CENTRO DE ESTUDIANTES DE INGENIERIA
LA LINEA RECTA
SECRETARIA MATERIALES DE ESTUDIO Y
BIBLIOTECA

Transportes

T. P. N° 4 _

CURVAS VERTICALES EN EL DISEÑO GEOMETRICO DE CAMINOS

Ing Alberto Bianco

Ing Angel A Golmarini

48.41.04

BUENOS AIRES
1988

INDICE

BIBLIOGRAFIA

- Apuntes de Vías de Comunicación
  Ing. Pascual Palazzo

- Estudio y Proyecto de Carreteras
  Ing. Jacob Carciente

- Caminos
  Ing. Civil Juan M. M. Corvalán

- Distancia de visibilidad
  Ing. Armando García Baldizzone

- Normas de Diseño Geométrico de Caminos Rurales
  Dirección Nacional de Vialidad
  Ing. Federico G. O. Ruhle

P R O L O G O

El presente trabajo desarrolla el tema: "Curvas verticales en el Diseño geométrico de caminos", perteneciente a la asignatura Transporte de las carreras de Ingeniería Civil y Agrimensura.

Se inicia con una recopilación de las propiedades de la parábola cuadrática de eje vertical, que es la utilizada como curva de enlace entre dos alineamientos rectos de distintas pendientes. Continúa con el análisis de los distintos criterios que conducen a la determinación de las longitudes mínimas necesarias y finaliza con el procedimiento de replanteo de la curva adoptada.

El análisis de los distintos criterios de determinación de longitudes mínimas no se ha limitado al desarrollo matemático correspondiente a cada una de las fórmulas consignadas, sino que se ha acentuado en forma especial el aspecto conceptual inherente a cada uno de dichos criterios.

El trabajo se limita exclusivamente a curvas contenidas en planos verticales. No obstante, hacia el final se hace una somera referencia al caso de superposición de curvas verticales y horizontales.

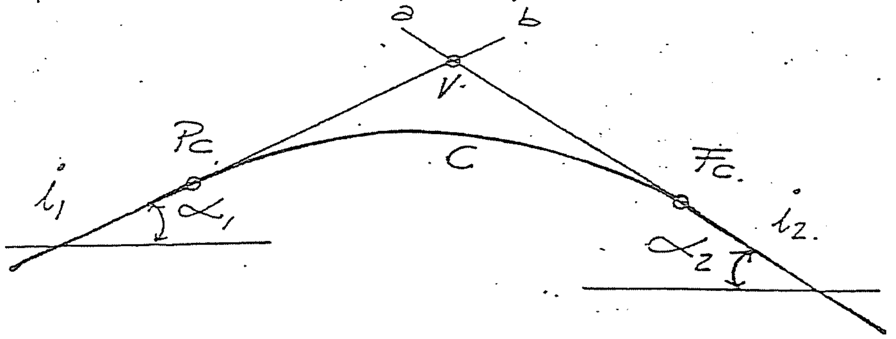
Se estima que, si bien se ha puesto un mayor énfasis en la justificación teórica de las distintas fórmulas utilizadas por la técnica vial para el cálculo de curvas verticales, no se ha dejado de tener en cuenta su aplicación práctica. De acuerdo con este enfoque, se han incorporado en la parte final tres ejemplos de aplicación totalmente desarrollados.

CURVAS VERTICALES

I) INTRODUCCION

Cuando se tienen dos tramos rectos de camino de distinta pendiente longitudinal (i_1, i_2), los mismos se empalman mediante una curva a la que se designa como curva vertical.

El eje del camino en el caso considerado, contenido en un plano vertical, está constituído por las rectas "a" y "b" de pendientes i_1 e i_2 y la curva vertical "c", cuyos puntos de tangencia con los tramos rectos son "Pc" y "Fc". Si i_1 e i_2 están expresados en tanto por ciento, resulta:



$$tg.\alpha_1 = \frac{i_1}{100}$$

$$tg.\alpha_2 = \frac{i_2}{100}$$

Pc (Principio de curva)

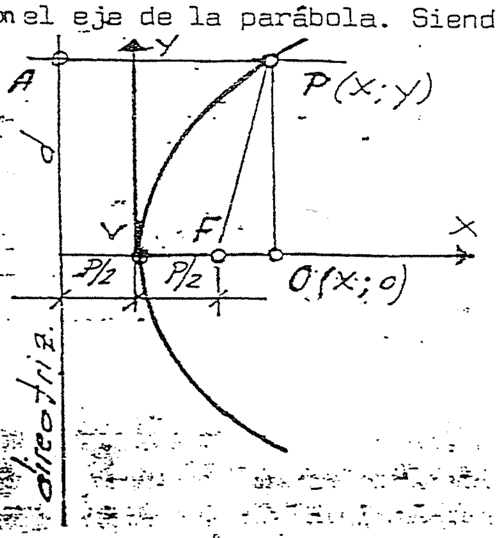
Fc (Fin de curva)

Las curvas que se adoptan para efectuar el empalme, responden a una ecuación parabólica.

II) ECUACIONES Y GENERALIDADES SOBRE LA PARABOLA

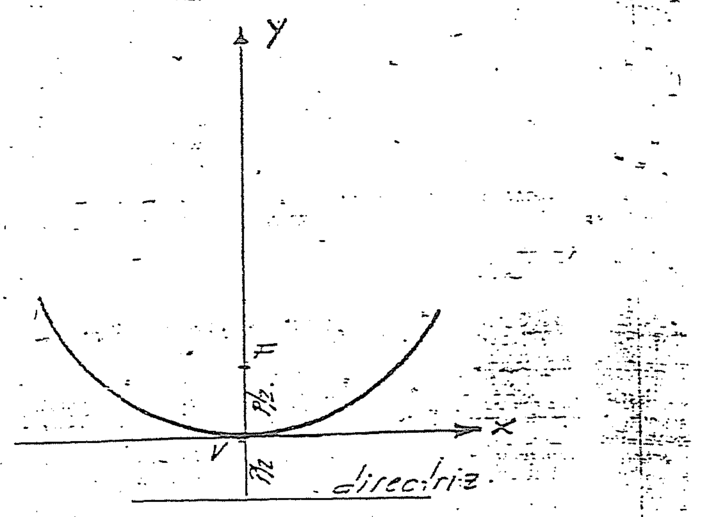
Dados una recta "d" y un punto "F", en un plano, se llama parábola al conjunto de puntos del plano que equidistan de la recta y el punto. La recta se llama directriz y el punto foco.
La recta perpendicular a la directriz trazada por el foco es el eje de la parábola.
El punto médio del segmento cuyos extremos son el foco y el pie de dicha perpendicular, pertenece a la parábola y recibe el nombre de vértice de la misma.
La distancia del foco a la directriz se denomina parámetro de la parábola.

Tomamos un sistema de ejes coordenados con centro en el vértice y eje de abscisas coincidente con el eje de la parábola. Siendo P un punto de la parábola, se cumple que:



$$\overline{AP} = \overline{PF}$$

2



En el triángulo rectángulo P O F se cumple:

$$\overline{OF}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{PF}^2 = \overline{AP}^2$$

$$(x - P/2)^2 + y^2 = (P/2 + x)^2$$

$$x^2 - P.x + (P/2)^2 + y^2 = (P/2)^2 + P.x + x^2$$

- De donde $\underline{y^2 = 2P.x}$

Si la directríz es paralela al eje x, resulta una parábola de eje vertical, tal que

$$y = \frac{x^2}{2.P} = a.x^2 \qquad \text{siendo} \quad a = \frac{1}{2.P}$$

El valor de "a" resulta positivo cuando la concavidad está dirigida hacia las "y" crecientes y negativa en caso contrario. Por lo tanto, para todos los casos $|a| = \frac{1}{2.P}$

Cuando el centro de coordenadas no coincide con el vértice de la parábola la ecuación de la parábola es:

$$y = a.x^2 + b.x + c$$

siendo: $b = tg\,\alpha$ (α es el ángulo de inclinación de la tg. en el punto $x = 0$)
c = ordenada al origen de la parábola

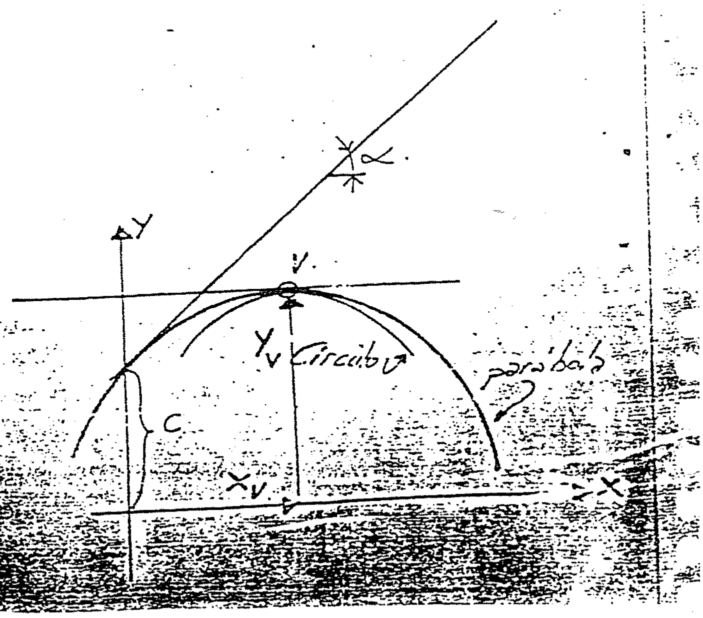
El radio del círculo osculador en el vértice está dado por:

$$R_V = \frac{(1 + Y_V'^2)^{3/2}}{Y''_V} \qquad (1)$$

$$y' = 2\,a\,x + b$$

En el vértice, la derivada primera es igual a 0.

$$\therefore\ y'_V = 2\,a\,x_V + b = 0$$



La derivada segunda es una constante:

$$y'' = 2\,a$$

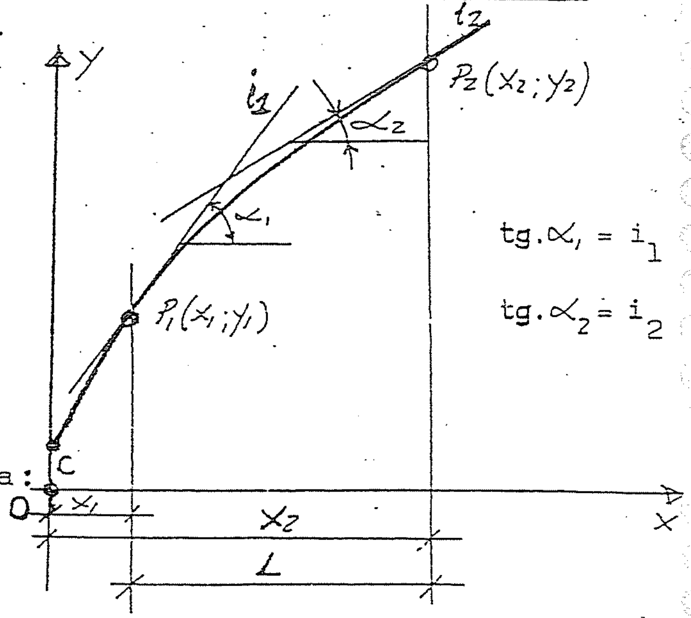
$$\therefore\ y''_V = 2\,a$$

Sustituyendo los valores de Y'_V e Y''_V hallados, en (1), resulta:

$$R_V = \frac{1}{2a} = P \qquad \underline{R_V = P}$$

Por lo tanto se cumple que en el vértice de la parábola el radio de curvatura es igual al parámetro.

La ecuación de la parábola de eje vertical, en función de las tangentes en dos puntos cualquiera y la proyección horizontal de la curva comprendida entre dichos puntos surge de la ecuacuón general:



$y = ax^2 + bx + c$ (1)

Las derivadas primera en los puntos de tangencia P_1 $(x_1;y_1)$ y P_2 (x_2,y_2) son:

$$tg.\alpha_1 = i_1 \qquad tg.\alpha_2 = i_2$$

$$y'_{x_1} = 2ax_1 + b = i_1$$

$$y'_{x_2} = 2ax_2 + b = i_2$$

Del sistema de ecuaciones propuesto resulta:

$$a = \frac{i_1 - i_2}{2(x_1 - x_2)} \qquad b = \frac{x_1 . i_2 - x_2 . i_1}{x_1 - x_2}$$

Sustituyendo en (1) los valores de "a" y "b" resulta :

$$y = \frac{i_1 - i_2}{2(x_1 - x_2)} . x^2 + \frac{x_1 . i_2 - x_2 . i_1}{x_1 - x_2} . x + c$$

Para el caso de coincidencia del centro de ejes coordenados con el punto P_1 resultan "x_1", "y_1" y "c" iguales a 0. Así mismo: $x_2 = L$. Por lo tanto, las expresiones anteriores se transforman en:

$$a = \frac{i_2 - i_1}{2L} \quad ; \quad b = i_1$$

$$y = (i_2 - i_1) . \frac{x^2}{2.L} + i_1 . x \; ; \text{ para } i_1 \text{ e } i_2 \text{ en \%: } y = (i_2 - i_1) . \frac{x^2}{200.L} + \frac{i_1}{100} . x$$

III) PROPIEDADES DE LAS PARABOLAS

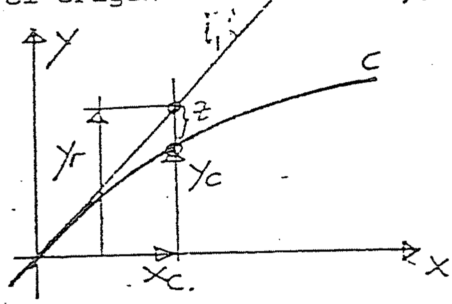
Las propiedades de las parábolas que se verán a continuación, si bien son de carácter general, se analizarán para el caso particular en que la ecuación de la parábola está expresada en función de las tangentes de dos puntos cualquiera $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ y el centro del sistema de ejes coordenados coincide con el punto P_1.

En las parábolas, la variación de la pendiente de la tangente a la curva es una constante. La pendiente de la tangente está dada por el valor de la derivada primera y su variación por la derivada segunda.-

$$y=(i_2-i_1)\frac{x^2}{2L}+i_1\cdot x \quad ; \quad y'=(i_2-i_1)\frac{x}{L}+i_1 \quad ; \quad y''=\frac{i_2-i_1}{L}=\text{constante}$$

En la parábola de eje vertical, los segmentos verticales entre una tangente y la curva, son proporcionales a los cuadrados de las proyecciones horizontales de los elementos de tangente comprendidos entre el punto de tangencia y el elemento vertical considerado.

La ecuación de la recta tangente a la curva (que pasa por el origen de coordenadas) y la de la parábola están dadas por:



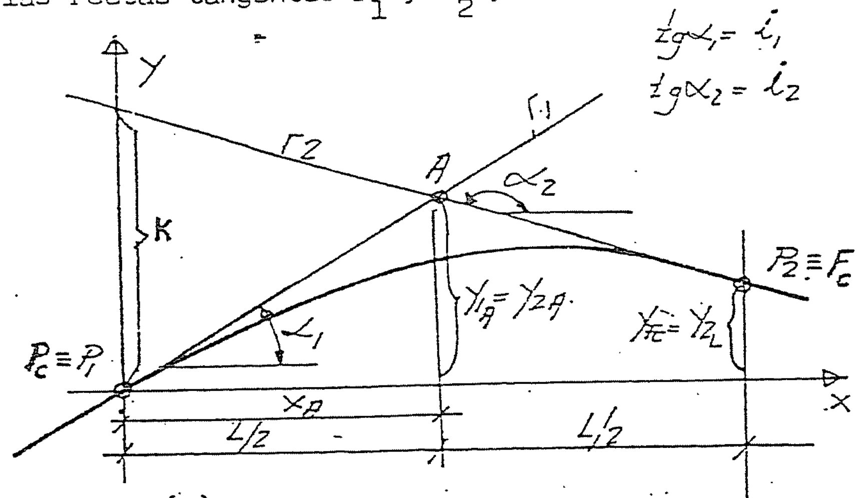
$$y_r = i_1\cdot x \qquad y_c=(i_2-i_1)\frac{x^2}{2L}+i_1\cdot x$$

$$z = y_r - y_c = (i_1-i_2)\cdot\frac{x^2}{2L} = K\cdot x^2 \;;\; \underline{Z = K\cdot x^2}$$

Donde $K = |a|$

En proyección horizontal, el punto de intersección de dos tangentes está a media distancia entre las proyecciones de los puntos de tangencia.

Las expresiones de las ecuaciones de las rectas tangentes r_1 y r_2 y la parábola son las siguientes:



$$y_1 = i_1\cdot x \qquad (1)$$

$$y_2 = k + i_2\cdot x \qquad (2)$$

$$y_c = (i_2-i_1)\cdot\frac{x^2}{2L}+i_1\cdot x \qquad (3)$$

La coordenada y_{Fc} sobre la curva es

$$y_{Fc} = \frac{i_2-i_1}{2L}\cdot L^2 + i_1\cdot L \qquad (4)$$

Para x=L resulta: $y_{Fc} = y_{2_L}$; por lo tanto de (2) y (4) resulta:

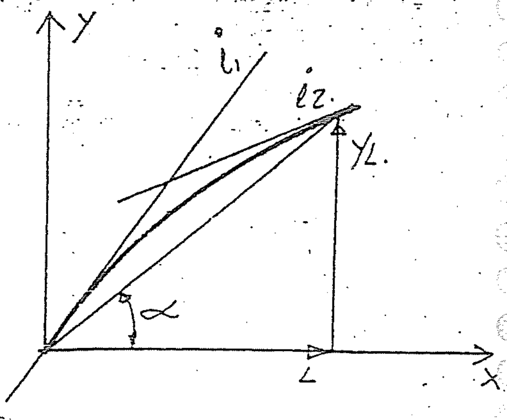
$$k = y_{Fc} - i_2\cdot L = (i_2-i_1)\cdot\frac{L}{2} + i_1\cdot L - i_2\cdot L = (i_1-i_2)\cdot\frac{L}{2} \quad \therefore \quad y_2 = (i_1-i_2)\cdot L/2 + i_2 x$$

Para el punto de intersección de las tangentes en P_1 y P_2 (Punto A) resulta $y_{1_A} = y_{2_A}$. Por lo tanto:

$$i_1\cdot x_a = (i_1-i_2)\cdot\frac{L}{2} + i_2\cdot x_a$$

de donde resulta: $\underline{x_a = \frac{L}{2}}$

4) En la parábola de eje vertical, el coeficiente angular de la recta que une dos puntos de la curva es el promedio de los coeficientes angulares de las tangentes en esos puntos.



De acuerdo a lo visto en (II)

$$y = (i_2 - i_1)\cdot\frac{x^2}{2L} + i_1\cdot x$$

Para x = L resulta

$$Y_L = (i_2 - i_1)\cdot\frac{L}{2} + i_1\cdot L$$

$$y_L = (i_1 + i_2)\cdot\frac{L}{2}\ ;\ \text{de donde:}\ \frac{y_L}{L} = tg\,\alpha = \frac{(i_1+i_2)}{2}$$

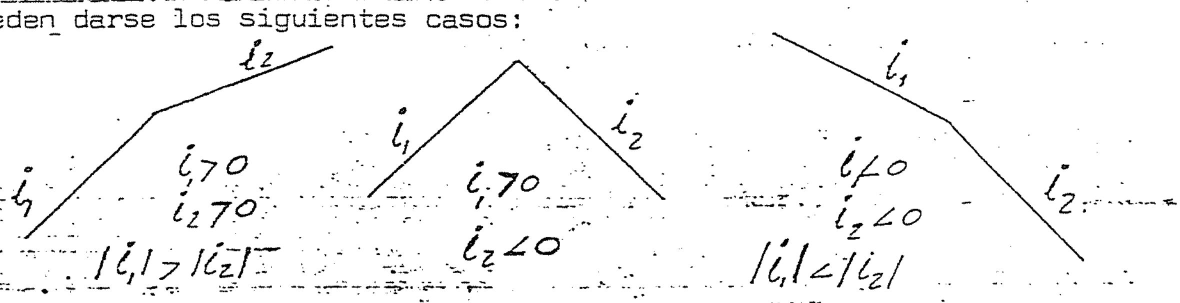
IV) CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD

En la expresión de la parábola

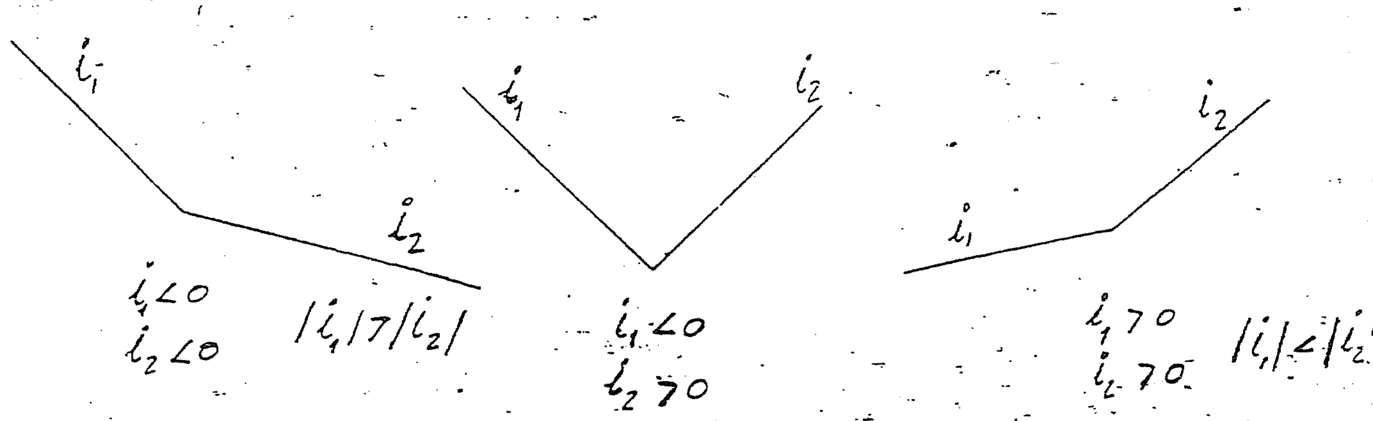
$$y = (i_2 - i_1)\cdot\frac{x^2}{2.L} + i_1\cdot x$$

Resulta $a = (i_2 - i_1)/\,2.L$; por lo tanto de acuerdo al signo de "a" podemos clasifica a las parábolas en cóncavas y convexas

Si $a < 0$ resulta parábola convexa y de acuerdo a los valores de las pendientes i_1 e i_2 pueden darse los siguientes casos:



Si $a > 0$ resulta parábola cóncava y pueden darse los siguientes casos:



V) DETERMINACION DE LA LONGITUD MINIMA DE CURVAS VERTICALES

El conductor debe ver un obstáculo imprevisto con la debida anticipación, de modo que pueda detener su vehículo, circulando a la velocidad directriz (V_d), antes de alcanzarlo.

Para que ésto sea posible, la visión debe producirse a una distancia igual o mayor a la distancia de detención (D_d), llamada comúnmente distancia de frenado. Esta exigencia está vinculada a la seguridad del tránsito, que es uno de los factores a tener en cuenta en la determinación de la longitud de la curva. Los cuatro factores considerados son:

- Seguridad del tránsito
- Molestias a los ocupantes del vehículo
- Apariencia estética de la rasante
- Drenaje adecuado.

a) FACTOR DE SEGURIDAD DEL TRANSITO EN CURVAS CONVEXAS

a_1) Caso en que la longitud de la curva (L) es mayor que la distancia de detención (D_d).

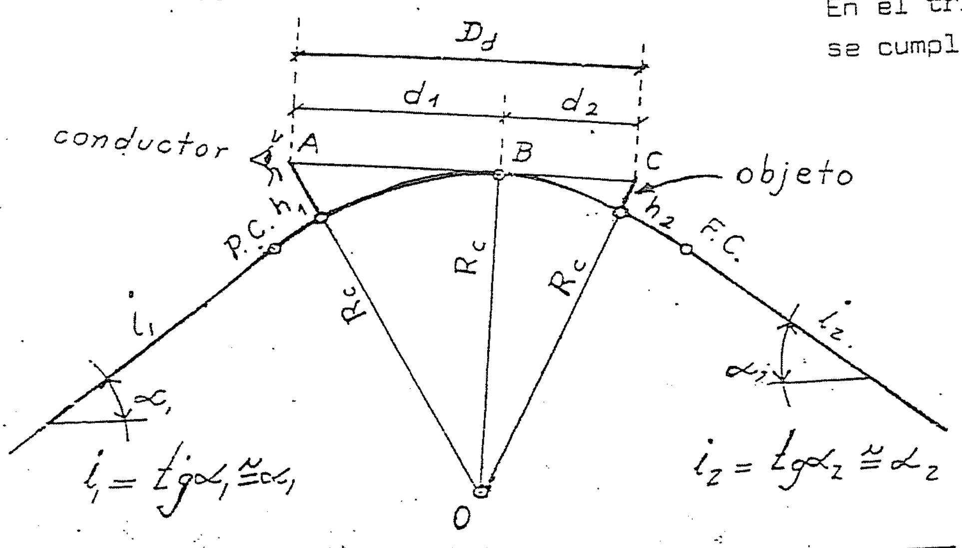
a_{1-1}) Circulación diurna:

La hipótesis de cálculo es que en todo el tramo de la curva vertical, la visual que parte del ojo del conductor sentado en el automóvil, a una altura "h_1" sobre el pavimento, le permita ver un objeto de una altura "h_2" sobre el pavimento, a una distancia por lo menos igual a D_d.

El caso límite de visibilidad corresponde a la situación en que la visual sea tangente a la superficie de rodamiento del camino.

La siguiente demostración, efectuada para una curva circular, permite determinar la expresión que da el valor del radio mínimo de dicha curva para la situación límite de visibilidad definida.

Se parte de ubicar segmentos radiales de alturas h_1 y h_2, apoyados sobre la circunferencia, a una distancia D_d.



En el triángulo rectángulo O B A se cumple:

$$d_1^2 + R_c^2 = (R_c + h_1)^2 =$$

$$= R_c^2 + 2\,R_c\,h_1 + h_1^2$$

por ser $h_1 \ll R_c$; h_1^2 se puede despreciar,

$$\therefore \quad d_1 = \sqrt{2\,R_c\,h_1}$$

Análogamente:

$$d_2 = \sqrt{2\,R_c\,h_2}$$

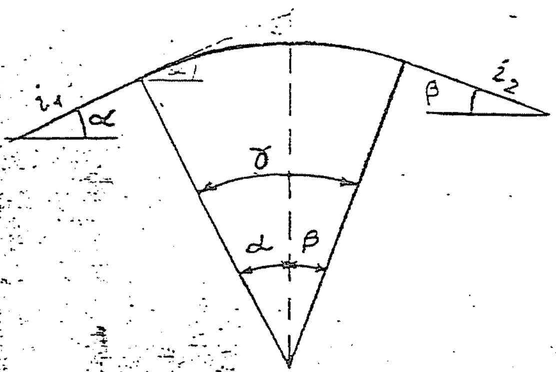
Siendo: $D_d = d_1 + d_2$; resulta: $D_d = \sqrt{2\,R_c}\,(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})$; de donde:

$$R_c = \frac{D_d^2}{2\,(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})^2}$$

Si en la expresión anterior, se sustituyen los valores adoptados de h_1 y h_2: 1,10 m y 0,20 m respectivamente, se obtiene:

$$R_c = \frac{D_d^2}{4,476} = 0,223 \cdot D_d^2$$

Para la determinación de la longitud, multiplicaremos el radio mínimo obtenido por el ángulo central γ (en radianes).



Para valores pequeños de ángulos, se verifica que:

$$\hat{\alpha} \cong tg\alpha = i_1$$

$$\hat{\beta} \cong tg\beta = i_2$$

$$\hat{\gamma} \cong i_1 - i_2 \quad 1/$$

Se tiene así:

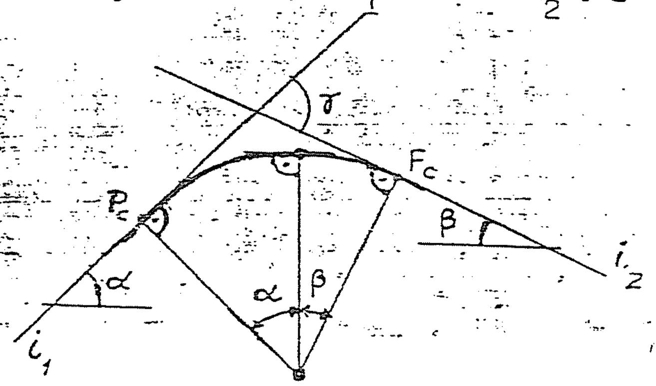
$$L = R_c \cdot \hat{\gamma} \cong R_c \cdot (i_1 - i_2)$$

Si i_1 e i_2 están expresados en %, resulta:

$$L = 0,00223 \cdot D_d^2 \cdot (i_1 - i_2)$$

1/

1) Caso en que $i_1 > 0$ $i_2 < 0$



De la fig. se observa que

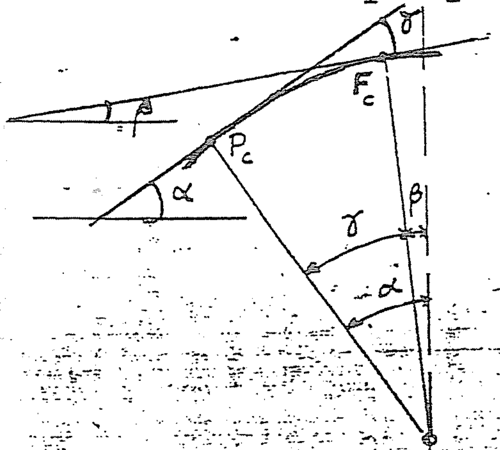
$$\hat{\gamma} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}$$

Como se recordó precedentemente, para ángulos pequeños, el arco resulta aproximadamente igual a la tangen luego:

$$\hat{\gamma} = |i_1| + |i_2| \quad \text{y como} \quad i_1 > 0 \quad e \quad i_2 < 0$$

resulta finalmente $\hat{\gamma} = i_1 - i_2$

2) Caso en que i_1 e $i_2 > 0$



$$\hat{\gamma} = \hat{\alpha} - \hat{\beta}$$

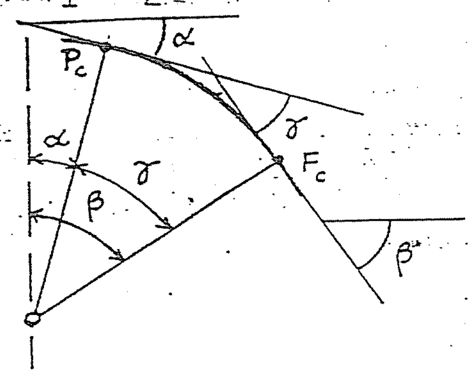
$$\hat{\gamma} = |i_1| - |i_2|$$

Siendo $i_1 > 0$; $i_2 > 0$

Resulta:

$$\hat{\gamma} = i_1 - i_2$$

3) Caso en que i_1 e $i_2 < 0$



$$\hat{\gamma} = \hat{\beta} - \hat{\alpha}$$

$$\hat{\gamma} = |i_2| - |i_1|$$

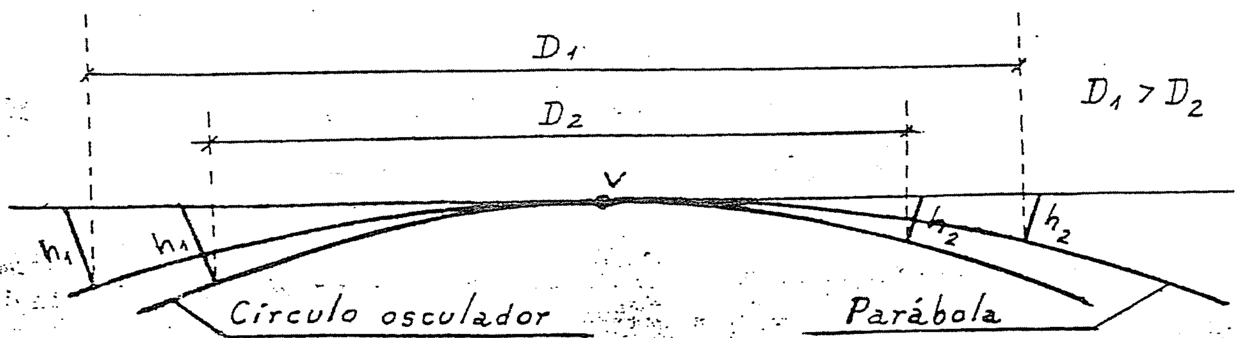
Siendo $i_1 < 0$; $i_2 < 0$

resulta :

$$\hat{\gamma} = i_1 - i_2$$

Habitualmente se adopta como curva vertical una parábola. Si el parámetro de la parábola se iguala al Rc determinado anteriormente, se está del lado de la seguridad.

En este caso la distancia a la que el sujeto puede observar al objeto, en condiciones límite de seguridad, es mayor, como se desprende de la figura



$D_1 > D_2$

El radio del círculo osculador en el vértice es el mínimo radio de curvatura de la parábola. A medida que nos alejamos del eje, el radio de curvatura aumenta, de modo que la parábola resulta más "abierta" que su círculo osculador en el vértice.

Por lo tanto, podemos adoptar:

$$P = R_c = 0{,}223 \cdot D_d^2$$

Tratándose de una parábola convexa $(a < 0)$: $P = - \dfrac{1}{2.a}$

De acuerdo a lo visto: $a = \dfrac{i_2 - i_1}{2.L}$; luego $\dfrac{i_2 - i_1}{2.L} = - \dfrac{1}{2.P}$

De lo anterior surge: $L = (i_1 - i_2) \cdot P$

De lo expuesto se deduce que la expresión: $L = (i_1 - i_2) \cdot P$ es exacta cuando se la refiere a una curva parabólica, siendo "L" la longitud de la proyección horizontal de la curva.

Para pendientes en % : $L = \dfrac{(i_1 - i_2) \cdot P}{100}$

En definitiva resulta:

$$L = 0{,}00223 \cdot D_d^2 \cdot (i_1 - i_2)$$

Es importante señalar, como conclusión, que el parámetro depende sólo de D_d , h_1 y h_2 , mientras que la longitud de la curva, "L", depende además de $i_1 - i_2$.

a_{1-2}) Circulación nocturna

Para el caso de circulación nocturna, si bien el ojo del conductor sigue estando a la altura h_1, es necesario cumplir con una nueva condición.

El obstáculo, para que sea visible, debe ser iluminado por los faros del vehículo.

Se debe cumplir que el rayo luminoso que parte de una altura h'_1 sobre el pavimento, no sea intersecado por la superficie de rodamiento del camino. Como caso límite debe ser tangente a la misma.

Para este caso se calculará el parámetro mínimo "P" con la misma fórmula del punto a_{1-1}, pero con $h'_1 = 0{,}65$ m en lugar de $h_1 = 1{,}10$ m , siendo h'_1 la altura media de los faros del automóvil.

Resulta:

$$P = \frac{D_{d_n}^2}{2\left(\sqrt{0,65} + \sqrt{0,20}\right)^2} = \frac{D_{d_n}^2}{3,1422} = 0,32 . D_{d_n}^2$$

y la longitud:

$$L = 0,0032 \cdot D_{d_n}^2 \, (i_1 - i_2)$$

Donde D_{d_n} es la distancia de detención correspondiente a la circulación nocturna.

Algunos autores consideran que en condiciones de circulación nocturna, la velocidad de circulación es menor que para el caso de circulación diurna, por lo que la distancia de detención calculada con una velocidad menor resulta menor.

Se suele adoptar: $V_{d_n} = 0,9\ V_d$ (V_{d_n}, velocidad directriz de circulación nocturna)

A los parámetros y longitudes así obtenidos se los denomina "MINIMOS ABSOLUTOS".

Sin embargo, extremando condiciones de seguridad y tomando $D_{d_n} = D_d$ y $V_{d_n} = V_d$, hipótesis ésta de gran probabilidad de ocurrencia, se calculan parámetros y longitudes denominados "MINIMOS DESEABLES", para condiciones de circulación nocturna y con la D_d correspondiente a una velocidad de circulación igual a la velocidad directriz (V_d).

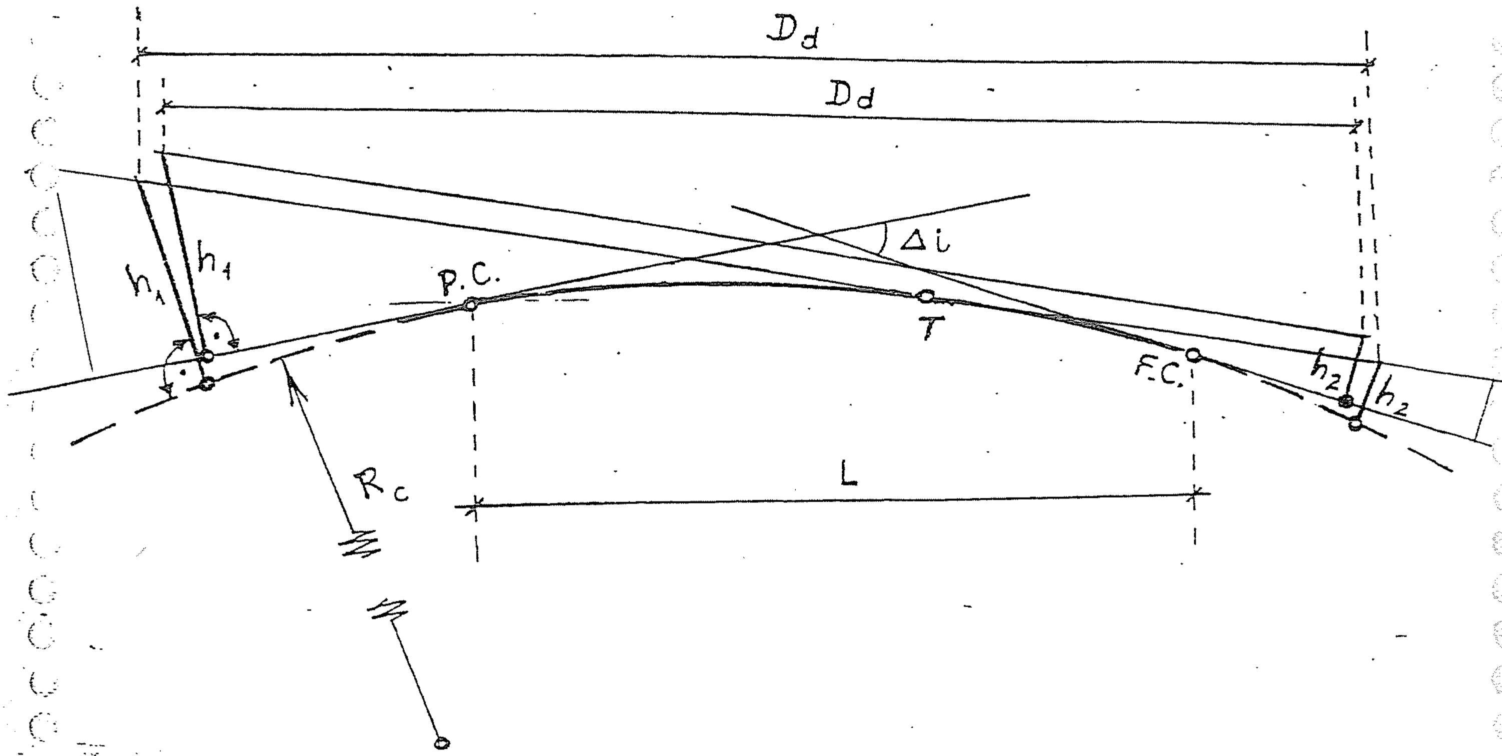
Luego resulta:

$$P = 0,32 \cdot D_d^2$$ Parámetro mínimo deseable

$$L = 0,0032 \cdot D_d^2 \, (i_1 - i_2)$$ Longitud mínima deseable

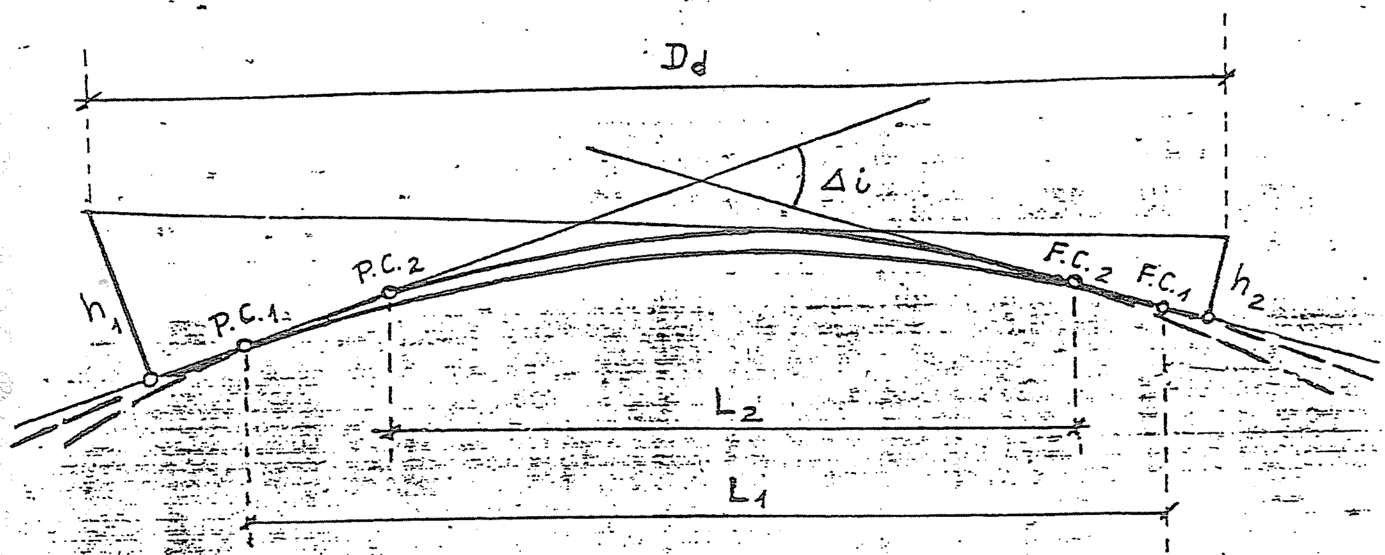
a_{1-3}) Excedente de seguridad.

En la figura siguiente se observa que para el caso en que la distancia de detención fuera mayor que la longitud de la curva resultante, calculada con la hipótesis de $L > D_d$, el grado de seguridad obtenido sería mayor que el correspondiente al caso en que efectivamente $L > D_d$.



En efecto, en la figura se observa lo siguiente:
Por ser $L < D_d$, si el sujeto y el objeto están separados por una distancia D_d ,quedan apoyados sobre los alineamientos rectos.
Si apoyamos h_1 y h_2 sobre la prolongación de la circunferencia de radio R_c calculada para el caso de $L > D_d$,la visual result ía tangente al camino (en el punto T en la figura).
Como en realidad h_1 y h_2 están apoyados sobre los alineamientos recto la visual resulta exterior al camino.

"Si por razones económicas o de otra índole se requiere anular este excedente de seguridad se podrá proyectar una curva de menor radio o parámetro, (Curva 2 en la figura siguiente), como se verá en el pur a_2"



a_{1-4}) Diferencia de pendientes límite

Se tratará de encontrar ahora el valor de $(i_1 - i_2)$ que hace que L resulte igual a D_d. A este valor de diferencia de pendientes se lo denomina: $(i_1 - i_2)_{lím.}$. Para calcular el valor de $(i_i - i_2)_{lím}$ se aplicará el criterio de hacer $L = D_d$, en los siguientes casos:

1) Circulación diurna

Partiendo de: $$L = \frac{i_1 - i_2}{100} \cdot \frac{D_d^2}{2(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2})^2} = \frac{i_1 - i_2}{100} \cdot \frac{D_d^2}{4,476} \;;$$

Haciendo: $L = D_d$, se obtiene: $$D_d = \frac{(i_1 - i_2)_{lím}}{100} \cdot \frac{D_d^2}{2(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2})^2}$$

$$\therefore\ (i_1 - i_2)_{lim.}\% = \frac{2(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2})^2}{D_d} \cdot 100 = \frac{447,6}{D_d}$$

2) Circulación nocturna (mínimo absoluto)

Con un razonamiento análogo, con $h_1' = 0,65m.$ y $h_2 = 0,20m.$, se obtiene:

$$(i_1 - i_2)_{lim.}\% = \frac{314,22}{D_{d_n}}$$

3) Circulación nocturna (mínimo deseable)

$$(i_1 - i_2)_{lim.}\% = \frac{314,22}{D_d}$$

2) Caso en que la longitud de la curva es menor que la distancia de detención

a_{2-1}) Circulación diurna:

Ya se vió en el punto anterior (a_{1-3}), que podrán aplicarse las fórmulas del parámetro o de la longitud de curva mínimos necesarios correspondientes al caso de $L > D_d$, puesto que en esa situación se tiene un exceso de seguridad respecto a la condición de visibilidad fijada.

No obstante, si por razones económicas o de necesidad propia de la ubicación de la rasante se quiere llegar a la situación límite (visual al obstáculo o rayo luminoso del faro al obstáculo tangentes al camino) , la fórmula que corresponde es la que se demostrará a continuación.

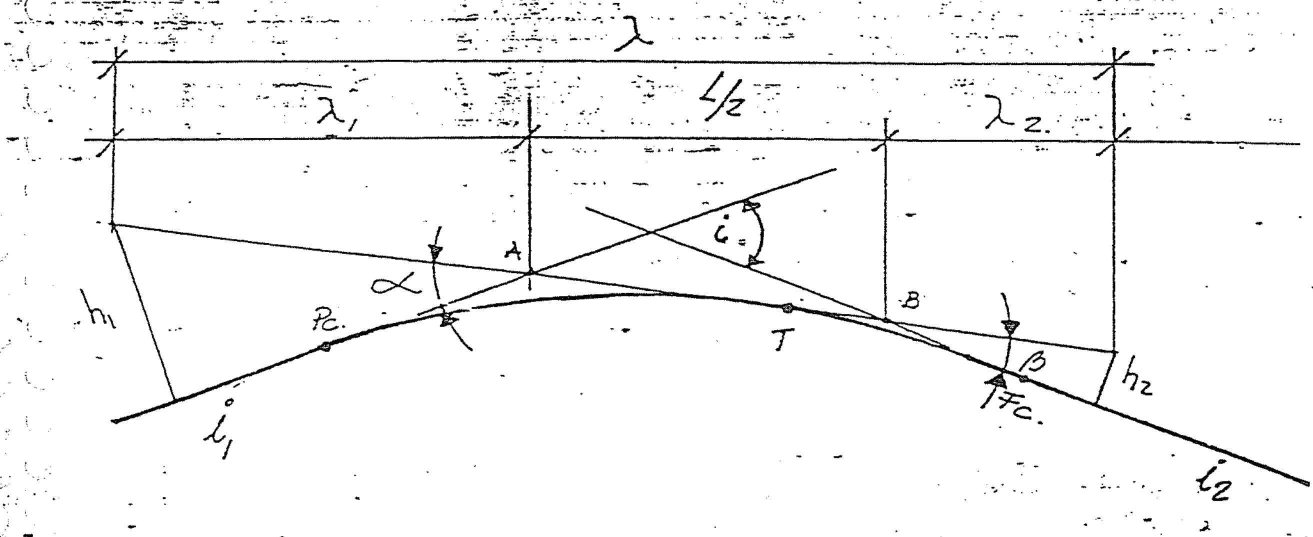
Por ser $L < D_d$, los segmentos normales a la rasante de alturas h_1 y h_2 quedan ubicados en los alineamientos rectos. En este caso se define una nueva variable: el ángulo α que forma el alineamiento recto previo, a la izquierda de punto "Pc" , de pendiente i_1, con la visual tangente a la superficie de rodamiento del camino.

El ángulo β correspondiente al alineamiento de pendiente i_2, a la derecha del punto "Fc" , resulta función de i_1, i_2 y α:

$$\beta = f(\alpha; i_1; i_2)$$

Para conseguir visibilidad, aún para el caso más desfavorable de ubicación del par de segmentos h_1 y h_2, exteriormente al arco de curva circular $\overparen{P_c F_c}$, se tratará de encontrar el ángulo α que produce el mínimo alcance de visión al que llamamos λ, y luego igualando λ con D_d se obtiene el valor de "L" necesario.

Como en el caso anterior se desprecian las diferencias entre arcos de curvas y poligonales circunsciptas y sus respectivas proyecciones horizontales.



ponemos la visual tangente a la superficie de rodamiento del camino, como caso mite de visibilidad. (En la figura designamos T al punto de tangencia).

En la figura : $\overline{AB} = \overline{AT} + \overline{TB}$

Por la propiedad de la tangente a la circunferencia resulta:

$$\overline{AT} = \overline{P_c A} \quad y \quad \overline{TB} = \overline{BF_c}$$

Reemplazando en la expresión anterior, resulta

$$\overline{AB} = \overline{P_c A} + \overline{BF_c}$$

Asimilando la longitud de la poligonal $P_c A B F_c$ a la longitud de la curva resulta

$$\overline{AB} = \frac{L}{2}$$

De la figura resulta: $\lambda = \lambda_1 + \frac{L}{2} + \lambda_2 \quad (1)$

Asimilando los ángulos a las tangentes: $i_1 - i_2 = i = \alpha + \beta$

Por lo tanto: $\beta = i - \alpha$

Por ser : $sen\,\alpha = \frac{h_1}{\lambda_1} \quad \therefore \quad \lambda_1 = \frac{h_1}{sen\,\alpha} \cong \frac{h_1}{\alpha}$

Analogamente: $\lambda_2 = \frac{h_2}{\beta}$

Por lo tanto: $\frac{h_1}{\alpha} + \frac{L}{2} + \frac{h_2}{i-\alpha} = \lambda \quad (2)$

Para conocer el valor de α que hace mínimo el valor de λ , obtenemos la expresión de $\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha}$ y la igualamos a cero

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \alpha} = -\frac{h_1}{\alpha^2} + \frac{h_2}{(i_1-\alpha)^2} = 0 \Rightarrow \frac{h_1}{\alpha^2} = \frac{h_2}{(i_1-\alpha)^2}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{h_1}}{\alpha} = \frac{\sqrt{h_2}}{i-\alpha} \quad ; \quad (i-\alpha)\sqrt{h_1} = \alpha\sqrt{h_2}$$

$$\therefore \quad \alpha = i\left[\frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}}\right]$$

En la fórmula anterior se observa que el valor de α que hace mínimo a λ es independiente de " R y L ".

Reemplazando en (2) y operando

$$\frac{h_1}{i\left[\dfrac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}}\right]} + \frac{L}{2} + \frac{h_2}{i - i\left[\dfrac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}}\right]} = \lambda_{min.}$$

$$\lambda_{min} = \left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}\right)\left[\frac{h_1}{i\sqrt{h_1}} + \frac{h_2}{i\sqrt{h_2}}\right] + \frac{L}{2}$$

$$\lambda_{min} = \left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}\right)\frac{1}{i}\left[\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}\right)\right] + \frac{L}{2}$$

$$\lambda_{min} = \frac{\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}\right)^2}{i} + \frac{L}{2}$$

Igualando $\lambda_{mín}$ con D_d resulta:

$$\underline{D_d = \frac{\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}\right)^2}{i} + \frac{L}{2}}$$

Finalmente resulta:

$$\underline{L = 2D_d - \frac{2\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}\right)^2}{(i_1 - i_2)}}$$

$$\underline{R = \frac{L}{i_1 - i_2} = \frac{2D_d}{i_1 - i_2} - 2\frac{\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}\right)^2}{(i_1 - i_2)^2}}$$

Si en las expresiones anteriores se sustituyen los valores de h_1 y h_2: 1,10 m y 0,20 m respectivamente, se obtiene, para las pendientes expresadas en % :

$$L = 2\,D_d - \frac{447{,}6}{i_1 - i_2}$$

$$P = \frac{200.D_d}{(i_1 - i_2)} - \frac{44.760}{(i_1 - i_2)^2}$$

a$_{2-2}$) Circulación nocturna:

Con la misma hipótesis efectuada en el punto a_{1-2}), es decir $h_1' = 0{,}65$ m y con las distancias de detención D_{d_n} y D_d correspondientes a los criterios de parámetros y longitudes "mínimos absolutos" y "mínimos deseables" respectivamente, según se vio en el mismo punto, resulta, para las pendientes expresadas en porciento:

Mínimos absolutos: $L = 2.D_{d_n} - \dfrac{314{,}22}{i_1 - i_2}$; $P = \dfrac{200.D_{d_n}}{i_1 - i_2} - \dfrac{31.422}{(i_1 - i_2)^2}$

Mínimos deseables: $L = 2.D_d - \dfrac{314{,}22}{i_1 - i_2}$; $P = \dfrac{200.D_d}{i_1 - i_2} - \dfrac{31.422}{(i_1 - i_2)^2}$

3) Consideraciones sobre el valor de $(i_1 - i_2)$

(*) El cálculo previo de $(i_1 - i_2)_{lím.}$ permite saber a priori si estamos en el caso de $L > D_d$ ó $L < D_d$, situaciones que se corresponden con $(i_1-i_2) > (i_1-i_2)_{lím.}$ e $(i_1-i_2) < (i_1-i_2)_{lím.}$ respectivamente, dependiendo $(i_1-i_2)_{lím.}$ sólo del valor de D_d, de h_1 y de h_2.

"Si estamos en el caso de $L > D_d$, sólo podemos utilizar la fórmula correspondiente a este caso, pero si $L < D_d$, podemos usar indistintamente ambas fórmulas, sabiendo que la que corresponde a $L > D_d$ origina un excedente de seguridad".

Definidos D_d, h_1 y h_2, puede ocurrir que para valores de (i_1-i_2) suficientemente pequeños no sea necesaria una curva vertical de empalme entre los alinea-

mientos rectos desde el punto de vista de la visibilidad.
El valor de (i_1-i_2) por debajo del cual esto ocurre, se denomina $i_{\text{mínimo}}$ y se lo calcula igualando a cero la expresión de "L" para el caso de $L < D_d$.

Resulta:

$$(i_1-i_2)_{\text{mín.}} = \frac{(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2})^2}{D_d} = \frac{(i_1-i_2)_{\text{lím.}}}{2}$$

Aplicando las expresiones de "L" o de "P" mínimos necesarios para el caso de $L < D_d$, cuando $(i_1-i_2) < (i_1-i_2)_{\text{mín.}}$, obtendríamos valores negativos.

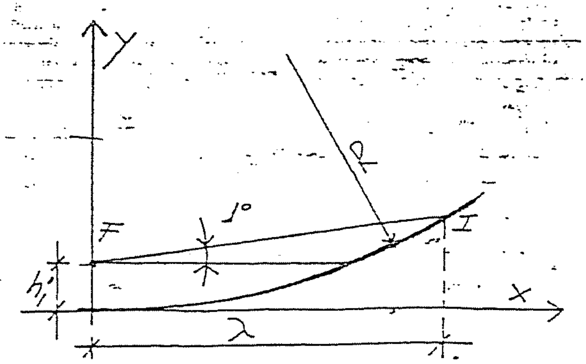
b) FACTOR DE SEGURIDAD DEL TRANSITO EN CURVAS CONCAVAS

La longitud mínima de curvas verticales cóncavas se determina por la condición de visibilidad nocturna, dado que en circulación diurna no se presenta dificultad alguna en cuanto a visibilidad.
Los análisis que siguen se plantearán exclusivamente para el caso de aplicación del criterio de "Mínimo deseable", es decir con D_d calculada con una velocidad igual a la velocidad directriz (V_d). No obstante, las expresiones obtenidas pueden hacerse extensivas al caso del criterio de mínimo absoluto, reemplazando D_d por D_{d_n}, en forma similar a lo desarrollado para curvas convexas en los puntos a_{1-2} y a_{2-2}.

b_1) Cuando la longitud de la curva resulta mayor que la distancia de detención $(L > D_d)$

En este caso el diseño tiene que ser tal, que los faros iluminen a un objeto ubicado a una distancia igual a la de detención.
Suponemos que el haz de rayos forme un ángulo de 1° con respecto a la paralela a la rasante que pasa por los faros. Situamos a los faros a una distancia h'_1 del suelo. (Punto F de la figura)

Consideramos un sistema de ejes vinculado a una posición instantánea del vehículo apoyado sobre la curva que suponemos en principio circular. Tomamos como eje de abscisas, a la recta tangente a la circunferencia en correspondencia con la posición de los faros y como eje de ordenadas el perpendicular al anterior.



Sea "R" el radio de la circunferencia. Vamos a hallar la posición del punto I, que es el más lejano de todos los alcanzados por los rayos luminosos.
Se designa como λ a la proyección según x del segmento $\overline{FI}$.
Determinaremos la posición de "I" como intersección de una recta (la F I), con la circunferencia.

La ecuación de la recta F I es:

$$y = a\,x + b$$

Donde: $a = \text{tg.}1° = 0{,}0175$; $b = h'_1 = 0{,}65\text{m}.$

...tituyendo los valores anteriores en la ecuación, se obtiene:

$$y = 0{,}0175 \cdot x + 0{,}65$$

...nde x e y, se expresan en metros

...ecuación de la circunferencia está dada por: $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$

...bido a que las coordenadas del centro son:

$$\alpha = 0 \qquad \beta = R$$

...esulta:

$$x^2 + (y-R)^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 - 2yR + R^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 - 2yR = 0$$

... en esta ecuación reemplazamos el valor de y por el que se obtiene de la ecuación ... la recta, el valor de "x" será la abscisa de "I". Entonces:

$$x_I^2 + (0{,}0175\, x_I + 0{,}65)^2 - 2\,(0{,}0175\, x_I + 0{,}65)\,R = 0$$

...gualando esta distancia de alcance luminoso ($x_I = \lambda$), con la D_d, obtenemos:

$$D_d^2 + (0{,}0175\, D_d)^2 + (0{,}65)^2 + 2 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}0175\, D_d = R\,(0{,}035\, D_d + 1{,}30)$$

...omo D_d es del órden de 100 a 300m., en el primer miembro el único valor significa...ivo es (D_d^2), por lo tanto se puede simplificar la expresión de la siguiente manera:

$$D_d^2 = R \cdot (0{,}035\, D_d + 1{,}30)$$

$$R_{mín.} = \frac{D_d^2}{0{,}0350\, D_d + 1{,}30}$$

por ser: $L \cong \dfrac{R\,(i_2 - i_1)}{100}$ * (1), para i_1 e i_2 expresados en %

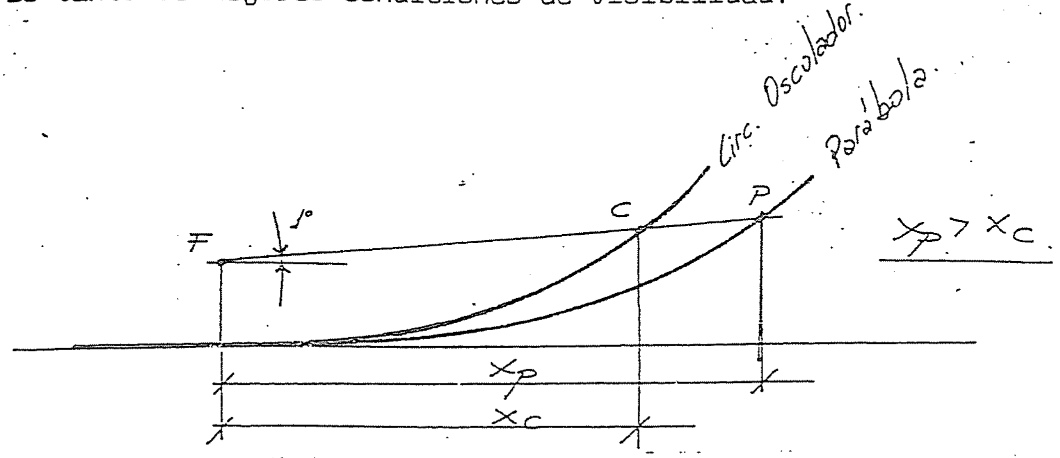
---

* Por ser "L" y "R", cantidades consideradas por naturaleza positivas, lo debe ser también la diferencia de pendientes. Por tal motivo, no se ha tomado $L = R\,(i_1 - i_2)/100$, como en el caso de las parábolas convexas, para las que $(i_1 - i_2)$ es siempre positivo, precisamente porque, a la inversa, en las parábolas cóncavas es $(i_2 - i_1)$ la diferencia que siempre resulta positiva. (Ver casos de las figuras consignadas en IV (Concavidad y convexidad).

Se obtiene finalmente: $L = \dfrac{D_d^2 \cdot (i_2 - i_1)}{3{,}50 \cdot D_d + 130}$

Si como sucede en la práctica, adoptamos una curva parabólica, cuyo parámetro (o sea el radio del círculo osculador en el vértice) sea igual a $R_{mín.}$, nos encontramos del lado de la seguridad y la expresión (1) es exacta en vez de aproximada. (Ver punto a_{1-1})

Al tener la parábola radios de curvatura crecientes a medida que nos alejamos del vértice, la parábola resulta "más abierta " que la circunferencia osculatriz en el vértice y por lo tanto de mejores condiciones de visibilidad.

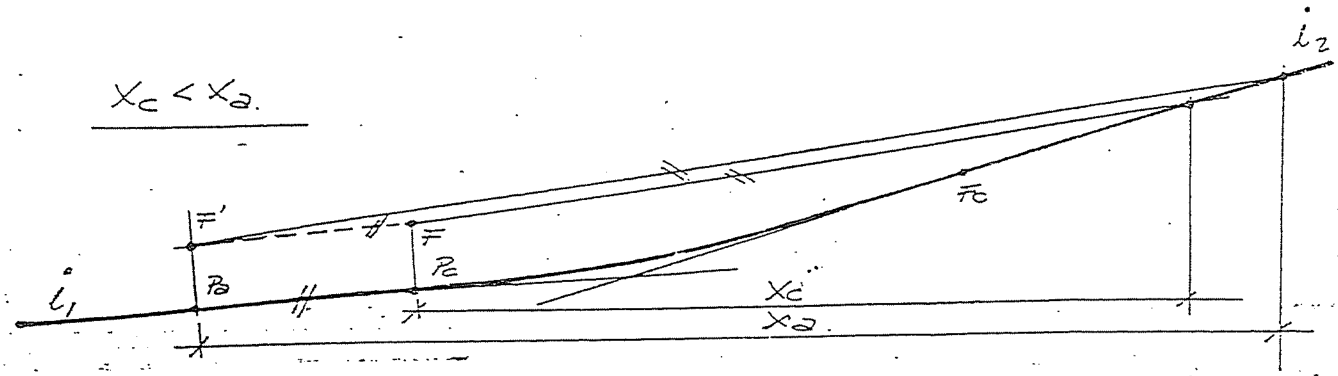


b_2) Cuando la longitud de la curva resulta menor que la distancia de detención ($L<D_d$)

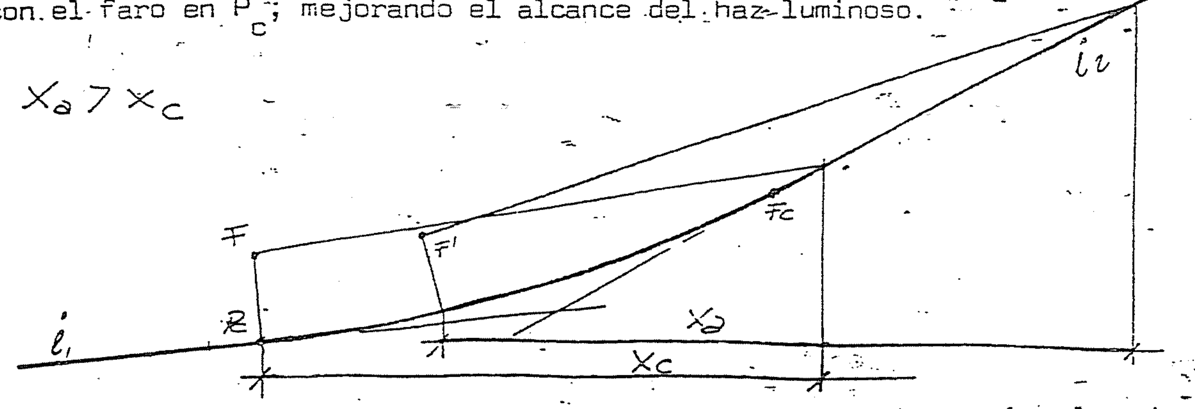
Se hará la determinación de la longitud mínima considerando directamente la utilización de una curva parabólica.

La ubicación más desfavorable del vehículo es la que corresponde a los faros en correspondencia con la iniciación de la curva de transición (punto P_c)

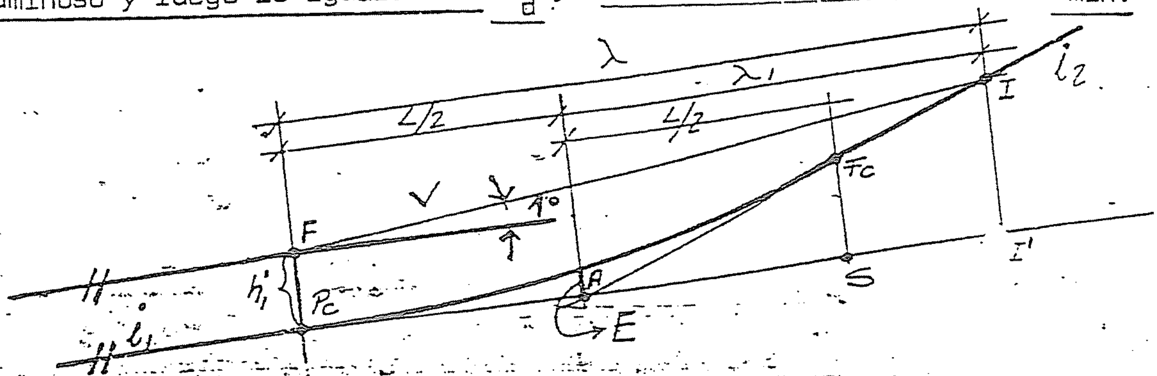
En efecto, toda posición anterior aumenta el alcance de los faros luminosos debido a la inclinación de 1° considerado.



Además teniendo en cuenta que $L<D_d$, el rayo luminoso incidirá obligadamente en el tramo recto de inclinación i_2 y por lo tanto cualquier ubicación del faro sobre un punto de la curva reducirá la diferencia de pendientes (i_1-i_2) que se produce con el faro en P_c; mejorando el alcance del haz luminoso.



Ahora, con el faro sobre "Pc" (posición más desfavorable), calculamos el alcance del haz luminoso y luego lo igualamos a D_d y de este modo encontramos el $L_{mín.}$ necesario.



De la figura se deduce que el alcance de los faros (λ), tiene por expresión

$$\lambda = L/2 + \lambda_1$$

Además, de $\hat{A I I'} \sim \hat{A F_c S}$:

$$\frac{L/2}{4E} = \frac{\lambda_1}{\frac{v\,\lambda}{100} + h_1'} \quad ; \text{ (por ser: } \overline{S F_c} = 4E)^*$$

Donde "v" expresado en %, es la inclinación del haz luminoso con respecto a la tangente a la rasante en correspondencia con el faro "F".
Como ya se dijo, se tomó $v = (\mathrm{tg}.1°).100 = 1,75$

$$\lambda_1 = \frac{\left(\frac{v\,\lambda}{100} + h_1'\right).L}{8.E}$$

Como :

$$E = \frac{(i_2 - i_1)}{100} \; \frac{L}{8}^{*} \quad ; \text{ resulta : } \quad \frac{i_2 - i_1}{100} = \frac{8.E}{L} \; ; \text{ para } i_1, i_2, \text{en } \% :$$

$$\lambda_1 = \frac{100\left(\frac{v\,\lambda}{100} + h_1'\right)}{(i_2 - i_1)} \quad ; \quad \underline{\lambda = \frac{L}{2} + \frac{\left(\frac{v\,\lambda}{100} + h_1'\right).100}{(i_2 - i_1)}}$$

---

* Según se vió: el segmento "E" es el que corresponde al término ax^2, para $x = \frac{L}{2}$ (Ver III, propiedades de las parábolas)

Por lo tanto $\quad E = a\,\frac{L^2}{4} \quad ; \quad$ siendo $\quad a = \frac{i_2 - i_1}{200\,L}$

Luego: $\quad E = \frac{(i_2 - i_1)}{800\,\cancel{L}}\,L^{\cancel{2}} = \frac{(i_2 - i_1)\;L}{800}$

y el segmento FcS que corresponde al término ax^2 para $x = L$, resulta:

$$\overline{F_c\,S} = a\,L^2 = 4\,E$$

Igualando λ a υ_d resulta:

$$L_{min.} = 2\,D_d - \frac{200\left(\frac{v \cdot D_d}{100} + h'_1\right)}{i_2 - i_1}$$

Tomando $h'_1 = 0{,}65m$ y $v = 1{,}75$

Resulta:

$$\underline{L = 2\,D_d - \frac{130 + 3{,}5\,D_d}{i_2 - i_1}}$$

$$\underline{P = \left[\frac{2\,D_d}{(i_2 - i_1)} - \frac{130 + 3{,}5\,D_d}{(i_2 - i_1)^2}\right] \cdot 100}$$

b_3) Diferencia de pendientes límite:

Al igual que en el caso de curvas convexas se tratará de determinar el valor de $(i_2 - i_1)$ que produce un valor de $L_{mín.}$ igual a D_d (en cualquiera de las dos fórmulas):

$\underline{L > D_d}$ $\qquad D_d = \dfrac{D_d^2 \cdot (i_2 - i_1)_{lím}}{3{,}50\,D_d + 130} \qquad \therefore\ (i_2 - i_1)_{lím.} = 3{,}50 + \dfrac{130}{D_d}$

$\underline{L < D_d}$ $\qquad D_d = 2D_d - \dfrac{130 + 3{,}5\,D_d}{(i_2 - i_1)_{lím.}}$ que conduce a

$$\underline{(i_2 - i_1)_{lím.} = 3{,}50 + \frac{130}{D_d}}$$

Luego si $(i_2 - i_1) > (i_2 - i_1)_{lím.}$ estamos en el caso de $L > D_d$

Para $(i_2-i_1) < (i_2-i_1)_{lím.}$ estamos en el caso de $L < D_d$.

Igualando a cero la expresión de $L_{mín.}$, para el caso de $L < D_d$, se obtiene el valor de $(i_2-i_1)_{mín.}$ por debajo del cual no es necesario proyectar curva de transición desde el punto de vista de la visibilidad.

Partiendo de:

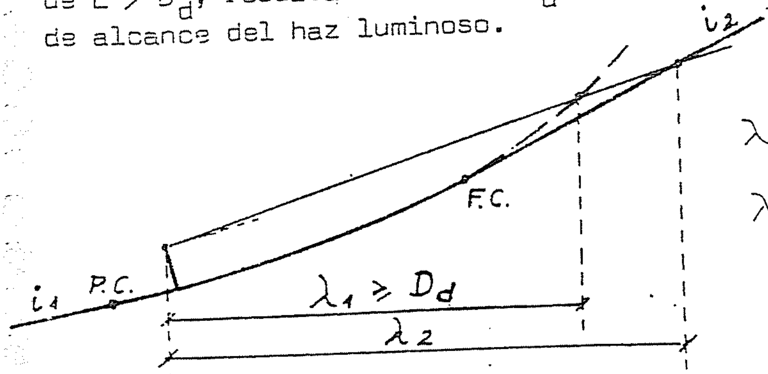
$$0 = 2\,D_d - \frac{130 + 3{,}5\,D_d}{(i_2-i_1)_{mín.}}$$

Resulta:

$$(i_2-i_1)_{mín.} = \frac{130}{2D_d} + \frac{3{,}5}{2} = \frac{(i_2-i_1)_{lím.}}{2}$$

Al igual que para el caso de curvas convexas, si $(i_2-i_1) < (i_2-i_1)_{mín.}$, la aplicación de la fórmula de "L" para el caso de $L < D_d$ produce valores negativos de $L_{mín.}$ los que a su vez conducen a valores negativos de $P_{mín.}$.

Del mismo modo que en curvas convexas, si la longitud "L", calculada en el supuesto de $L > D_d$, resulta menor que D_d, igual puede adoptarse, dado que implica un exceso de alcance del haz luminoso.



λ_1 = alcance para el supuesto de $L \geq D_d$

λ_2 = alcance real

$$\lambda_2 > \lambda_1$$

-) FACTOR DE MOLESTIAS A LOS OCUPANTES DEL VEHICULO PARA CURVAS CONCAVAS Y CONVEXAS

Cuando un vehículo circula por una curva vertical, está sometido a una aceleración radial que afecta el confort de sus ocupantes.

Se considera que en general un valor de $0{,}3 m/seg.^2$ responde con amplitud a las exigencias de la comodidad, tanto para curvas verticales cóncavas como convexas.

Tomamdo una velocidad igual a la velocidad directriz y siendo "R" el rádio de curvatura resulta:

$$a_c = \frac{V_d^2}{R}$$

En el caso de la parábola la situación más exigida se presenta en el vértice, donde el radio de curvatura es el parámetro "P"

$$a_c = \frac{V_d^2}{P} \quad \text{luego} \quad 0{,}3\,m/seg^2 = \frac{V_d^2}{P}$$

Tomando V_d en Km/h , a_c en m/seg^2 , P en metros , i_1 e i_2 en %, resulta:

$$0,3 = \frac{V_d^2}{3,6^2 . P_{mín.}} \qquad \text{luego} \qquad P_{mín.} \cong 0,25\ V_d^2$$

$$L_{mín.} = P_{mín.}\ \left|(i_1 - i_2)\right| \ ; \text{ Para } i_1 \text{ e } i_2 \text{ en \%: } L_{mín.} = 0,0025\ V_d^2 \ . \left|(i_1 - i_2)\right|$$

Los valores de $P_{mín.}$ y $L_{mín.}$ consignados son aplicables tanto a curvas convexas como cóncavas.

d) FACTOR DE APARIENCIA ESTETICA DE LA RASANTE PARA CURVAS CONCAVAS Y CONVEXAS

Desde el punto de vista estético, para evitar que la rasante presente un aspecto no satisfactorio, se ha fijado para las curvas verticales cóncavas y convexas, una longitud mínima que depende de la velocidad directriz (V_d). Para V_d, en km/hora :

$$L_{mín.} = 0,7\ V_d \qquad ; \qquad P = \frac{70.\ V_d}{i_1 - i_2} \qquad (\text{para } i_1 \text{ e } i_2 \text{ en \%})$$

e) FACTOR DE DRENAJE PARA CURVAS CONCAVAS Y CONVEXAS

La condición de drenaje superficial adecuado adquiere importancia, únicamente en el caso poco frecuente, en caminos rurales, de pavimentos con cordón, situados en los puntos en que la tangente a la rasante es horizontal. En este caso, según las normas A.A.S.H.O. de diseño geométrico de caminos rurales, el parámetro máximo sería de 4.350 m.. De ser necesario parámetros mayores, deberá asegurarse un drenaje adecuado en dichos puntos críticos, por ejemplo interrumpiendo o eliminando los cordones.

f) CONSIDERACIONES ACERCA DE LA DISTANCIA DE DETENCION (D_d)

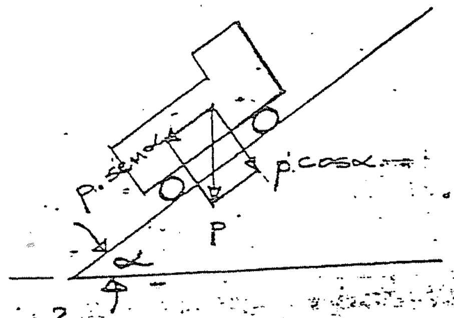
Distancia de detención (impropiamente llamada también distancia de frenado): es la distancia que recorre, sobre una calzada, en condiciones favorables, un vehículo guiado por un conductor de habilidad media, circulando a la velocidad directriz, en condiciones mecánicas aceptables, desde el instante en que observa un obstáculo imprevisto en el camino, hasta el instante en que por la aplicación de los frenos se detiene.

El tiempo de detención, o sea el comprendido entre dichos instantes, se divide en:

1) Tiempo de percepción y reacción: Tiempo transcurrido desde que el conductor divisa el obstáculo hasta que acciona el pedal de frenos (t_p).
La distancia recorrida por el vehículo (d_p), durante el tiempo t_p está dada por: $d_p(m) = V_d . t_p$; $d_p = \frac{V_d}{3,6} . t_p$ (para V_d en Km/h y t_p en seg.).

2) Tiempo de frenado: Tiempo transcurrido desde que se accionan los frenos hasta que el vehículo se detiene.

La distancia que recorre durante el frenado (d_f), se calcula igualando la energía cinética, con el trabajo de las fuerzas para detenerlo.



$$1/2\,.m.V_d^2 = (p.f.\cos\alpha - p.\operatorname{sen}\alpha).d_f$$

Para $\operatorname{sen}\alpha \cong i = tg\alpha$; $\cos\alpha \cong 1$

$$\frac{p.V_d^2}{2.g} = (p.f - p.i).d_f = p.(f - i).d_f$$

$$d_f = \frac{V_d^2}{2.g.(f-i)} = \frac{V_d^2}{2.9{,}81.3{,}6^2} \cdot \frac{1}{f-i}$$

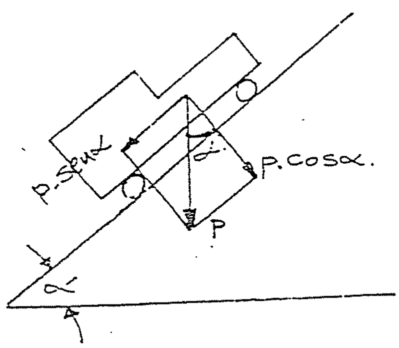
$$\frac{Km^2/h^2 \times \frac{1\times10^6 m^2}{Km^2} \times \frac{1}{(3600)^2}\frac{h^2}{s^2}}{2 \times 9.8}$$

$$d_f = \frac{V_d^2}{254(f-i)}$$

siendo "f" la fricción longitudinal entre ruedas y pavimento.

Para el caso en que se considerara el vehículo ascendiendo

$$1/2.m.V_d^2 = (p.f.\cos\alpha + p.\operatorname{sen}\alpha).d_f$$



resultando

$$d_f = \frac{V_d^2}{254(f+i)}$$

Por lo tanto la distancia de detención está dada por:

$$D_d\ (m) = d_p + d_f = \frac{V_d}{3{,}6} \cdot t_p + \frac{V_d^2}{254(f \pm i)}$$

Para el cálculo de la distancia de detención en caminos rurales no divididos, es conveniente ubicarse en la situación más desfavorable. Por lo tanto se tomará el signo negativo.
En el caso de caminos con calzadas divididas para cada sentido de circulación, podrá tomarse el signo que corresponda a cada caso, lo que originará distancias diferentes para los dos sentidos de circulación.

Los valores de la fricción en sentido longitudinal y del tiempo de percepción y reacción que ha adoptado la Dirección Nacional de Vialidad en sus Normas de Diseño, se consignan en la Tabla VI-1, para el caso de $i_m = 0$; (i_m: pendiente media).

TABLA VI-1

Velocidad Directriz Km / h	Tiempo de percepción y reacción Segundos	Coeficiente de fricción ------	Distancia de detención m
30	2,9	0,54	30,72
40	2,8	0,52	43,22
50	2,7	0,50	57,18
60	2,6	0,48	72,87
70	2,5	0,46	90,54
80	2,4	0,44	110,59
90	2,3	0,42	133,43
100	2,2	0,40	159,55
110	2,1	0,39	186,30
120	2,0	0,37	219,88
130	2,0	0,35	262,32
140	2,0	0,33	311,16

Estos valores de "f", son inferiores a los valores límites consignados por la A.A.S.H.O. para pavimentos en estado seco.

En la Tabla VI-1 puede observarse que el tiempo de percepción y reacción disminuye con el aumento de la velocidad directriz, porque se supone que el conductor del vehículo, con el aumento de la velocidad, aumenta su concentración en la conducción.

Experiencias recientes de la A.A.S.H.T.O. condujeron a los siguientes criterios:

- El tiempo de percepción y reacción debe ser de 2,5 segundos, para todas las velocidades, valor éste que se adopta para el cálculo de la distancia de detención.
  Es de hacer notar que no obstante lo mencionado acerca de la mayor atención que pueden prestar los conductores cuando viajan a altas velocidades, de acuerdo con los resultados de los estudios realizados, la A.A.S.H.T.O. no encuentra justificación alguna para hacer variar este valor de 2,5 segundos para las distintas velocidades directrices, adoptando, en consecuencia, este último valor para el cálculo, cualquiera sea la velocidad directriz del camino que se proyecte.

- Tomar como coeficiente de fricción "f" el valor representativo adoptado para una velocidad inicial del proceso de frenado igual a la velocidad directriz y con condiciones correspondientes a pavimento húmedo.
  Los valores de D_d que se obtienen, para camino horizontal son los que se consignan a continuación, en la Tabla VI-2 y cuya utilización se recomienda desde el punto de vista del notable incremento del grado de seguridad que implica.

TABLA VI-2

Velocidad directriz	Percepción y reacción		Coeficiente de fricción	Distancia de frenado	Distancia de detención
	Tiempo	Distancia			
Km / h	seg.	m	Nº	m	m
30	2,5	20,83	0,41	8,64	29,47
40	2,5	27,78	0,39	16,15	43,93
50	2,5	34,72	0,36	27,34	62,06
60	2,5	41,67	0,35	40,49	82,16
70	2,5	48,61	0,33	58,46	107,07
80	2,5	55,56	0,32	78,74	134,30
90	2,5	62,50	0,31	102,87	165,37
100	2,5	69,44	0,30	131,23	200,67
110	2,5	76,39	0,30	158,79	235,18
120	2,5	83,33	0,29	195,49	278,82
130	2,5	90,28	0,28	237,63	327,91
140	2,5	97,22	0,27	285,80	383,02

Este tema puede verse en detalle en el trabajo: DISTANCIA DE VISIBILIDAD del Ing. Armando García Baldizzone y en las citadas NORMAS DE DISEÑO GEOMETRICO DE CAMINOS RURALES de la Dirección Nacional de Vialidad, por el Ing. Federico G. O. Ruhle. A continuación se efectuarán algunas consideraciones tendientes a adoptar el valor del "i" medio (i_m) que debe utilizarse en el cálculo de D_d, cuando dicha "distancia de detención" se emplea para la determinación de longitudes mínimas de curvas verticales, en caminos rurales de dos carriles con doble sentido de circulación.

a) Siempre debe tomarse con signo negativo, para tener en cuenta la situación más desfavorable. (Frenado con predominio de longitud parcial en descenso).

b) El valor absoluto a tomar, se analiza a continuación:

b_1) Para curvas en que $L < d_f$:* Podría adoptarse el valor absoluto del promedio aritmético de i_1 e i_2 , tomado cada uno con su signo

$$i_m = \left| \frac{i_1 + i_2}{2} \right|$$

Ejemplos:

$i_1 = 4$; $i_2 = -4$; $i_m = 0$ $\quad$ $i_1 = -1$; $i_2 = -5$; $i_m = 3$

$i_1 = 3$; $i_2 = 5$; $i_m = 4$ $\quad$ $i_1 = 4$; $i_2 = 0$; $i_m = 2$

$i_1 = 2$; $i_2 = -6$; $i_m = 2$ $\quad$ $i_1 = 0$; $i_2 = -6$; $i_m = 3$

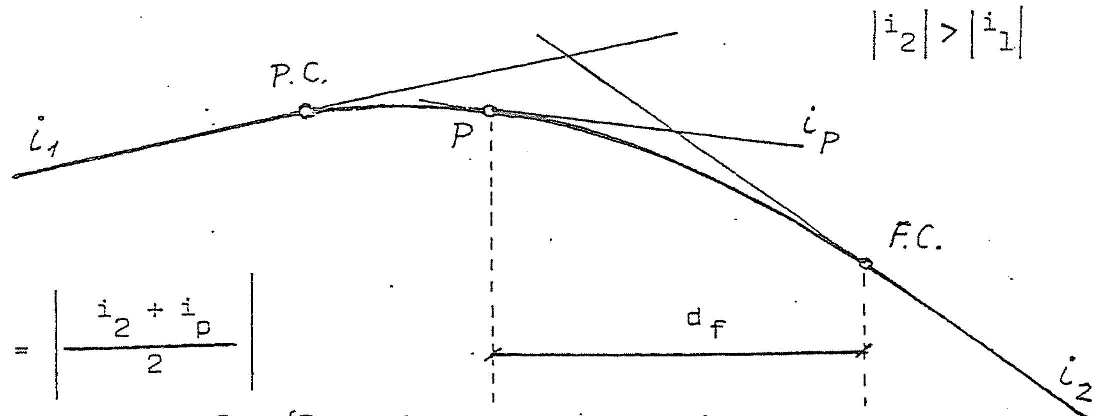
$i_1 = 0$; $i_2 = 2$; $i_m = 1$

*Recordar que $D_d = d_p + d_f$; $d_f = \varphi(i)$; d_p es independiente de i

Esto vale estrictamente para el caso en que los segmentos verticales h_1 y h_2 estén ubicados sobre los alineamientos rectos de pendientes i_1 e i_2 (por ser $L < d_f < D_d$) y a distancias $d_f/2$ del punto medio de la curva.

b_2) Para curvas en que $L > d_f$

Se deberá ubicar un segmento de longitud igual a d_f desde el extremo de curva de mayor valor absoluto de pendiente y luego tomar la i_m correspondiente al tramo de curva que así resulta, según se visualiza en el siguiente ejemplo gráfico.



$$i_m = \left| \frac{i_2 + i_p}{2} \right|$$

Como L depende de D_d, (D_d es la suma de d_p y d_f), y d_f es función del i_m adoptado, se deberá efectuar el consecuente proceso iterativo, partiendo de un valor de i_m supuesto, que podría ser por ejemplo el valor absoluto de la mitad de i_2, verificando luego si con los valores de d_f y L resultantes se cumple que $L > d_f$. Además con el L obtenido hay que determinar la ecuación de la parábola y para la progresiva de P, ubicado a una distancia d_f de F.C. (tener presente que en el ejemplo $|i_2| > |i_1|$), determinar el correspondiente i_p. El valor medio i_m correspondiente al tramo $\overset{\frown}{P\,F.C.}$ debe coincidir con el supuesto. Caso contrario se repetirá la operación partiendo de un valor de i_m más cercano al obtenido en esa primera tentativa.

El proceso iterativo señalado, resulta como se ve muy laborioso y puede dar lugar a varios tanteos.

Por las razones expuestas, se recomienda simplificar el proceso con la aplicación de los criterios que se consignan a continuación, que implican un mayor grado de seguridad, válidos tanto para el caso de i_1 e i_2 de igual signo como para el de signos contrarios.

b_{2-1}) $L > d_f > \frac{L}{2}$

Se adopta:

$$i_m = \frac{\left| i_a + \frac{i_a + i_b}{2} \right|}{2} = \frac{\left| i_a + i_N \right|}{2}$$

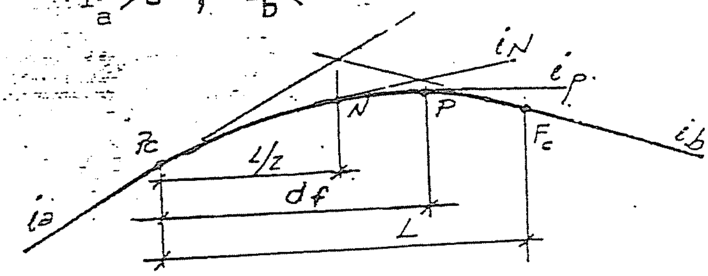
Siendo i_a e i_b las pendientes extremas de mayor y menor valor absoluto respectivamente, e i_N la pendiente en el punto medio (N) de la curva.

Con el valor de i_m señalado, nos encontramos del lado de la seguridad, pues en los cuatro casos posibles, señalados a continuación, se cumple que:

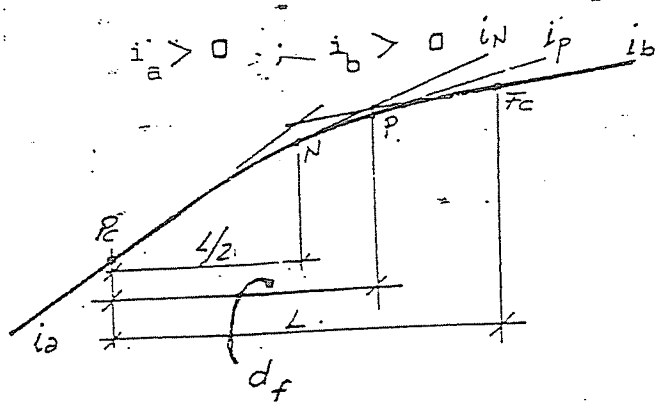
$$\left| i_a + i_N \right| > \left| i_a + i_p \right|$$

Consideramos por lo tanto la i_m de la mitad de la curva más desfavorable, despreciando el segmento de d_f comprendido en la otra mitad.

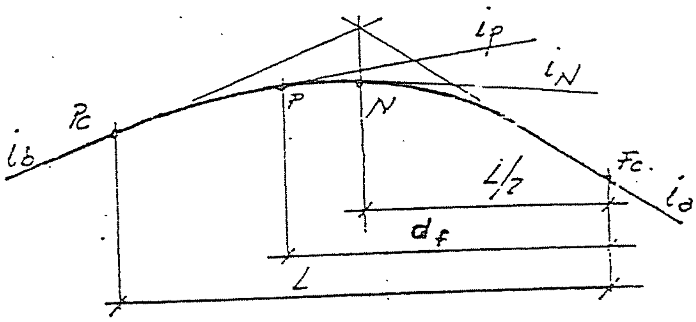
$i_a > 0$; $i_b < 0$



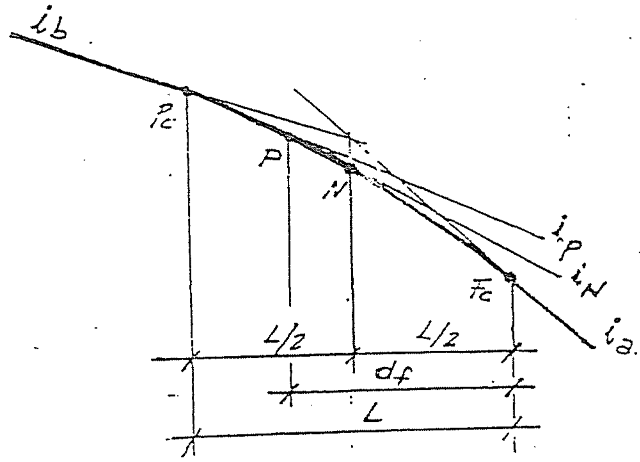
$i_a > 0$; $i_b > 0$



$i_a < 0$; $i_b > 0$



$i_a < 0$; $i_b < 0$



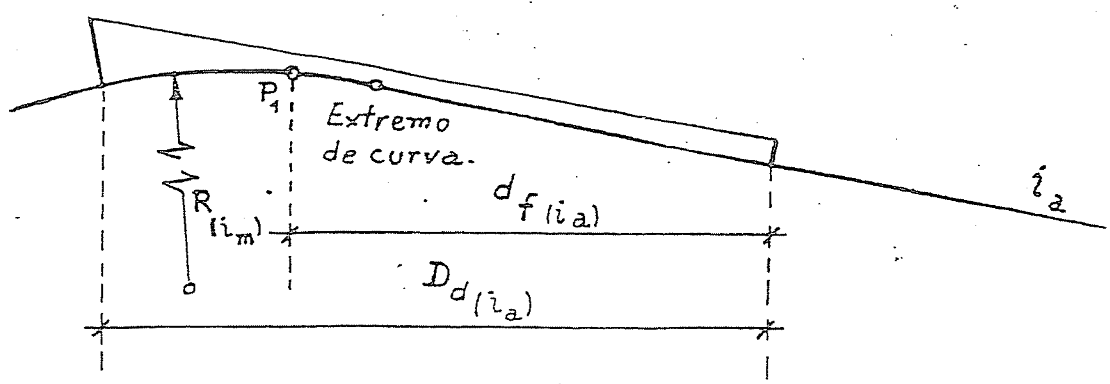
Lo expuesto en b_2) y b_{2-1}) vale estrictamente para el caso en que los extremos del segmento de longitud d_f sean el extremo de la curva adyacente al alineamiento recto de mayor valor absoluto de pendiente (i_a) y un punto de la curva.

No contempla el caso de un extremo del segmento (posición P_1 del vehículo en el momento de oprimirse el pedal de freno) relativamente próximo a dicho extremo de la curva y el otro extremo del segmento (posición del obstáculo) en el alineamiento recto de pendiente i_a, y a una distancia d_f del primero.

En este caso, el valor medio de "i" en el proceso de frenado se hace más próximo a i_a. Luego, los valores de D_d y d_f que se obtienen con dicho valor medio, correspondiente a la situación comentada, son mayores que los obtenidos con:

$$i_m = \frac{\left| i_N + i_a \right|}{2}$$

Pero, en otro sentido, se está en una situación más favorable desde el punto de vista de la visibilidad, ya que se tiene un pequeño tramo curvo vecino a P_1 y una pequeña diferencia de pendientes extremas, como puede verse en la siguiente figura.



b_{2-2}) Caso en que $d_f < \frac{L}{2}$

En este caso, se adoptará la i_m igual al valor absoluto de la pendiente extrema de mayor valor absoluto ($|i_a|$). Dado que se adopta para i_m el máximo valor absoluto posible de "i" en la curva, este criterio nos coloca del lado de la seguridad.

b) Recomendación de carácter general

Por todo lo expuesto, y teniendo en cuenta que:

1) Los casos en que $L < d_f$ corresponden a curvas con bajos valores absolutos de i_1 e i_2 y en los que por lo tanto, el hecho de adoptar como valor de i_m al mayor de los valores absolutos de i_1 e i_2 en lugar del resultante de aplicar el criterio del punto b_1), no produce variaciones de significación en el término:

$$d_f = \frac{V_d^2}{254\ (f - i_m)}$$

2) Los casos en que $L > d_f$, el i_m recomendado es directamente $|i_a|$ (cuando $d_f < \frac{L}{2}$) ó $i_m = \frac{|i_a + i_N|}{2}$ (cuando $L > d_f > \frac{L}{2}$) que a su vez es un valor no muy lejano a $|i_a|$;

podemos efectuar la siguiente recomendación, de carácter general, para la adopción del valor de i_m para el cálculo del término d_f, componente de la fórmula de D_d:

> Adoptar directamente el mayor valor absoluto de las pendientes i_1 e i_2, o sea el valor denominado $|i_a|$ en los análisis precedentes, evitándose los tanteos previos planteados y sabiendo que se está del lado de la seguridad.

La aplicación del criterio implícito en esta recomendación, en caminos de un solo sentido de circulación, conduce a las siguientes reglas:

- Cuando los alineamientos rectos de pendientes i_1 e i_2 son ambos descendentes en el sentido de circulación, o uno descendente y el otro horizontal:

  Proceder al igual que para caminos de dos sentidos de circulación. (Adoptar $i_m = |i_a|$, para restarlo al coeficiente de fricción (f), siendo $|i_a|$ el mayor de los valores absolutos de i_1 e i_2).

- Cuando los alineamientos rectos de pendientes i_1 e i_2, son uno ascendente y el otro descendente en el sentido de circulación:

  Tomar el valor absoluto de "i" del alineamiento descendente y restarlo a "f".

- Cuando los alineamientos rectos de pendientes i_1 e i_2, son uno ascendente y el otro horizontal en el sentido de circulación:

  Tomar $i_m = 0$

- Cuando los alineamientos rectos de pendientes i_1 e i_2, son ambos ascendentes en el sentido de circulación:

  Tomar el menor de los valores absolutos de i_1 e i_2 y sumarlo a f.

No obstante, si la calzada de sentido único de circulación, forma parte de una autopista o de un camino multicarril, junto con la calzada correspondiente al sentido opuesto, y se desea que la altimetría de la rasante sea la misma para ambas, se deberá diseñar a través de la calzada que se encuentre en la situación más desfavorable en cuanto a la distancia de detención (D_d), o sea que se procederá al igual que para calzadas de ambos sentidos de circulación.

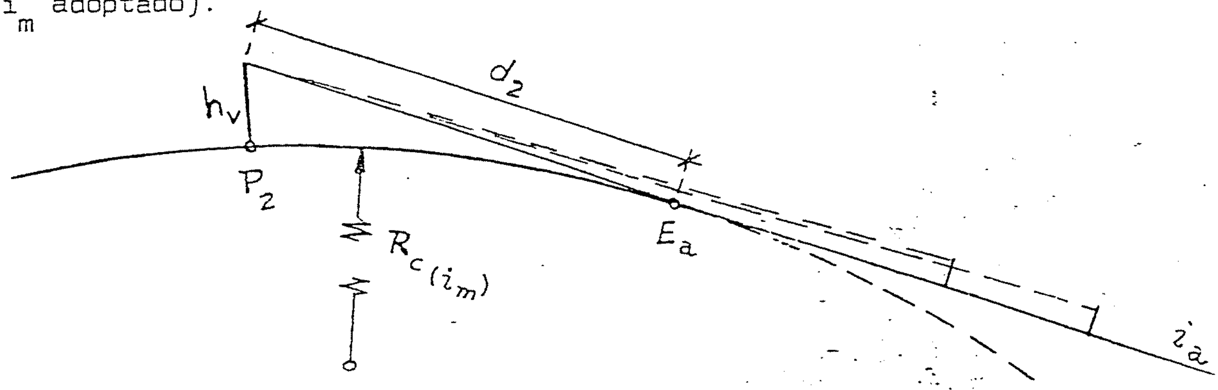
b_4) Consideración especial para los casos en que $L < d_f$ y $L > d_f > \frac{L}{2}$

Si al calcular L con la D_d correspondiente a $i_m = |i_a|$, se cayera en los casos de $L < d_f$ ó $L > d_f > \frac{L}{2}$, y sólo ante exigencias de la rasante o de tipo económico que obliguen a adoptar la mínima longitud de curva que cumpla con los requisitos de seguridad en cuanto a visibilidad, se podrían adoptar los valores de i_m consignados en los párrafos b_1) y b_{2-1}) respectivamente, efectuando una comprobación adicional de visibilidad para la situación planteada en la figura del párrafo b_{2-1}) y comentada en el mismo párrafo, tanto para el caso de $L > d_f > \frac{L}{2}$ como para el de $L < d_f$.

(El análisis acerca de dicha comprobación adicional, se hará sólo para curvas convexas).

Comprobación adicional de visibilidad

Para la curva adoptada, cuyo parámetro $R_{c(i_m)}$ se obtuvo a partir del i_m adoptado, la visibilidad está asegurada hasta una posición del vehículo, ubicado a una distancia: $d_2 = \sqrt{2.R_{c(i_m)} . h_v}$ del extremo (E_a) de la curva adyacente al tramo recto de pendiente i_a, cualquiera sea la posición del obstáculo en dicho tramo recto en que haya que situarlo, para que la distancia entre vehículo y obstáculo sea igual a la D_d que se obtendría con $i_m = i_a$. (donde $R_{c(i_m)}$ es el radio de la curva circular utilizada en la demostración del párrafo V - a_{1-1} e igual al parámetro de la parábola correspondiente al i_m adoptado).



(h_v es igual a h_1 o h'_1 según se considere circulación diurna o nocturna).

Si para la situación del párrafo VI - b_{2-1} ($L > d_f > \frac{L}{2}$), se cumple que $d_2 \geqslant \frac{L}{2}$ ya queda efectuada la verificación adicional.

Para la situación del párrafo VI - b_1 ($L < d_f$), la verificación queda cumplida si $d_2 \geqslant L$.

(Para ambas situaciones L es la longitud obtenida a partir del i_m adoptado. $L = R_{c(i_m)} . |(i_1 - i_2)|$).

Si $d_2 < \frac{L}{2}$ o $d_2 < L$ (párrafos VI - b_{2-1} y VI - b_1, respectivamente) se deberá analizar el alcance de visibilidad y compararlo con la D_d correspondiente al verdadero i_m de la situación analizada.

Si se desprecia el exceso de visibilidad que se produce cuando el obstáculo está apoyado sobre el tramo de pendiente i_a en vez de la prolongación de la curva, la posición más desfavorable corresponde a la posición del vehículo en P_2 de la figura anterior.

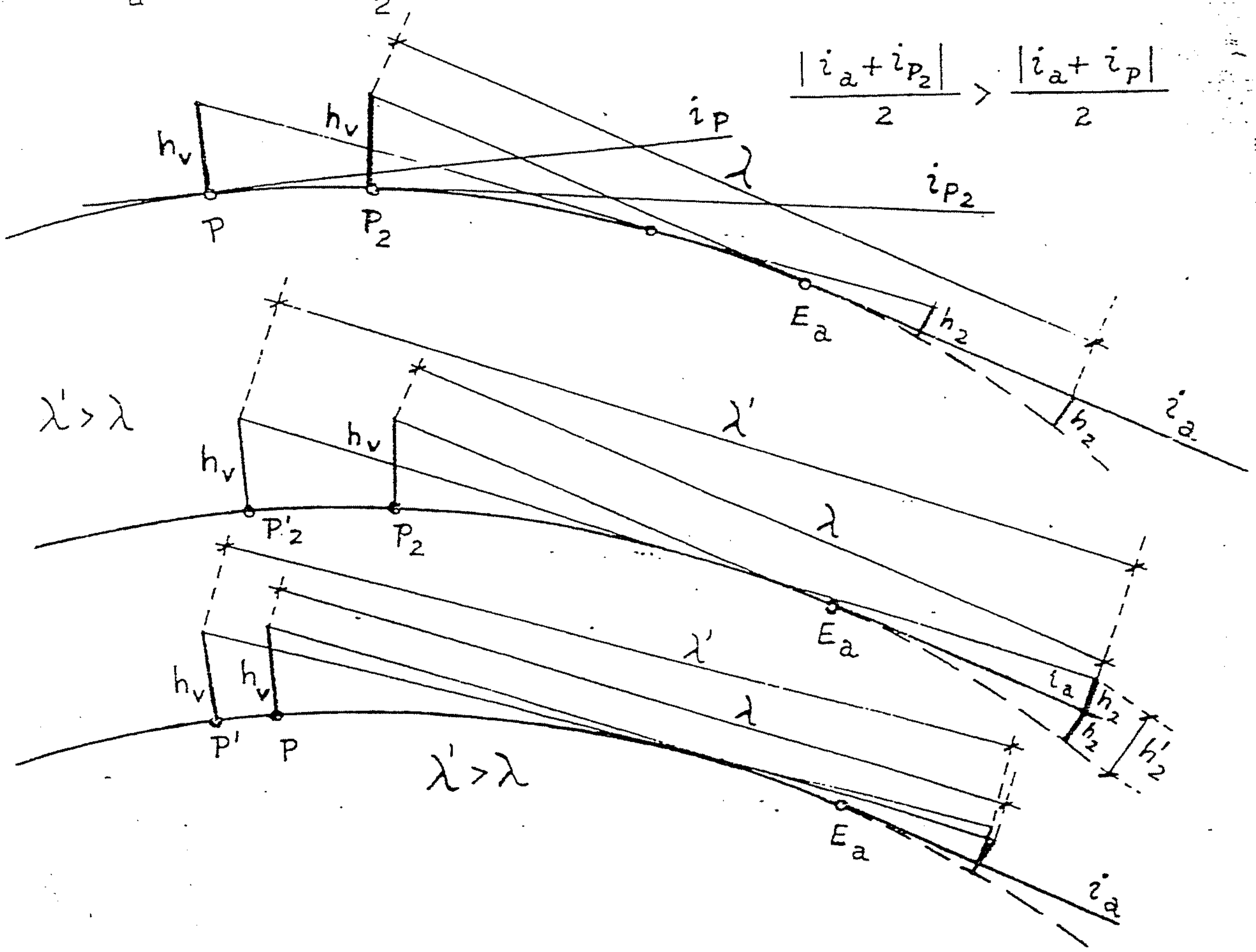
El alcance vale: $\lambda = \sqrt{2\, R_{c_{(i_m)}}} \cdot (\sqrt{h_v} + \sqrt{h_2})$, siendo h_2 la altura del obstáculo.

El verdadero i_m para calcular D_d será: $\dfrac{|i_a + i_{p_2}|}{2}$

Si $\lambda > D_d$ queda cumplida la verificación.

Caso contrario, la última posibilidad de adoptar el i_m adoptado según párrafos VI – b_{2-1} ó VI – b_1, es volver a calcular λ con un $h'_2 > h_2$ que contemple la mayor altura del obstáculo apoyado sobre el tramo recto de pendiente i_a en lugar de la prolongación de la curva circular.

Se deberá probar también con posiciones del vehículo más alejadas que d_2 del punto E_a, cambiando i_{p_2} por el i_p correspondiente para el cálculo de D_d.



Se vuelve a insistir en la Recomendación de carácter general del párrafo VI – b_3, acerca de adoptar directamente el valor i_a como valor de i a utilizar en la fórmula de cálculo de d_f y D_d, dado que después de realizar las laboriosas verificaciones descriptas se comprueba que las reducciones de longitudes de curvas que se logran utilizando los valores i_m consignados en los párrafos VI – b_{2-1} ó VI – b_1 no son significativas.

VII) ADOPCION DE LA LONGITUD DE LA CURVA

Como resumen de todo lo expuesto podemos decir que se consideran tres parámetros mínimos necesarios desde el punto de vista de:

- Adecuada visibilidad
- Comodidad de los ocupantes
- Apariencia estética de la rasante

El mayor valor entre los tres parámetros mínimos es el que se adopta.
La longitud de la curva parabólica, se obtiene simplemente multiplicando dicho parámetro adoptado por la diferencia de pendientes (i_1-i_2) para curvas convexas y por (i_2-i_1) para cóncavas, o sea multiplicando por $|(i_1-i_2)|$ para ambos casos.

Para valores importantes de $|(i_1-i_2)|$, el parámetro quedará definido por la condición de adecuada visibilidad, pero para valores suficientemente pequeños de $|(i_1-i_2)|$, serán las otras condiciones las que definan el valor del parámetro de diseño.

Para el caso de condición de visibilidad, la comparación de $|(i_1-i_2)|$ de proyecto con $(i_1-i_2)_{lím.}$ y con $(i_1-i_2)_{mín.}$ definidos en los puntos a_{1-4}, a_3 y b_3 del Capítulo V, permite saber con anticipación, si estamos en el caso de $L > D_d$ ó $L < D_d$ ó en el caso en el que, por condición de visibilidad, no sería necesaria una curva vertical.

En caso de adoptarse el criterio de mínimos absolutos para parámetro y longitud, deberán tenerse presente dos situaciones separadamente:

- Circulación diurna:

  V = Velocidad directriz (V_d).
  $h_1 = 1{,}10$ m.
  $h_2 = 0{,}20$ m.

- Circulación nocturna:

  V_1 = Velocidad menor que V_d, (en general: $0{,}9\ V_d$).
  $h_1' = 0{,}65$ m.
  $h_2 = 0{,}20$ m.

Se recomienda por razones de seguridad y de mejor calidad de diseño, la adopción del criterio de CONDICION DESEABLE.

- Condición deseable:

  $V = V_d$
  $h_1' = 0{,}65$ m.
  $h_2 = 0{,}20$ m.

Se analizará a continuación, en un ejemplo que corresponde a curva convexa, la influencia de los diferentes factores a tener en cuenta (Comodidad, Apariencia estética, Seguridad), y su importancia relativa, en la determinación del parámetro mínimo deseable de una curva vertical.

El ejemplo se desarrollará tomando los valores del coeficiente de fricción y del tiempo de percepción y reacción de las Normas de Diseño de la Dirección Nacional de Vialidad (Tabla VI - 1).

Para realizar el análisis, se ha adoptado una hipótesis simplificativa. Se supuso una pendiente media (i_m) igual a cero, lo que permite determinar la distancia de detención (D_d) teniendo como única variable la velocidad directriz.

En este ejemplo se ha fijado una velocidad directriz (V_d) igual a 100 Km/h, resultando, de acuerdo con los valores de la Tabla VI - 1 citada:

$$D_d = 159{,}55 \text{ m.}$$

Los parámetros mínimos según los diferentes factores se calcularán mediante las siguientes expresiones:

a) Según Apariencia estética:

$$P = \frac{70.V_d}{i_1-i_2} = \frac{7.000}{i_1-i_2}$$

b) Según Comodidad de los ocupantes:

$$P = 0{,}25 \cdot V_d^2 = 2.500$$

c) Según Seguridad desde el punto de vista de la visibilidad:

Para $L > D_d$: $$P = 0{,}32 \cdot D_d^2$$

Para $L < D_d$: $$P = \frac{200.D_d}{i_1-i_2} - \frac{31.422}{(i_1-i_2)^2}$$

$$(i_1-i_2)_{\text{lím.}} = \frac{314{,}22}{D_d} = 2 \cdot (i_1-i_2)_{\text{mín.}}$$

Por aplicación de dichas fórmulas se obtuvieron los parámetros mínimos, según cada criterio, para una gama de valores de i_1-i_2 que oscila entre 0,7 y 10 %.

Los respectivos valores pueden verse en el siguiente cuadro:

	Diferencias de pendientes $(i_1 - i_2)$ (%)	Estética (m)	Comodidad (m)	Seguridad (m)
$L > D_d$	10	700	2.500	8.146
	5	1.400	"	"
$(i_1-i_2)_{lím.}$ =	1,968	3.557	"	"
$L < D_d$	1,7	4.118	"	7.898
	1,47	4.762	"	7.166
	1,38	5.072	"	6.623
	1,262	5.547	"	5.556
	1,05	6.667	"	1.890
$(i_1-i_2)_{mín.}$ =	0,984	7.114	"	0
	0,88	7.955	2.500	-4.314
	0,70	10.000	"	-18.540

Del análisis del cuadro anterior se desprende:

a) El parámetro mínimo de curva vertical a proyectarse teniendo presente la estética es inversamente proporcional a (i_1-i_2).

b) El parámetro mínimo según comodidad es independiente de (i_1-i_2).

c) El parámetro mínimo por seguridad es constante para valores de $(i_1-i_2) > (i_1-i_2)_{lím.}$ correspondiente a $L > D_d$ ..

d) Para el caso de (i_1-i_2) comprendido entre $(i_1-i_2)_{mín.}$ y $(i_1-i_2)_{lím.}$ estamos en la situación en que $L < D_d$ y los parámetros i[illegible]crecientes con la disminución de (i_1-i_2), cuando consideramos [illegible]tor seguridad.

En el cuadro se ha subrayado el mayor valor de parámetro necesario correspondiente a cada valor de (i_1-i_2) considerado.
Con dichos valores se ha confeccionado el cuadro siguiente, donde los parámetros mínimos necesarios que surgen de la columna de apariencia estética, se ubican en la columna de la izquierda, en forma creciente de arriba hacia abajo.

Los de la columna de la derecha, ordenados de la misma manera, se extrajeron de la columna de seguridad del cuadro anterior.

En las columnas centrales se consignan los valores correspondientes de (i_1-i_2).

Se observa que en la columna central izquierda los valores de (i_1-i_2) crecen a medida que se asciende y a la inversa, los de la columna central derecha, crecen al descender. A partir del valor de $(i_1-i_2)_{lím.}$, (1,968% en este ejemplo), los parámetros, por lo explicado en b), no se modifican más, ya que a partir de este valor de (i_1-i_2) se ingresa en el conjunto de curvas, para las cuales $L > D_d$.

Se nota además que a partir del valor de diferencias de pendientes 1,262% , que iguala aproximadamente las expresiones:

$$\frac{7.000}{(i_1-i_2)} \quad y \quad \frac{200.D_d}{(i_1-i_2)} - \frac{31.422}{(i_1-i_2)^2}$$

comienza a pesar el factor seguridad.

Parámetro (m)	(i_1-i_2) (%)	(i_1-i_2) (%)	Parámetro (m)
	⟸	⟹	
5.547	1,262	1,262	5.556
6.667	1,05	1,38	6.623
7.114	0,984	1,47	7.166
7.955	0,88	1,7	7.898
10.000	0,70	1,966	8.146
		>1,968	8.146

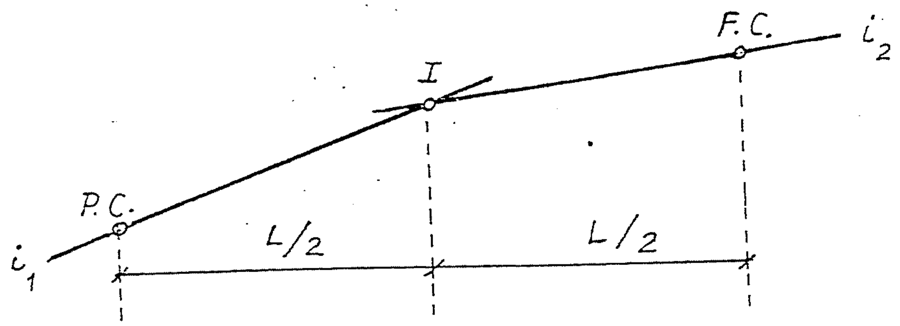
Aplicando este procedimiento para todas las velocidades directrices de diseño, y resumiéndolo en un solo cuadro, se obtendría la configuración de las tablas Nº 9 y 10 , de las NORMAS DE DISEÑO GEOMETRICO DE CAMINOS RURALES de la Dirección Nacional de Vialidad, preparadas por el Ingeniero Federico G. O. Ruhle.

VIII) REPLANTEO DE CURVAS VERTICALES

a) REPLANTEO DE CURVAS VERTICALES CONTENIDAS EN UN PLANO VERTICAL

a_1) Ubicación de la curva

Una vez determinada la longitud de la curva (L) de acuerdo con el procedimiento descripto, se llevará la mitad de L (medida en horizontal) a ambos lados del punto de intersección de las tangentes extremas (I), obteniéndose de este modo la ubicación del principio de curva (P.C.) y del fin de curva (F.C.). (Ver III– Propiedades de la parábola)



a_2) Progresivas y cotas de P.C. y F.C.

De la figura anterior surge que:

$$\text{Prog. P.C.} = \text{Prog. I} - \frac{L}{2}$$

$$\text{Prog. F.C.} = \text{Prog. I} + \frac{L}{2}$$

$$\text{Cota P.C.} = \text{Cota I} - \frac{L}{2} \cdot \frac{i_1}{100}$$

$$\text{Cota F.C.} = \text{Cota I} + \frac{L}{2} \cdot \frac{i_2}{100}$$

donde i_1 e i_2 se expresan en % y deben ser considerados con sus signos.

a_3) Ecuación de la parábola, referida al sistema de ejes con origen en P.C.

Como se vió en II (Ecuaciones y generalidades sobre la parábola), la ecuación de una parábola de eje vertical de la forma: $a\,x^2 + b\,x + c$, cuando el origen de coordenadas coincide con P_1 (en este caso con el P.C.), es:

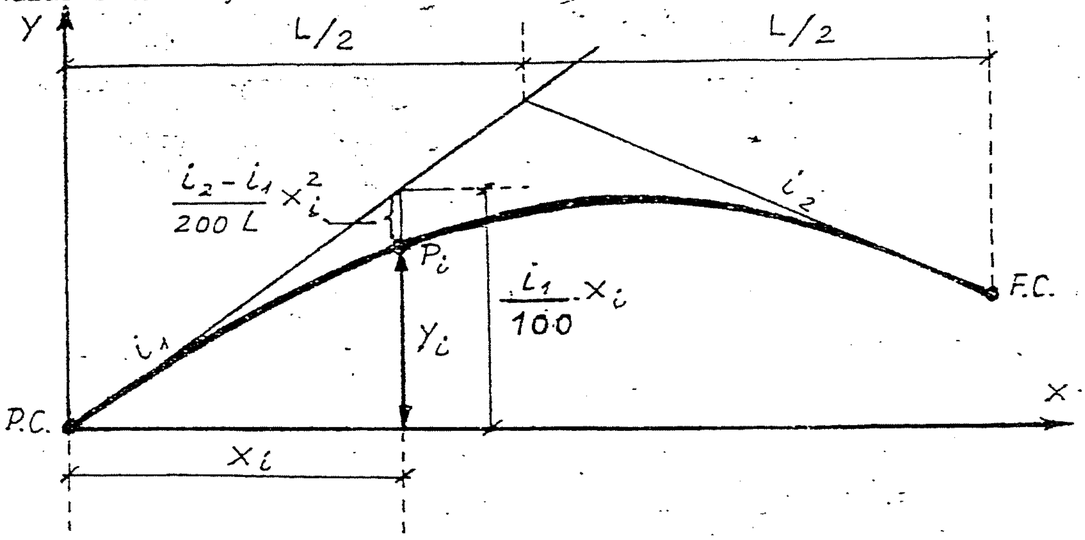
$$y = \frac{i_2 - i_1}{200\,L}\,x^2 + \frac{i_1}{100}\,x \quad ; \text{(para } i_1 \text{ e } i_2 \text{ en \%)}$$

donde: $a = \dfrac{i_2 - i_1}{200\,L}$; $b = \dfrac{i_1}{100}$

Estas expresiones deducidas de otras de carácter más general podrían haberse determinado directamente igualando la expresión de $\dfrac{dy}{dx}$

(o sea: $2\,a\,x + b$), al valor $i_1/100$, para $x = 0$, y al valor $i_2/100$ para $x = L$, como figura en la mayor parte de la bibliografía sobre el tema.

Estas expresiones permiten construir la parábola entre P.C. y F.C. calculando el valor de "y" que corresponde a cada valor de "x" comprendido entre 0 y L.

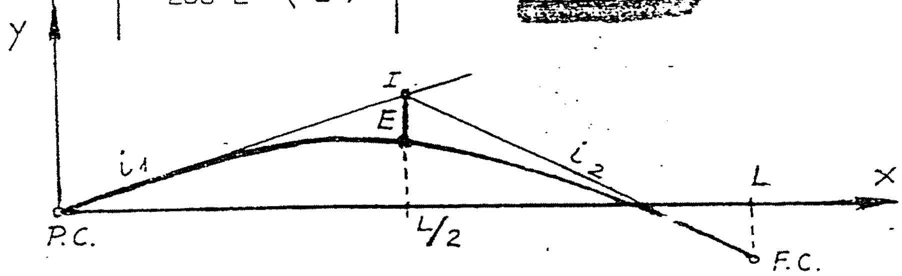


a_4) Valor de la Externa

Se llama "externa" de un arco de curva parabólica de eje vertical, al segmento de recta vertical cuyos extremos son el punto de intersección de las tangentes extremas del arco y un punto del mismo.

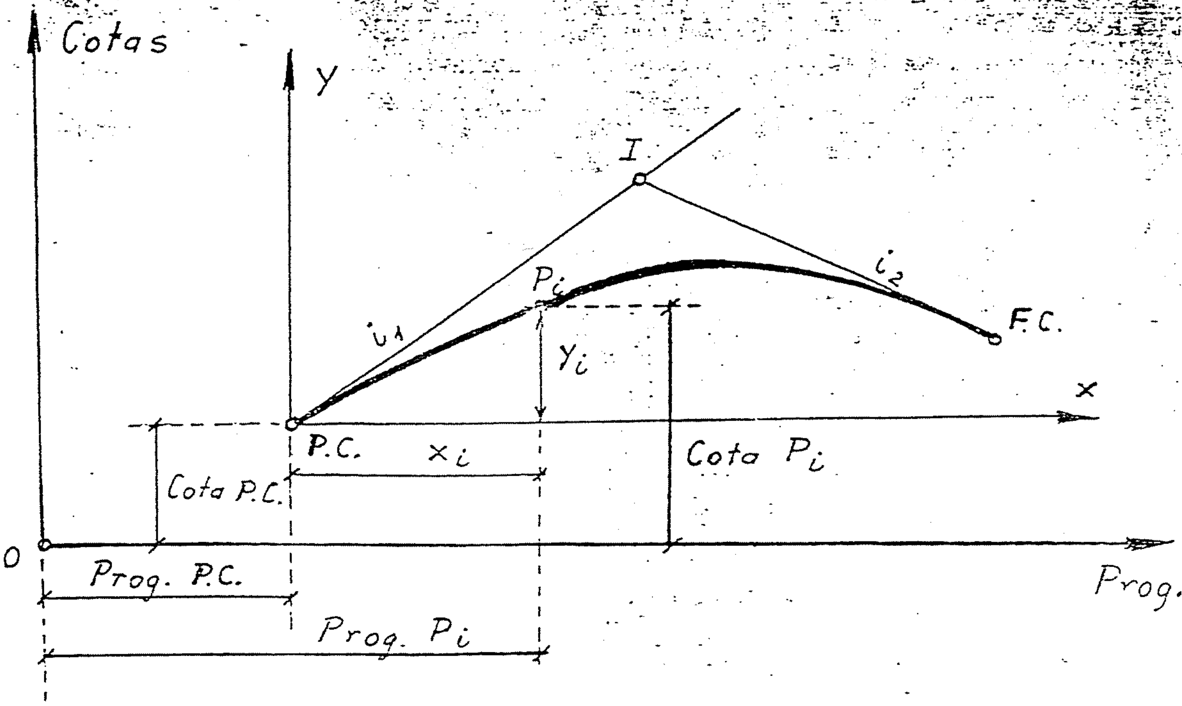
El valor de la externa de un arco de curva de longitud L (en su proyección horizontal), coincide con el valor absoluto del término $a\,x^2$; para $x = L/2$, tal como se vio en III (Propiedades de la parábola).

$$\therefore \quad E = \left| - \frac{i_1 - i_2}{200\ L} \left(\frac{L}{2}\right)^2 \right| = \frac{|i_1 - i_2|\ L}{800}$$



a_5) Replanteo de la parábola con relación al sistema de referencia general de la rasante

Para pasar del sistema de ejes con centro en P.C. al sistema de referencia general de la rasante, o sea, para determinar las progresivas y cotas de cada punto de la curva, basta con sumar a cada abscisa, la progresiva del P.C. y a cada ordenada, la cota del P.C., como puede verse en la figura.



$$\text{Prog. } P_i = \text{Prog. P.C.} + x_i$$

$$\text{Cota } P_i = \text{Cota P.C.} + y_i$$

a_6) Determinación del vértice de la parábola

El vértice de una parábola, es el punto de máxima curvatura y pertenece al eje de simetría. El radio de curvatura en el vértice coincide con el parámetro.

Si la parábola es de eje vertical, la tangente en el vértice es horizontal y en el vértice tenemos un máximo o un mínimo de la curva.

Podemos detrminar la ubicación del vértice, igualando la derivada de $y = f(x)$ a cero y haciendo $x = x_v$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{i_1}{100} - \frac{i_1 - i_2}{100\ L}\ x$$

luego, de la expresión:

$$\frac{i_1}{100} - \frac{i_1 - i_2}{100\ L} \cdot x_v = 0$$

resulta:

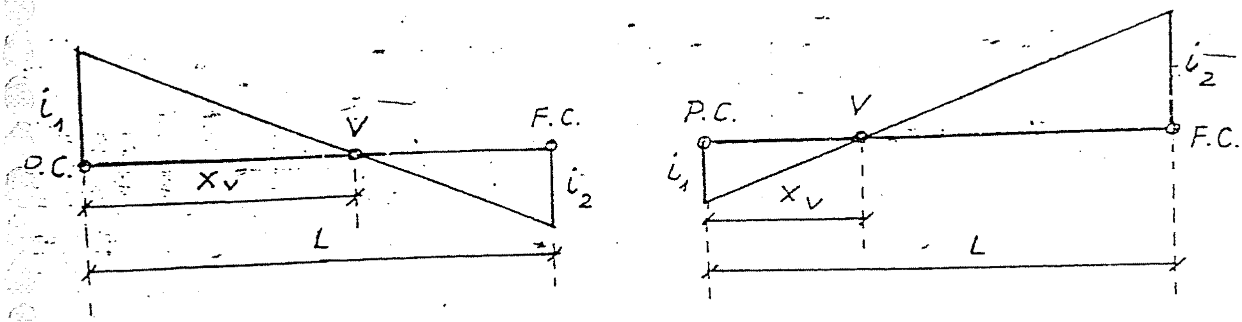
$$x_v = L \cdot \frac{i_1}{i_1 - i_2}$$

Reemplazando x_v en la ecuación de la parábola, se obtiene y_v.

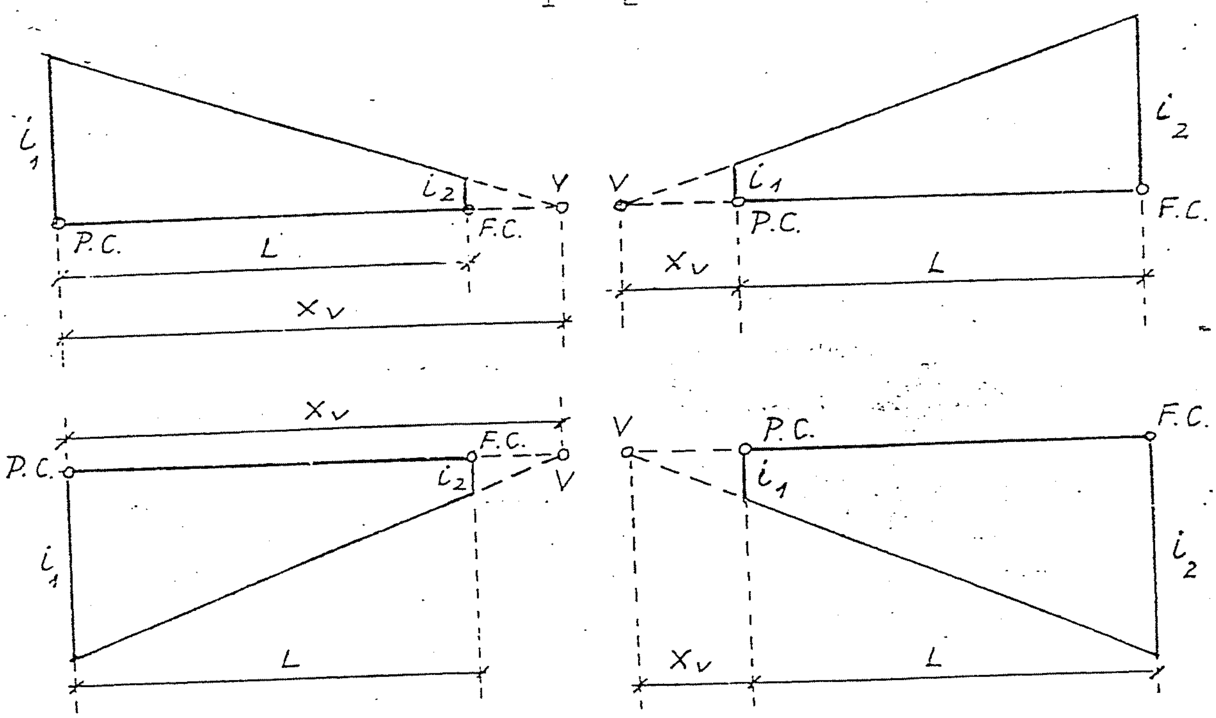
También se puede determinar gráficamente la posición del vértice, teniendo presente que la inclinación de las tangentes a la curva varía en forma lineal entre i_1 e i_2.

Esto es así, pues la inclinación de las tangentes está representada por la derivada de $y = f(x)$, y por tratarse de una función cuadrática, la derivada es una función de primer grado.

Casos en que i_1 e i_2 son de distinto signo



Caso en que i_1 e i_2 son del mismo signo



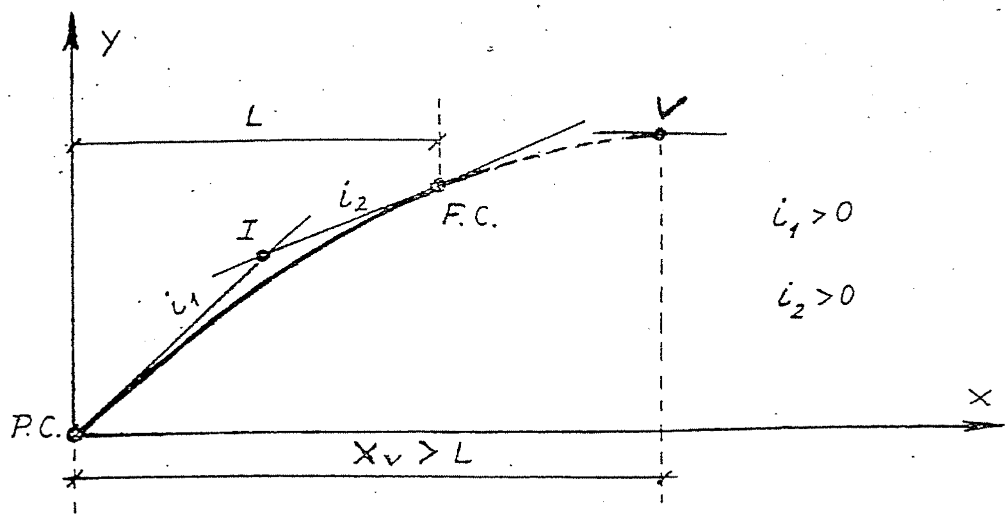
En concordancia con lo observado en las figuras, se verifica que si "i_1" e "i_2" son de distinto signo, siempre se cumple que:

$$0 < \frac{i_1}{i_1 - i_2} < 1$$

con lo que resulta: $0 < x_V < L$, lo que significa que el vértice está ubicado en el arco de curva comprendido entre P.C. y F.C.

En cambio, si x_V resulta mayor que L, o menor que 0, significa que el vértice está ubicado fuera del arco de parábola utilizado, o sea, fuera del arco comprendido entre P.C. y F.C.

Eso ocurre cuando i_1 e i_2 son del mismo signo, como puede verse en el caso de la figura siguiente:



b) REPLANTEO PARA CASOS DE CURVAS VERTICALES QUE SE DESARROLLAN EN CORRESPONDENCIA CON CURVAS HORIZONTALES

Este caso no fue tratado en el presente trabajo, en primer lugar porque se trata de una situación no deseable que se recomienda evitar en lo posible, y en segundo lugar, porque se trata de un caso que exige un cuidadoso proceso de verificaciones, excediendo los alcances fijados para la presente publicación.

No obstante, podría decirse que los procedimientos vistos pueden aplicarse al perfil longitudinal del eje del camino en una primera tentativa, con las variaciones que corresponda introducir a los bordes interno y externo en razón de la transición de peralte correspondiente a la curva horizontal. Esto exige verificaciones posteriores en cuanto a visibilidad, conformación de la superficie de rodamiento y posibilidades de deslizamiento o vuelco.

En la actualidad dichas verificaciones se ven facilitadas por el empleo de programas de computación que además permiten la confección rápida de perfiles transversales consecutivos que brindan una visión en perspectiva de los diseños tentativos analizados.

) RESUMEN DE FORMULAS DE APLICACION

a) Longitudes y parámetros mínimos necesarios, según criterio de seguridad

Curvas convexas

- **Criterio de mínimo absoluto**
  - **Circulación diurna**: $V = V_d$; $h_1 = 1{,}10\,m$; $h_2 = 0{,}20\,m$
    - $L > D_d$:
      - $P = 0{,}223\,D_d^2$
      - $L = 0{,}00223\,D_d^2\,(i_1 - i_2)$
    - $L < D_d$:
      - $P = \dfrac{200\,D_d}{i_1 - i_2} - \dfrac{44.760}{(i_1 - i_2)^2}$
      - $L = 2\,D_d - \dfrac{447{,}6}{i_1 - i_2}$
  - **Circulación nocturna**: $V = V_{d_n} < V_d$; $h'_1 = 0{,}65\,m$; $h_2 = 0{,}20\,m$
    - $L > D_d$:
      - $P = 0{,}32\,D_{d_n}^2$
      - $L = 0{,}0032\,D_{d_n}^2\,(i_1 - i_2)$
    - $L < D_d$:
      - $P = \dfrac{200\,D_{d_n}}{i_1 - i_2} - \dfrac{31.422}{(i_1 - i_2)^2}$
      - $L = 2\,D_{d_n} - \dfrac{314{,}22}{i_1 - i_2}$
- **Criterio de mínimo deseable (Circulación nocturna)**: $V = V_d$; $h'_1 = 0{,}65\,m$; $h_2 = 0{,}20\,m$
  - $L > D_d$:
    - $P = 0{,}32\,D_d^2$
    - $L = 0{,}0032\,D_d^2\,(i_1 - i_2)$
  - $L < D_d$:
    - $P = \dfrac{200\,D_d}{i_1 - i_2} - \dfrac{31.422}{(i_1 - i_2)^2}$
    - $L = 2\,D_d - \dfrac{314{,}22}{(i_1 - i_2)}$

  RECOMENDADO

Curvas Cóncavas

(Circulación nocturna)

$h'_1 = 0,65 m$

- Criterio de Mínimo Absoluto

  $V = V_{d_n} < V_d$

  - $L < D_{d_n}$

    $$P = \left[\frac{2 D_{d_n}}{(i_2 - i_1)} - \frac{130 + 3,5 D_{d_n}}{(i_2 - i_1)^2} \right] . 100$$

    $$L = 2 D_{d_n} - \frac{130 + 3,5 D_{d_n}}{i_2 - i_1}$$

  - $L > D_{d_n}$

    $$P = \frac{D_{d_n}^2}{0,035 D_{d_n} + 1,30}$$

    $$L = \frac{D_{d_n}^2 (i_2 - i_1)}{3,5 D_{d_n} + 130}$$

- Criterio de Mínimo Deseable

  $V = V_d$

  - $L < D_d$

    $$P = \left[\frac{2 D_d}{(i_2 - i_1)} - \frac{130 + 3,5 D_d}{(i_2 - i_1)^2} \right] . 100$$

    $$L = 2 D_d - \frac{130 + 3,5 D_d}{i_2 - i_1}$$

  - $L > D_d$

    $$P = \frac{D_d^2}{0,035 D_d + 1,30}$$

    $$L = \frac{D_d^2 (i_2 - i_1)}{3,5 D_d + 130}$$

  RECOMENDADO

b) Diferencias de pendientes límites y mínimas

- **Curvas Convexas**
  - Criterio de Mínimo Absoluto
    - Circ. diurna: $$(i_1 - i_2)_{lím.} = \frac{447,6}{D_d} = 2(i_1 - i_2)_{mín.}$$
    - Circ. nocturna: $$(i_1 - i_2)_{lím.} = \frac{314,22}{D_{d_n}} = 2(i_1 - i_2)_{mín.}$$
  - Criterio de Mínimo Deseable
    - (Circ. nocturna): $$\boxed{(i_1 - i_2)_{lím.} = \frac{314,22}{D_d} = 2(i_1 - i_2)_{mín.}}$$ RECOMENDADO
- **Curvas Cóncavas** (Circ. nocturna)
  - Criterio de Mínimo Absoluto: $$(i_2 - i_1)_{lím.} = 3,50 + \frac{130}{D_{d_n}} = 2(i_2 - i_1)_{mín.}$$
  - Criterio de Mínimo Deseable: $$\boxed{(i_2 - i_1)_{lím.} = 3,50 + \frac{130}{D_d} = 2(i_2 - i_1)_{mín.}}$$ RECOMENDADO

c) Longitudes y parámetros mínimos necesarios, según criterio de apariencia estética para curvas cóncavas y convexas.

$$P\,[m] = \frac{70\ V_d\ [km/hora]}{i_1 - i_2\ [\%]} \quad ; \quad L\,[m] = 0,7\ V_d\ [Km/hora]$$

d) Longitudes y parámetros mínimos necesarios, según criterios de comodidad de los ocupantes, para curvas cóncavas y convexas.

$$P\,[m] = 0,25\ V_d^2\ ;\ (V_d\ [Km/hora])\ ;\ L\,[m] = 0,0025 . V_d^2 . |i_1 - i_2| \quad \begin{cases} V_d\ [Km/h] \\ i - i_2\ [\%] \end{cases}$$

e) Replanteo de la parábola.

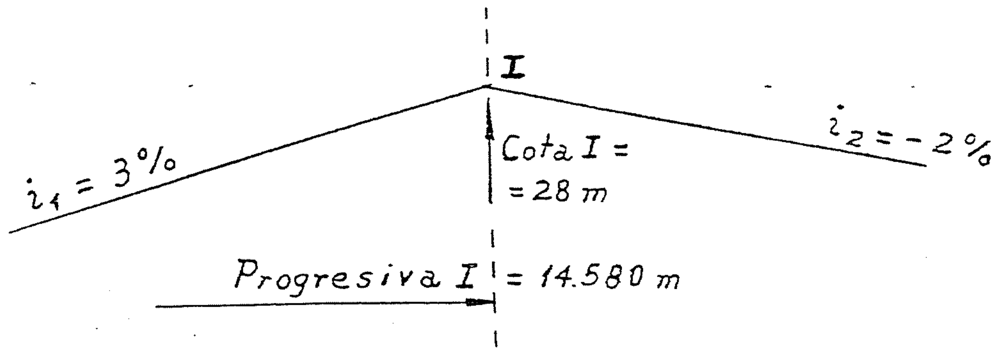
$$y = \frac{i_2 - i_1}{200\,L} . x^2 + \frac{i_1}{100} . x \quad ; \quad E = \frac{|i_1 - i_2|}{800} . L \quad ; \quad x_v = \frac{i_1}{i_1 - i_2} . L$$

EJEMPLO N° 1

Se trata de determinar la longitud mínima de una curva vertical convexa de enlace entre dos alineamientos rectos de pendientes i_1 e i_2, (siendo en este caso $i_1 > i_2$).

Se efectuará el relevamiento de la curva y se determinará la ubicación (Progresiva y cota), del vértice de la parábola.

Datos : $i_1 = 3\ \%$; $i_2 = -2\ \%$; $V_d = 100$ Km/h ;
Progresiva de I : 14.580 m ; Cota de I : 28 m



Teniendo presente que el valor de $(i_1 - i_2)$ es algo elevado: $[3 - (-2) = 5]$, se puede presuponer que estamos en el caso de $L > D_d$ (y por lo tanto también en el de $L > d_f$).
Esto último queda corroborado por el hecho de que $i_{lím.}$, aún para el caso de $i_m = 0$ y para el criterio de mínimo absoluto, es menor que 5 %. En efecto:

$$i_{lím.} = \frac{447,6}{D_d} = \frac{447,6}{200,67^*} \cong 2,23$$

Para el caso de circulación nocturna $i_{lím.}$ se calcula con una $V = 0,9\ V_d =$ = 90 Km/h y la D_{d_n} para este caso es de 165,37 m*

$$i_{lím._n} = \frac{314,22}{D_{d_n}} = \frac{314,22}{165,37} \cong 1,90\ \%$$

Para el caso de longitud de curva deseable el $i_{lím.}$ se calcula con $V = V_d$

$$i_{lím.} = \frac{314,22}{200,67^*} = 1,566\ \%$$

Se harán los cálculos de longitud para los dos criterios: el de mínimo deseable y el de mínimo absoluto. (En la práctica se adopta a priori uno de los dos criterios). Es este ejemplo se adopta el criterio de mínimo deseable.

---

* Valores de D_d tomados de la Tabla VI - 2. (Corresponden a los valores recomendados por la A.A.S.H.O.)

a) Criterio de mínimo absoluto

Siguiendo la recomendación de carácter general del párrafo VI - b_3, calcularemos D_d adoptando una pendiente media igual a la pendiente extrema de mayor valor absoluto, para restar a "f".

$$D_d = d_p + d_f = \frac{100 \times 2,5}{3,6}\ m + \frac{100^2}{254.(0,30 - 0,03)}\ m = 69,444m + 145,814m =$$

$$= 215,26\ m$$

$$D_{d_n} = d_{p_n} + d_{f_n} = \frac{90 \times 2,5}{3,6}\ m + \frac{90^2}{254.(0,31 - 0,03)}\ m = 62,5\ m + 113,892\ m =$$

$$= 176,39\ m$$

$$L_1 = 0,00223 . D_d^2 . (i_1 - i_2) = 0,00223 . 215,26^2 . 5 = 516,66\ m \text{ (circ. diurna)}$$

$$L_2 = 0,0032 . D_{d_n}^2 . (i_1 - i_2) = 0,0032 . 176,39^2 . 5 = 497,81\ m \text{ (circ. nocturna)}$$

Vemos que en todos los casos $d_f < \frac{L}{2}$ por lo que la adopción de i_m = 3 % es la que corresponde, y por lo tanto no cabe efectuar pruebas con los valores de i_m de los párrafos VI - b_{2-1} y VI - b_1.

Los parámetros están dados por:

$$P_d = \frac{L}{(i_1 - i_2)/100} = \frac{509,71m}{5/100} \cong 10.195\ m \text{ (circ. di.)}$$

$$P_n = \frac{497,81m}{5/100} \cong 9.957\ m \text{ (circ. noct.)}$$

b) Criterio de mínimo deseable

Siendo la condición de mínimo deseable más rigurosa que la de mínimo absoluto, también se cumplirá que $d_f < \frac{L}{2}$. Luego: $i_m = |i_a|$ = 3 %, resultando por lo tanto:

$$D_d = 215,26\ m \quad ; \quad L = 0,0032 \times 215,26^2 \times 5 = 742\ m$$

$$P = \frac{742\ m}{5/100} = 14.840\ m$$

c) Comodidad de los ocupantes

$$P = 0,25 . V_d^2 = 0,25 \times 10.000\ m = 2.500\ m$$

d) Apariencia estética

$$P = \frac{0,7 . V_d}{i_1 - i_2} = \frac{70\ m}{0,05} = 1.400\ m$$

De la comparación de los valores de los parámetros obtenidos, resulta decisorio el parámetro correspondiente a seguridad. Tal como se anticipó, adoptamos finalmente, el parámetro correspondiente al criterio de mínimo deseable.

P = 15.000 m ; L = 750 m (Cantidades que surgen de redondear los valores 14.840 m y 742 m respectivamente).

e) Replanteo

Ecuación de la parábola (sistema de ejes coordenados con centro en P.C.)

$$a = -\frac{i_1 - i_2}{200\ L} = -\frac{5}{200\ .\ 750} = -0{,}000033333$$

$$b = \frac{i_1}{100} = 0{,}03$$

$$y = 0{,}03\ x - 0{,}000033333\ x^2$$

Progresivas de P.C. y F.C.

$$\text{Prog. de P.C.} = \text{Prog. I} - \frac{L}{2} = 14.580\text{ m} - 375\text{ m} = 14.205\text{ m}$$

$$\text{Prog. de F.C.} = \text{Prog. I} + \frac{L}{2} = 14.580\text{ m} + 375\text{ m} = 14.955\text{ m}$$

Cotas de P.C. y F.C.

$$\text{Cota de P.C.} = \text{Cota I} - \frac{i_1}{100} \cdot \frac{L}{2} = 28\text{ m} - 0{,}03 \times 375\text{ m} = 16{,}75\text{ m}$$

$$\text{Cota de F.C.} = \text{Cota I} + \frac{i_2}{100} \cdot \frac{L}{2} = 28\text{ m} - 0{,}02 \times 375\text{ m} = 20{,}50\text{ m}$$

Ubicación del vértice de la parábola

$$x_v = \frac{i_1}{i_1 - i_2} \cdot L = \frac{3}{5} \cdot 750\text{ m} = 450\text{ m}$$

Progresiva del vértice:

$$x_v + \text{Prog. P.C.} = 450\text{ m} + 14.205\text{ m} = 14.655\text{ m}$$

$$y_v = \frac{i_1}{100} \cdot x_v - \frac{i_1 - i_2}{200\ L} \cdot x_v^2 = 13{,}50\text{ m} - 6{,}75\text{ m} = 6{,}75\text{ m}$$

Cota del vértice:

$$y_v + \text{Cota P.C.} = 6{,}75\text{ m} + 16{,}75\text{ m} = 23{,}50\text{ m}$$

Se consigna finalmente el Cuadro general de replanteo de la parábola.

	Referido al sistema con centro en P.C.				Referido al sistema adoptado para la rasante.		
	x_c	$\frac{i_1}{100} . x_c$	$a . x_c^2$	y_c	x (Prog.)	Cotas de tangente extrema izquierda	y Cotas de la curva
	m	m	m	m	m	m	m
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
P.C. →	0	0	0	0	14.205	16,75	16,750
	50	1,50	0,083	1,417	14.255	18,25	18,167
	100	3,00	0,333	2,667	14.305	19,75	19,417
	150	4,50	0,750	3,750	14.355	21,25	20,500
	200	6,00	1,333	4,667	14.405	22,75	21,417
	250	7,50	2,083	5,417	14.455	24,25	22,167
	300	9,00	3,000	6,000	14.505	25,75	22,750
	350	10,50	4,083	6,417	14.555	27,25	23,167
	375	11,25	4,687*	6,563	14.580	28,00	23,313
	400	12,00	5,333	6,667	14.605	28,75	23,417
Vért. →	450	13,50	6,750	6,750	14.655	30,25	23,500
	500	15,00	8,333	6,667	14.705	31,75	23,417
	550	16,50	10,083	6,417	14.755	33,25	23,167
	600	18,00	12,000	6,000	14.805	34,75	22,750
	650	19,50	14,083	5,417	14.855	36,25	22,167
	700	21,00	16,333	4,667	14.905	37,75	21,417
F.C. →	750	22,50	18,750	3,750	14.955	39,25	20,500

(5) = (1) + Prog. P.C. ; (6) = (2) + Cota P.C. ; (7) = (4) + Cota P.C.

* Externa.

) Diferencias de pendientes límites y mínimas

Curvas Convexas

- Criterio de Mínimo Absoluto
  - Circ. diurna: $(i_1 - i_2)_{lím.} = \dfrac{447,6}{D_d} = 2\,(i_1 - i_2)_{mín.}$
  - Circ. nocturna: $(i_1 - i_2)_{lím.} = \dfrac{314,22}{D_{d_n}} = 2\,(i_1 - i_2)_{mín.}$
- Criterio de Mínimo Deseable
  - (Circ. nocturna): $\boxed{(i_1 - i_2)_{lím.} = \dfrac{314,22}{D_d} = 2\,(i_1 - i_2)_{mín.}}$ RECOMENDADO

Curvas Cóncavas (Circ. nocturna)

- Criterio de Mínimo Absoluto: $(i_2 - i_1)_{lím.} = 3,50 + \dfrac{130}{D_{d_n}} = 2\,(i_2 - i_1)_{mín.}$
- Criterio de Mínimo Deseable: $\boxed{(i_2 - i_1)_{lím.} = 3,50 + \dfrac{130}{D_d} = 2\,(i_2 - i_1)_{mín.}}$ RECOMENDADO

c) Longitudes y parámetros mínimos necesarios, según criterio de apariencia estética para curvas cóncavas y convexas.

$$P\,[m] = \frac{70\ V_d\ [Km/hora]}{i_1 - i_2\ \ [\%]} \quad ; \quad L\,[m] = 0,7\ V_d\ [Km/hora]$$

d) Longitudes y parámetros mínimos necesarios, según criterios de comodidad de los ocupantes, para curvas cóncavas y convexas.

$$P\,[m] = 0,25\ V_d^2 \ ; \ (V_d\ [Km/hora]) \ ; \ L\,[m] = 0,0025 . V_d^2 . |i_1 - i_2| \begin{cases} V_d\ [Km/h] \\ i_1 - i_2\ [\%] \end{cases}$$

e) Replanteo de la parábola.

$$y = \frac{i_2 - i_1}{200\,L} \cdot x^2 + \frac{i_1}{100} \cdot x \ ; \ E = \frac{|i_1 - i_2|}{800} \cdot L \ ; \ X_v = \frac{i_1}{i_1 - i_2} \cdot L$$

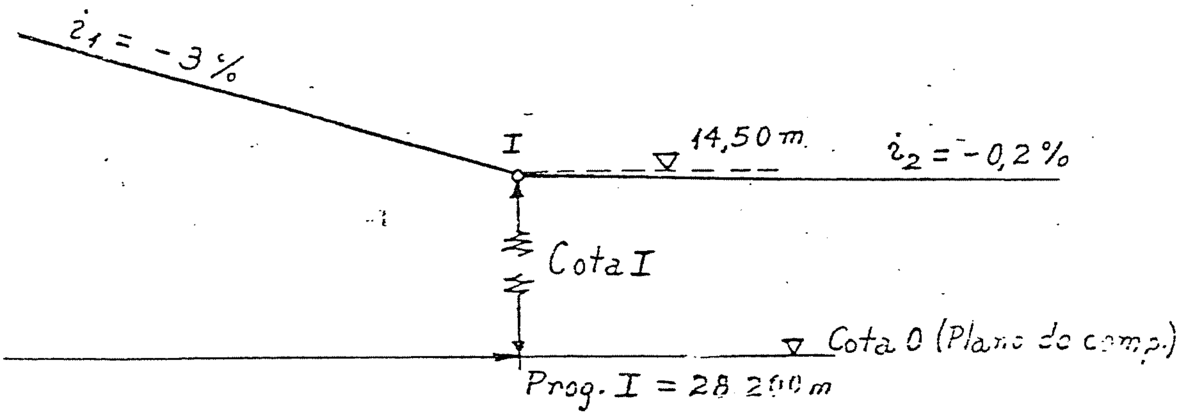
EJEMPLO Nº 2

Se trata de determinar la longitud mínima de una curva vertical cóncava de enlace entre dos alineamientos rectos de pendientes i_1 e i_2, siguiendo el criterio de mínimo deseable. (en este caso $i_1 < i_2$).

Se efectuará el relevamiento de la curva.

Datos: $i_1 = -3\ \%$; $i_2 = -0{,}2\ \%$; $V_d = 110$ Km/h ;

Progresiva de I : 28.200 m ; Cota de I : 14,50 m



Adoptamos para el cálculo de i_m el valor de $|i_a|$, (en este caso 3 %), siguiendo la recomendación general del párrafo VI – b_3, quedando del lado de la seguridad.

De esta manera:

$$D_d = \left[\frac{110 \times 2{,}5}{3{,}6} + \frac{110^2}{254.(0{,}30-0{,}03)}\right] m \cong$$

$$\cong 76{,}39\ m + 176{,}44\ m = 252{,}83\ m$$

– Condiciones de visibilidad

$$(i_2 - i_1)_{lím.} = \left(3{,}5 + \frac{130}{D_d}\right)\ \% = 4{,}01\ \%$$

$$i_2 - i_1 = (-0{,}2)\ \% - (-3)\ \% = 2{,}8\ \% < (i_2 - i_1)_{lím.}$$

Estamos en el caso de $L < D_d$

$$P = \left[\frac{2.D_d}{i_2 - i_1} - \frac{130 + 3{,}5\ D_d}{(i_2 - i_1)^2}\right] : 100 =$$

$$= 18.059{,}3\ m - 12.945{,}2\ m = 5.114{,}1\ m$$

Para el parámetro obtenido de 5.114,1 m, la longitud correspondiente es de $5.114{,}1\ m \times (i_2 - i_1) = 5.114{,}1\ m \times \left[(-0{,}002) - (-0{,}03)\right] = 143{,}19\ m.$

La d_f resultó igual a 176,44 m. Como $L < d_f$ podría recalcularse D_d con el valor de i_m consignado en el párrafo VI – b_1.

No obstante, por las razones expuestas en el párrafo VI – b_3 mantendremos el valor de 3 %.

De todos modos, calcularemos, a título ilustrativo, a D_d con los valores:

$$i_m = \frac{|i_1+i_2|}{2} = \frac{3,2}{2} = 1,6\ \%$$ consignado en el párrafo VI – b_1 y el de

$$i_m = \frac{\left| i_a + \frac{i_a+i_b}{2} \right|}{2} = \frac{\left| -3 + \frac{-3+(-0,2)}{2} \right|}{2} = 2,3\ \%$$, consignado en el párrafo VI – b_{2-1}, para comparar los valores correspondientes de D_d con el de 252,83 m adoptado.

$$D_{d(i_m = 1,6)} = \left[\frac{110 \times 2,5}{3,6} + \frac{110^2}{254.(0,30 - 0,016)} \right] m =$$

$$= 76,39\ m + 167,74\ m = 244,13\ m$$

$$D_{d(i_m = 2,3)} = \left[\frac{110 \times 2,5}{3,6} + \frac{110^2}{254.(0,30 - 0,023)} \right] m =$$

$$= 76,39\ m + 171,98\ m = 248,37\ m$$

(Vemos que las diferencias no justifican el nuevo cálculo y las verificaciones inherentes ya señaladas).

– Apariencia estética de la rasante

$$P = \frac{70\ V_d}{(i_2 - i_1)} = \frac{7.700}{2,8} = 2.750\ m$$

– Factor de "molestias a los ocupantes"

$$P = 0,25\ .\ V_d^2 = 3.025\ m$$

Se adopta el mayor de los parámetros mínimos determinados: 5.114,1 m

Longitud mínima:

$$L = P\ .\ (i_2 - i_1) = 5.114,1\ m \times 0,028 = 143,19\ m$$

Se adopta: $L = 150$ m

Ecuación de la parábola:

$$y = \frac{i_1}{100} \cdot x - \overbrace{\frac{i_1 - i_2}{200\ L}}^{a} x^2$$

$$a = - \frac{-3 - (-0{,}2)}{200 \cdot 150} = 0{,}00009332$$

"a" resulta positivo, lo que está de acuerdo con el hecho de tratarse de una parábola cóncava, en la que $i_1 < i_2$.

Resulta así: $y = -0{,}03 \cdot x + 0{,}00009332 \cdot x^2$

- Ubicación de P.C.

$$\text{Prog. P.C.} = \text{Prog. I} - \frac{L}{2} = 28.200 \text{ m} - 75 \text{ m} = 28.125 \text{ m}$$

$$\text{Cota P.C.} = \text{Cota I} - \frac{i_1}{100} \cdot \frac{L}{2} = 14{,}50 \text{ m} - (-0{,}03) \times 75 \text{ m} =$$

$$= 16{,}75 \text{ m}$$

- Ubicación de F.C.

$$\text{Prog. F.C.} = \text{Prog. I} + \frac{L}{2} = 28.200 \text{ m} + 75 \text{ m} = 28.275 \text{ m}$$

$$\text{Cota F.C.} = \text{Cota I} + \frac{i_2}{100} \cdot \frac{L}{2} = 14{,}50 \text{ m} + (-0{,}002) \times 75 \text{ m} =$$

$$= 14{,}35 \text{ m}$$

- Ubicación del vértice de la parábola

$$x_v = \frac{i_1}{i_1 - i_2} \cdot L = \frac{-3}{-2{,}8} \cdot 150 \text{ m} = 160{,}71 \text{ m}$$

Progresiva del vértice:

$$x_v + \text{Prog. P.C.} = 160{,}71 \text{ m} + 28.125 \text{ m} =$$

$$= 28.285{,}71 \text{ m}$$

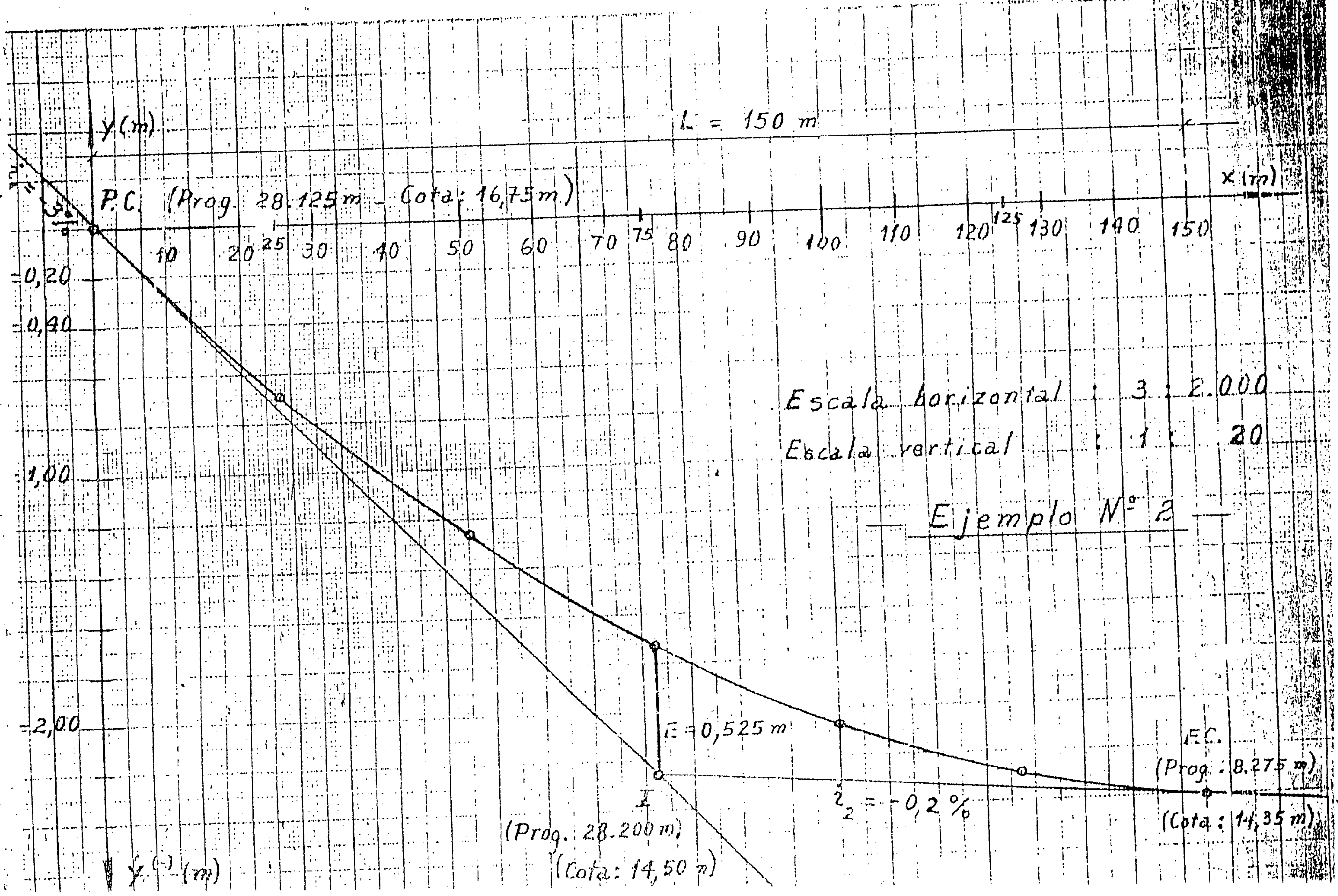
que resulta mayor que la Prog. de F.C., lo que indica que el vértice de la parábola no pertenece al tramo que se utiliza, lo que es compatible con el hecho de que dentro de dicho tramo utilizado no hay cambio de signo de las pendientes de las tangentes.

CUADRO DE REPLANTEO

	Referido al sistema con centro en P.C.				Referido al sistema adoptado para la rasante.		
	x_c	$\frac{i_1}{100} \cdot x_c$	$a \cdot x_c^2$	y_c	x (Prog.)	Cotas de tangente extrema izquierda	y Cotas de la curva
	m	m	m	m	m	m	m
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
P.C. →	0	0	0	0	28.125	16,75	16,750
	25	– 0,75	0,058	– 0,692	28.150	16,00	16,058
	50	– 1,50	0,233	– 1,267	28.175	15,25	15,483
	75	– 2,25	0,525*	– 1,725	28.200	14,50	15,025
	100	– 3,00	0,933	– 2,067	28.225	13,75	14,683
	125	– 3,75	1,458	– 2,292	28.250	13,00	14,458
F.C. →	150	– 4,50	2,100	– 2,400	28.275	12,25	14,350

(5) = (1) + Prog. P.C. ; (6) = (2) + Cota P.C.

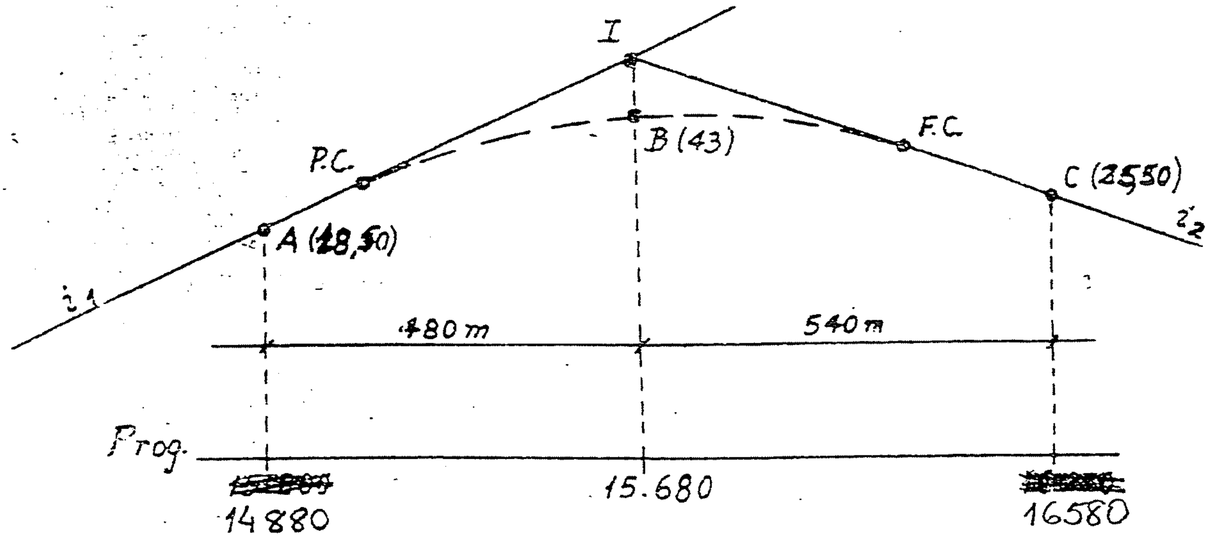
(7) = (4) + Cota P.C. ; * Externa.


L = 150 m
Y (m)
x (m)
P.C. (Prog. 28.125 m - Cota: 16,75 m)
10
20
25
30
40
50
60
70
75
80
90
100
110
120
125
130
140
150
-0,20
-0,40
-1,00
-2,00
Escala horizontal 1 : 2.000
Escala vertical 1 : 20
Ejemplo Nº 2
E = 0,525 m
I
(Prog. 28.200 m)
(Cota: 14,50 m)
i_2 = -0,2 %
F.C.
(Prog.: 8.275 m)
(Cota: 14,35 m)
Y (-) (m)

EJEMPLO Nº 3

Se trata de hacer pasar la rasante, diseñada con V_d = 100 Km/h , por tres puntos pre-determinados, definidos por las siguientes coordenadas:

Punto A :	Progresiva 14.880 m	;	Cota 18,50 m
Punto B :	Progresiva 15.680 m	;	Cota 43,00 m
Punto C :	Progresiva 16.580 m	;	Cota 25,50 m



Pendiente máxima admisible: 6 %

Para acotar el número de posibles soluciones, elegiremos el criterio de resolver el problema a través de dos tramos rectos con ciertas pendientes que pasen por los puntos A y C respectivamente, y que se intersecten en un punto I ubicado sobre la vertical de B. Esto implica la necesidad de una curva vertical convexa, con el punto medio en correspondencia con la Prog. de B.

De las eventuales soluciones que se adecuen a este planteo seleccionaremos la de menores pendientes.

Obviamente, se deberán cumplir las condiciones de seguridad (visibilidad adecuada), de apariencia estética; de comodidad de los ocupantes y la de pendientes máximas admisibles.-

Iniciaremos un primer tanteo con una externa de la curva: E = 10 m

Cota I = 43 m + 10 m = 53 m

Uniendo A con I, se obtiene una recta de pendiente:

$$\frac{53\ m - 18,50\ m}{800\ m} = 4,3125\ \%$$, y que identificaremos con i_1

Análogamente, uniendo C con I, se obtiene una pendiente de:

$$-\frac{53\ m - 25,50\ m}{900\ m} = -\ 3,0555\ \%$$, y que identificaremos con i_2

Para el cálculo de D_d supondremos el caso más desfavorable en cuanto al valor de i_m $(d_f < \frac{L}{2})$ y adoptaremos como i_m la pendiente extrema de mayor valor absoluto, $(i_1 = 0,043125)$, restada de "f".

$$D_d = \frac{V_d . t}{3,6} + \frac{V_d^2}{254.(f - i_m)} = \frac{100 \times 2,5}{3,6} + \frac{10.000}{254.(0,30 - 0,043125)} \text{ m} =$$

$$= 69,4444 \text{ m} + 153,2655 \text{ m} = 222,7099 \text{ m} \cong 222,71 \text{ m}$$

$$i_{lím.} = \frac{314,22}{D_d} = 1,411\ \% \longrightarrow L > D_d$$

Resulta, por criterio de seguridad:

$$L = 0,0032.D_d^2.(i_1 - i_2) = 0,0032 \times 222,71^2 \text{ m} \times 7,368 \cong 1.169,45 \text{ m}$$

Efectivamente:

$$d_f < \frac{L}{2}$$

Criterio de apariencia estética:

$$L = 0,7 \ . \ V_d = 70 \text{ m}$$

Criterio de comodidad de los ocupantes:

$$L = 0,0025 \ . \ V_d^2 \ . \ (i_1 - i_2) = 184,2 \text{ m}$$

Vemos que la longitud mínima queda definida por el criterio de seguridad.

Veremos a continuación, qué longitud debe tener la curva para que la externa E sea igual al valor supuesto (10 m).

De:

$$E = \frac{L \ . \ (i_1 - i_2)}{800} \quad ; \text{ se obtiene:}$$

$L = \frac{800 \times E}{i_1 - i_2}$. En nuestro caso resulta: L = 1.085,78 m que no verifica la condición: $L \geqslant 1.169,45$ m.

Haremos un nuevo tanteo suponiendo E = 14 m.

Sólo verificaremos por criterio de seguridad, puesto que se ha visto que en este ejemplo es el determinante.

Para E = 14 m, la cota de I resulta 43 m + 14 m = 57 m

Pendiente de A I : $i_1 = \dfrac{57\ m - 18,50\ m}{800\ m} = 4,8125\ \%$

Pendiente de C I : $i_2 = -\dfrac{57\ m - 25,50\ m}{900\ m} = -\ 3,5\ \%$

$i_1 - i_2 = 8,3125\ \%$

$$D_d = 69,4444\ m + \frac{10.000\ m}{254.(0,30 - 0,048125)} = 69,4444\ m + 156,308\ m = 225,752\ m$$

$$L = 0,0032 \times 225,752^2 \times 8,3125\ m = 1.355,64\ m$$

Longitud para que E sea igual a 14 m :

$$L = \frac{800 \times 14\ m}{8,3125} = 1.347,37\ m$$

(No verifica).

Probaremos con E = 17 m

Cota de I : 43 m + 17 m = 60 m

Resultan:

Pendiente de A I : 5,1875 %

Pendiente de C I : 3,8333 %

$i_1 - i_2 = 9,0208\ \%$

$$D_d = 69,4444\ m + \frac{10.000\ m}{254.(0,30 - 0,051875)} = 69,4444\ m + 158,67\ m = 228,1147\ m$$

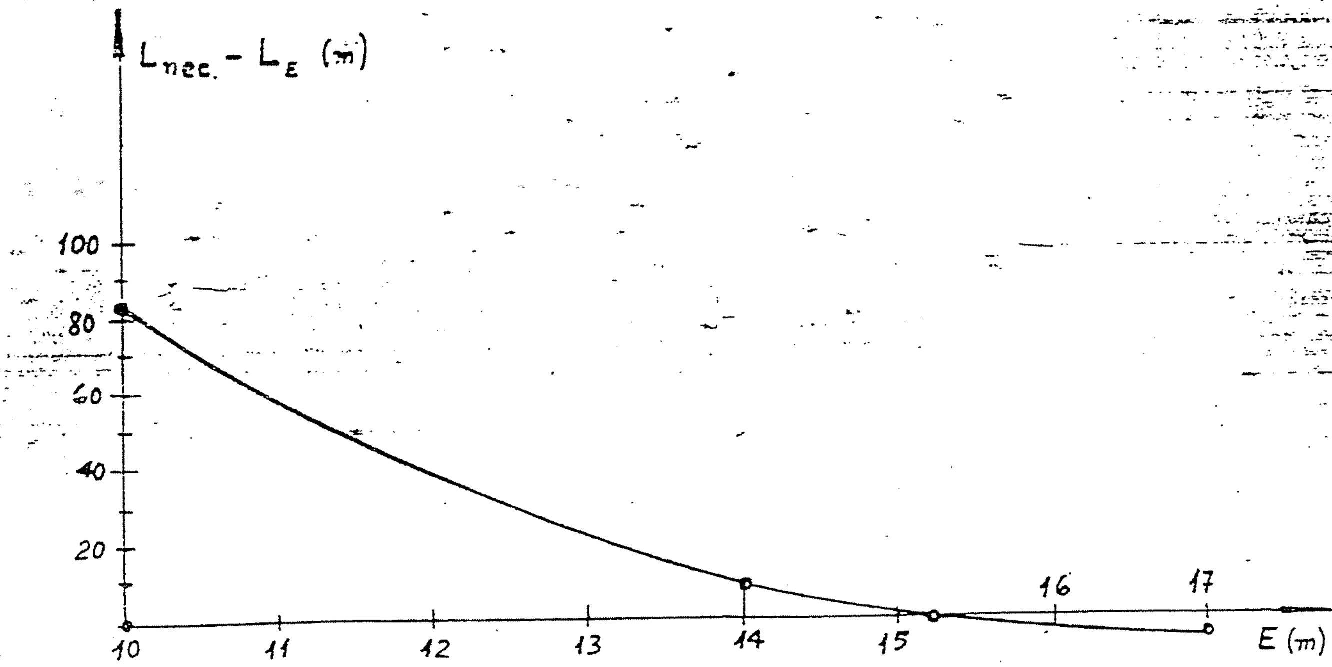
$$L = 0,0032 \times 228,1147^2 \times 9,0208\ m = 1.502,1094\ m$$

Longitud para que E = 17 m:

$$L = \frac{800 \times 17\ m}{9,0208} = 1.507,6268\ m > 1.502,1094\ m$$, luego verifica.

Como debemos reducir las pendientes al máximo, trataremos de hallar el "E" que haga que $L_{nec.}$ sea igual al L_E correspondiente a dicho E.

Representaremos en abscisas, el valor de E adoptado, y en ordenadas, la diferencia entre el $L_{nec.}$ y el L_E.



Probaremos con E = 15,20 m

Cota de I : 43 m + 15,20 m = 58,20 m

Pendiente de A I : $i_1 = \dfrac{58{,}2 \text{ m} - 18{,}5 \text{ m}}{800 \text{ m}} = 0{,}049625 = 4{,}9625\ \%$

Pendiente de C I : $i_2 = -\dfrac{58{,}2 \text{ m} - 25{,}5 \text{ m}}{900 \text{ m}} = -\ 0{,}036333 = -\ 3{,}6333\ \%$

$$i_1 - i_2 = 8{,}5958\ \%$$

$D_d = 69{,}4444 \text{ m} + \dfrac{10.000 \text{ m}}{254.(0{,}30 - 0{,}049625)} = 69{,}4444 \text{ m} + 157{,}2444 \text{ m} =$

$= 226{,}6888 \text{ m}$

$L = 0{,}0032 \times 226{,}6888^2 \times 8{,}5958 \text{ m} = 1.413{,}5018 \text{ m}$

Longitud para que E sea igual a 15,20 m :

$$L_E = \frac{800 \times 15{,}2 \text{ m}}{8{,}5958} = 1.414{,}6443 \text{ m}$$

Como se ve: $L_E > L_{nec.}$ y la diferencia es sólo de 1,1425 m, por lo que se da por resuelto el problema.

(Dada la inter-relación entre L, E, i_1, i_2 e (i_1 - i_2), y la rigidez de las cotas y progresivas de A, B y C, resulta prácticamente imposible redondear valores de L, i_1 e i_2 simultáneamente).

(Aún, pretender el redondeo de L solamente, es una tarea laboriosa, pues es necesario encontrar la combinación de i_1 e i_2 que haga que la cota de I calculada a partir de A y de C resulte un único valor y además que se cumpla la condición:

$$\text{Cota I} - \text{Cota B} = E = \frac{L\,(i_1 - i_2)}{800}\ ).$$

Por lo tanto, para el replanteo se trabajará con los valores de:

$i_1 = 4{,}9625\ \%$; $i_2 = -\ 3{,}6333\ \%$; $i_1 - i_2 = 8{,}5958\ \%$ y

$L = 1.414{,}6443$ m , que corresponde a $E = 15{,}20$ m.

- Se han utilizado esa cantidad de cifras significativas para conseguir el pasaje lo más exacto posible por A, B y C. (En el cuadro se consignan tres decimales).

En la práctica, en caso de poder variar cotas y progresivas dentro de un cierto entorno, se podrá efectuar un redondeo de valores de L, i_1 e i_2 .

Replanteo

$$\text{Prog. de P.C.} = \text{Prog. B} - \frac{L}{2} = 15.680 \text{ m} - 707{,}322 \text{ m} = 14.972{,}678 \text{ m}$$

$$\text{Cota de P.C.} = \text{Cota I} - \frac{i_1}{100} \cdot \frac{L}{2} = 58{,}20 \text{ m} - 0{,}049625 \times 707{,}322 \text{ m} = $$

$$= 23{,}099 \text{ m}$$

$$\text{Prog. de F.C.} = \text{Prog. B} + \frac{L}{2} = 15.680 \text{ m} + 707{,}322 \text{ m} = 16.387{,}322 \text{ m}$$

$$\text{Cota de F.C.} = \text{Cota I} + \frac{i_2}{100} \cdot \frac{L}{2} = 58{,}20 \text{ m} - 0{,}036333 \times 707{,}322 \text{ m} =$$

$$= 32{,}501 \text{ m}$$

Ecuación de la parábola:

$$a = -\frac{i_1 - i_2}{200\ L} = -\frac{4{,}9625 - (-\ 3{,}6333)}{200 \times 1.414{,}6443} = -\frac{8{,}5958}{200 \times 1.414{,}6443} =$$

$$= -\ 0{,}0000303814$$

$$b = \frac{i_1}{100} = \frac{4{,}9625}{100} = 0{,}049625$$

$$y_c = 0{,}049625 . x_c - 0{,}0000303814 . x_c^2$$

$$x_v = \frac{i_1}{i_1 - i_2} . L = \frac{4{,}9625}{8{,}5958} \times 1.414{,}6443 \text{ m} = 816{,}698 \text{ m}$$

$$\text{Prog. vértice} = \text{Prog. P.C.} + x_v = 14.972{,}678 \text{ m} + 816{,}698 \text{ m} = 15.789{,}376 \text{ m}$$

$$y_{c_v} = 0{,}049625 \cdot x_v - 0{,}0000303814 \cdot x_v^2 =$$

$$= 0{,}049625 \times 816{,}698 \text{ m} - 0{,}0000303814 \times 816{,}698^2 \text{ m} = 20{,}265 \text{ m}$$

$$\text{Cota vértice} = \text{Cota P.C.} + y_{c_v} = 23{,}099 \text{ m} + 20{,}265 \text{ m} = 43{,}364 \text{ m}$$

El replanteo se realizará como se indicó en los ejemplos Nº 1 y 2.
Se incluyen en el Cuadro de Replanteo, solamente los puntos notables: P.C., B, V, F.C. y un punto correspondiente a cada uno de estos enfoques:

* Valores redondeados de abscisas x_c referidos al sistema con centro en P.C.
* Valores redondeados de progresivas.

Se ha tomado deliberadamente un ejemplo de cada uno para poner de manifiesto la posibilidad de utilizar uno u otro según convenga.

CUADRO DE REPLANTEO

Referido al sistema con centro en P.C.				Referido al sistema adoptado para la rasante.			
x_c	$\frac{i_1}{100} \cdot x_c$	$a \cdot x_c^2$	y_c	x (Prog.)	Cotas de tang. extr. izq.	y Cotas de la curva	
(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	(m)	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	
0	0	0	0	14.972,678	23,099	23,099	← P.C.
400,000	19,850	4,861	14,989	15.372,678	42,949	38,088	
707,322	35,101	15,200*	19,901	15.680,000	58,200	43,000	← B
816,698	40,529	20,264	20,265	15.789,376	63,628	43,364	← Vértice
1.127,322	55,943	38,610	17,333	16.100,000	79,042	40,432	
1.414,644	70,202	60,800	9,402	16.387,322	93,301	32,501	← F.C.

(5) = (1) + Prog. P.C. ; (6) = (2) + Cota P.C.

(7) = (4) + Cota P.C. ; * Externa

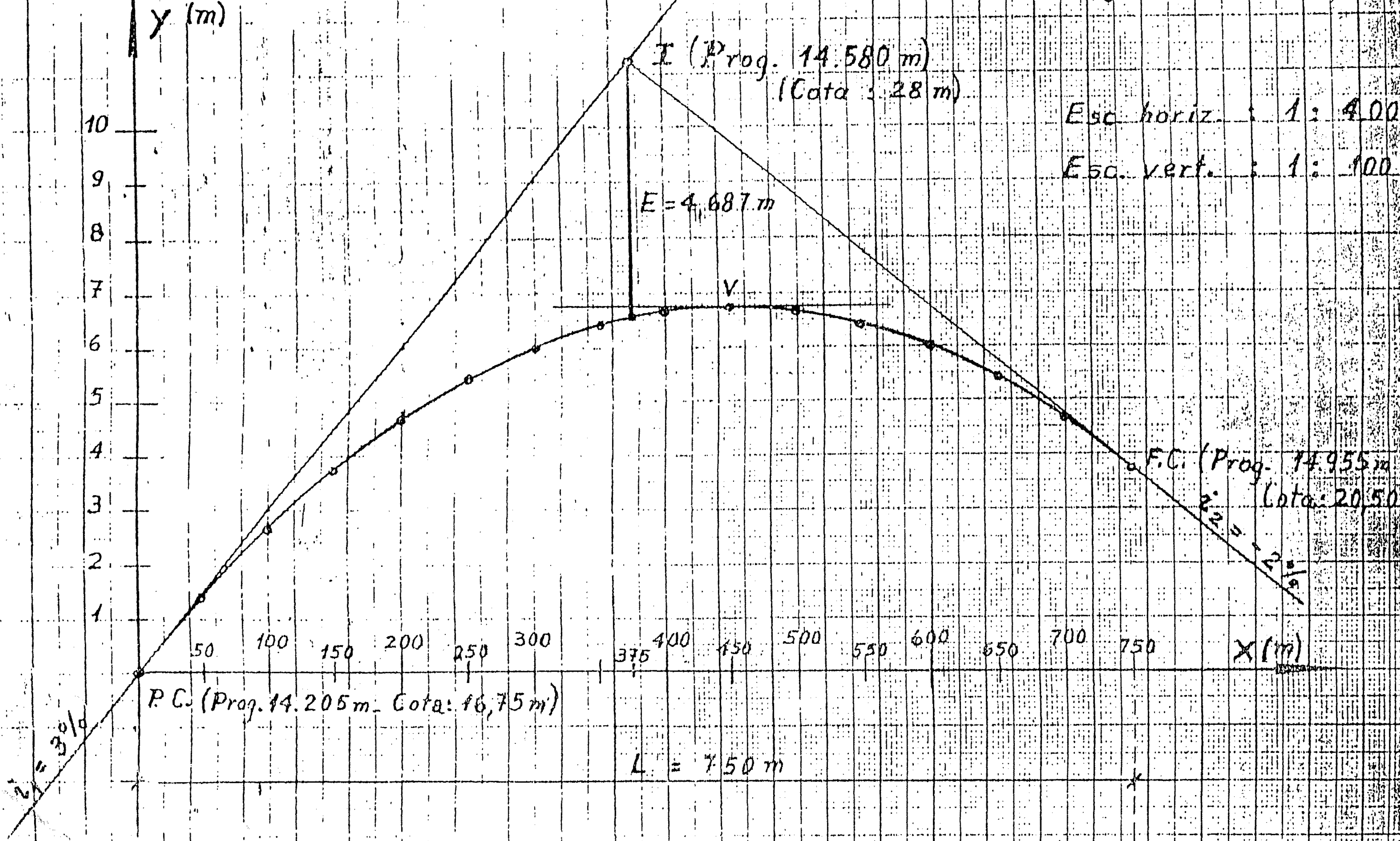
En definitiva, la rasante, en la solución adoptada, consiste en un tram recto desde "A" (Prog. 14.880 m; Cota 18,50 m), hasta P.C. (Prog. 14.972,678 m; Cota 23,099 m), con pendiente i_1 = 4,9625 %. En P.C. se inicia la parábola de ecuación: $y_c = 0{,}049625 . x_c - 0{,}0000303814 . x_c^2$ (referida al sistema de ejes con centro en P.C.).
Dicha parábola pasa por B (Prog. 15.680 m; Cota 43 m) y finaliza en F.C. (Prog. 16.387,322 m; Cota 32,501 m), lo que implica una longitud (proyección horizontal) de 1.414,644 m.

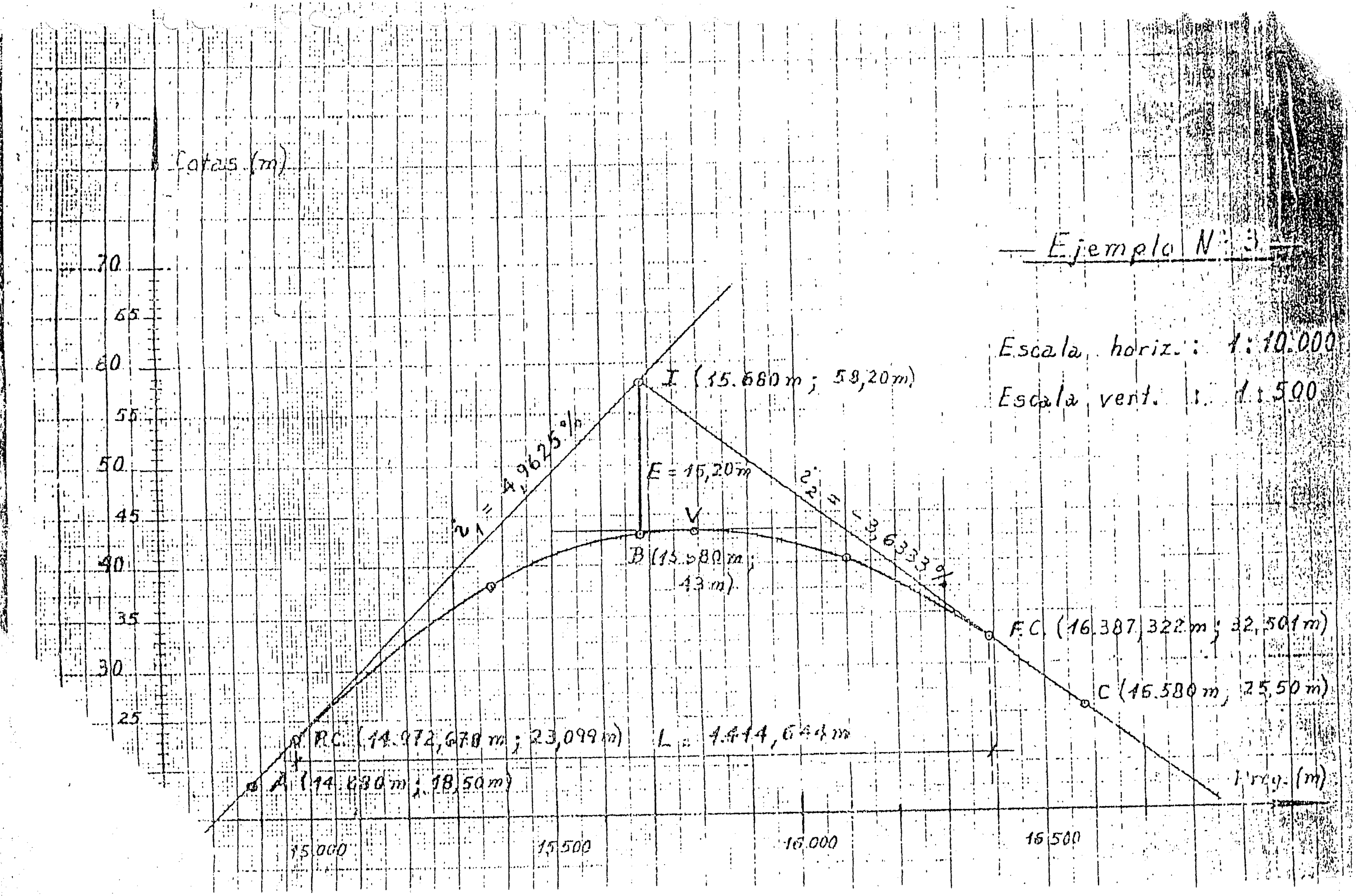
El vértice de la parábola, o punto más alto con tangente horizontal, tiene como coordenadas: Prog. 15.789,376 m y Cota 43,364 m.

Desde F.C. hasta C (Prog. 16.580 m; Cota 25,50 m) se desarrolla en un tramo recto de pendiente $i_2 = -3,6333$ %.

Índice de Tablas

Ejemplo N° 1


Y (m)
X (m)
I (Prog. 14.580 m)
(Cota : 28 m)
Esc. horiz. : 1 : 4.000
Esc. vert. : 1 : 100
E = 4,687 m
V
F.C. (Prog. 14.955 m
Cota: 20,50
$i_2 = -2\%$
P.C. (Prog. 14.205 m. Cota: 16,75 m)
$i_1 = 3\%$
L = 750 m
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
50
100
150
200
250
300
375
400
450
500
550
600
650
700
750



Ejemplo N° 3
Escala horiz. : 1:10.000
Escala vert. : 1:500
Cotas (m)
70
65
60
55
50
45
40
35
30
25
I (15.660 m ; 58,20 m)
i_1 = 4,9625 %
i_2 = -3,6333 %
E = 15,20 m
V
B (15.580 m ; 43 m)
F.C. (16.387,322 m ; 32,501 m)
C (16.580 m ; 25,50 m)
P.C. (14.972,678 m ; 23,099 m)
L = 1.414,644 m
A (14.680 m ; 18,50 m)
Prog. (m)
15.000
15.500
16.000
16.500

68