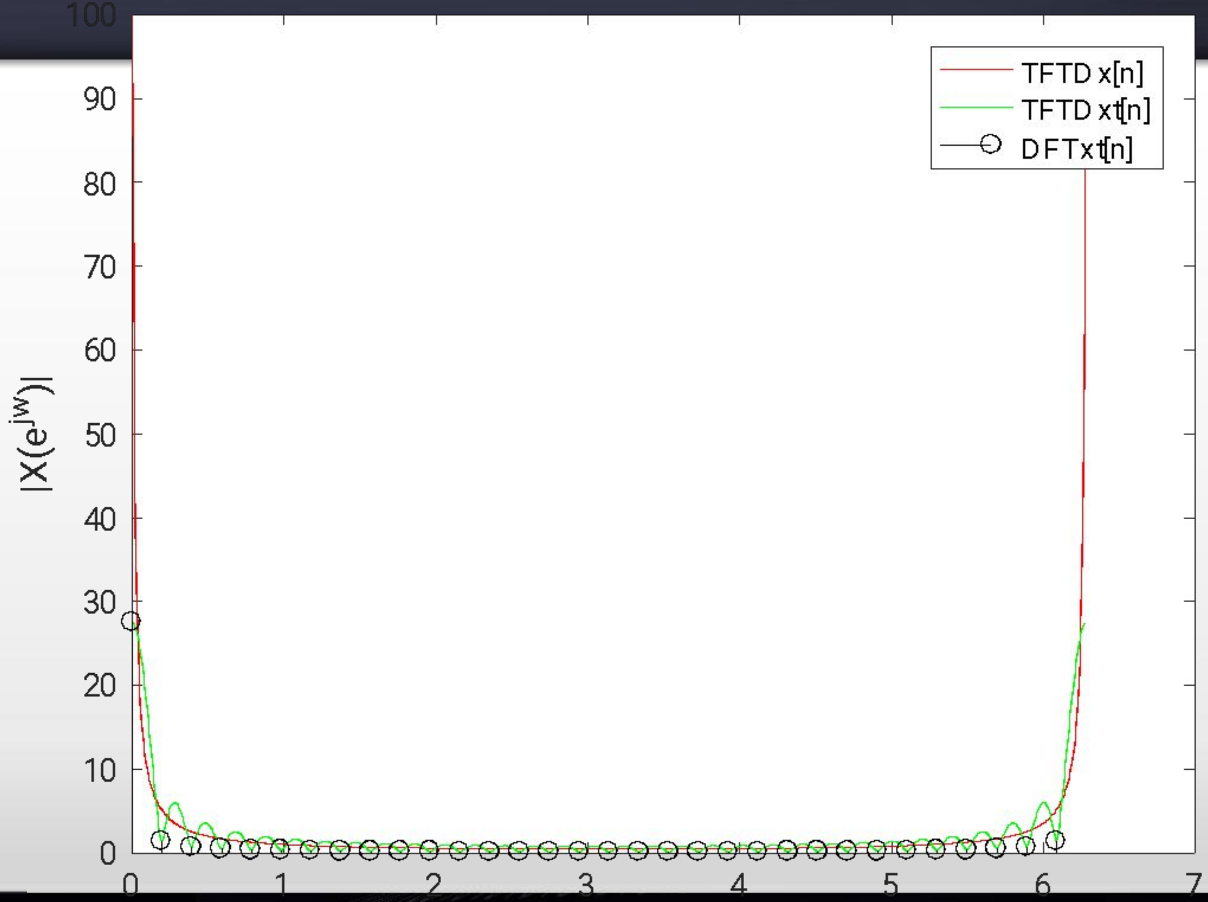


En rojo se ilustra la TFTD de la señal x[n] considerando duración infinita

En azul las muestras de la DFT truncando en 32 muestras

¿Qué puede observar?


TFTD x[n]
TFTD w[n]
TFTD xt[n]
$|X(e^{jw})|$
w
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
1
2
3
4
5
6
7


TFTD x[n]
TFTD xt[n]
DFTxt[n]
|X(e^{jw})|
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0
1
2
3
4
5
6
7

DFT y TFTD

- Zero padding: si agregamos ceros a las señal truncada, obtenemos un espectro con mejor resolución, pero continuará siendo el espectro de una señal truncada, no de la verdadera señal
- Lo ideal es incorporar más muestras de la señal de duración infinita