Formas de implementar los controladores dentro del Arduino DUE

- **Caso PI:**

Inicialmente se debe hallar el controlador PI en función del desempeño adoptado. La FT del controlador será:

$$G_{cd}(z) = K_{pi}\frac{(z+a)}{(z-1)} \tag{1}$$

Luego es necesario hallar la ecuación recursiva:

$$u_{pi}[kT] = K_{pi}e[kT] + aK_{pi}e[(k-1)T] + u_{pi}[(k-1)T] \tag{2}$$

La forma de implementar el PI dentro del DSC será la siguiente:

```
// Acción PI, aprox. Forward: upi(k) = upi(k-1) + Kpi*e(k) + a*Kpi*e(k-1)
upi_k = upi_km1 + Kpi*ek + aKpi*ekm1;
```

- **Caso PI-D:**

Para comenzar debemos hallar el controlador PID=PI*PD, donde el controlador PI es el hallado anteriormente y se agrega en serie un controlador PD. La FT del controlador será:

$$G_{cd}(z) = K_{pid}\frac{(z+b)(z+c)}{z(z-1)} = \frac{K_{pid}z^2 + K_{pid}(b+c)z + bcK_{pid}}{z(z-1)} \tag{3}$$

La ecuación recursiva completa será:

$$u_{pid}[kT] = K_{pid}e[kT] + K_{pid}(b+c)e[(k-1)T] + bcK_{pid}e[(k-2)T] + u_{pi}[(k-1)T] \tag{4}$$

Pero en este caso se desea emplear la forma PI-D, es decir, la acción derivativa se toma de la salida de la planta. Por lo tanto, la forma de implementar el PI-D dentro del µC será la siguiente:

```
// Acción PI para el PI-D
upik = upikm1 + Kpi*ek + a*Kpi*ekm1;
// Acción D (desde la salida) aprox. Backward: ud(k) = Kd*[y(k)-y(k-1)]/T

eyk = yk - ykm1; // Error de velocidad: y(k)-y(k-1).//
ud_k = Kd*eyk*fm; Cálculo de la acción derivativa

// Acción PI-D
upid_k = upik - ud_k;
```

Reordenando:

$$u_{pi}[kT] = K_{pi}e[kT] + aK_{pi}e[(k-1)T] + u_{pi}[(k-1)T] \tag{5}$$

$$u_d[kT] = \frac{K_d}{T}\left(y[kT] - y[(k-1)T]\right) \tag{6}$$

$$u_{pid}[kT] = u_{pi}[kT] - u_d[kT] \tag{7}$$

Se ve que ambas formas de las expresiones 7 y 4 no coinciden. De manera que debemos adaptar nuestro controlador hallado en Matlab a la forma expresada por 5, 6 y 7.

Podemos valernos de la idea de que el controlador derivativo dependa del error como se suele calcular en la práctica y luego llevar a implementar de la forma –D.

Entonces las expresiones 5 y 6 en el dominio ‘z’ quedarían:

$$G_{pi}(z) = K_{pi}\,\frac{(z+a)}{(z-1)} = \frac{U_{pi}(z)}{E(z)} \tag{8}$$

$$G_d(z) = \frac{K_d}{T}\,\frac{(z-1)}{z} = \frac{U_d(z)}{Y(z)} \tag{9}$$

Realizando la suma de ambas expresiones obtenemos el PID:

$$G_{pid}(z) = G_{pi}(z) + G_d(z) = \frac{U_{pi}(z)}{E(z)} + \frac{U_d(z)}{Y(z)} \tag{10}$$

$$G_{pid}(z) = K_{pi}\,\frac{(z+a)}{(z-1)} + \frac{K_d}{T}\,\frac{(z-1)}{z} = \frac{(K_{pi} + K_d/T)z^2 + (aK_{pi} - 2K_d/T)z + K_d/T}{z(z-1)} \tag{11}$$

Comparando la (*3*) con la (11)

$$G_{cd}(z) = K_{pid}\,\frac{(z+b)(z+c)}{z(z-1)} = \frac{K_{pid}z^2 + K_{pid}(b+c)z + bcK_{pid}}{z(z-1)}$$

e igualando los coeficientes del numerador se obtienen los valores para la implementación del controlador PI-D que se indican en las ecuaciones (*5*), (*6*) y (*7*).

$$K_d/T = bcK_{pid} \quad \rightarrow \quad K_d = TbcK_{pid} \tag{12}$$

$$K_{pi} + K_d/T = K_{pid} \quad \rightarrow \quad K_{pi} = K_{pid} - K_d/T \tag{13}$$

$$aK_{pi} - 2K_d/T = K_{pid}(b+c) \quad \rightarrow \quad a = \frac{K_{pid}(b+c) + 2K_d/T}{K_{pi}} \tag{14}$$

Los valores empleados de a y K_{pi} no serán los mismos que los empleados para el controlador PI inicial, ecuaciones (*1*) y (*2*), ya que las especificaciones cambiaron y el PD agrega una ganancia y un cero que modifica la dinámica completa.