III.3 UNIDAD 3: ECUACIONES DE PRIMER GRADO

III.3.1 ECUACIONES DE PRIMER GRADO

III.3.1.1 Ecuaciones de Primer Grado con una incógnita

Se dice que una ecuación es **entera** cuando las incógnitas esta sometidas únicamente a las operaciones de suma, resta y multiplicación.

> **Definición**
> Una ecuación entera con una incógnita se dice de primer grado o lineal, cuando el mayor grado con que figura la incógnita es el primero.

Una proposición como $3\,(x + 3) = x + 5$ es un ejemplo de una **ecuación de primer grado o ecuación lineal**, porque la variable x sólo aparece elevada a la primera potencia. También se dice que es una **ecuación condicional**; es cierta para ciertas sustituciones de la variable x, pero no para otras. Por ejemplo, es verdadera cuando $x = -2$, pero es falsa para $x = 1$. Por otro lado, una ecuación como $3\,(x + 2) = 3x + 6$ se llama **identidad** porque es verdadera o válida para todos los números reales x.

Resolver una ecuación quiere decir determinar los números reales x para los cuales la ecuación dada es verdadera. A lo que se determina se le llama **soluciones o raíces** de la ecuación dada.

Resolvamos la ecuación $3(x + 3) = x + 5$. La estrategia es reunir todos los términos donde aparezca la variable, de un lado de la ecuación, y las constantes del otro.

El primer paso es eliminar el paréntesis aplicando la propiedad distributiva

$$3\,(x + 3) = x + 5$$

$$3x + 9 = x + 5$$

$$3x + 9 + (-9) = x + 5 + (-9) \qquad \text{Sumando } -9 \text{ a cada lado de la ecuación}$$

$$3x = x - 4$$

$$3x + (-x) = x - 4 + (-x) \qquad \text{Sumando } -x \text{ de la ecuación}$$

$$2x = -4$$

$$\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(-4) \qquad \text{Multiplicando a cada lado por } \frac{1}{2}$$

$$x = -2$$

Demostraremos que $x = -2$ es la solución reemplazándola en la ecuación original.

$$3\,[(-2) + 3] = (-2) + 5 \qquad \rightarrow \qquad 3 = 3$$

> No se debe decir que -2 es una solución hasta que no se haya comprobado.

En la solución anterior hemos empleado las dos **propiedades básicas de la igualdad**.

Propiedad de igualdad en la suma
Para todos los números reales, a, b y c, si a = b entonces a + c = b + c.

Propiedad de igualdad en la multiplicación
Para todos los números reales, a, b y c, si a = b entonces ac = bc. con $c \neq 0$

La importancia de estas dos propiedades reside en que producen **ecuaciones equivalentes**, ecuaciones que tienen las mismas raíces. Así, la propiedad de la suma convierte a la ecuación $2x - 3 = 7$ en la forma equivalente $2x = 10$.

Regla
Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita, se suprimen los paréntesis en caso que los haya. Se trasponen los términos de modo que todos los que contienen a la incógnita queden en el primer miembro y los independientes en el segundo; se reducen los términos en cada miembro, y, en caso que la incógnita quede afectada por un coeficiente, se pasa éste al segundo miembro. Efectuando las operaciones, queda determinada la solución. Si al despejar la incógnita resulta precedida por el signo menos, se multiplican ambos miembros de la ecuación por -1.

Intentar lo siguiente

Resolver las siguientes ecuaciones enteras de primer grado

a) $x + 3 = 9$	b) $2x + 5 = x + 11$	c) $3(x - 1) = 2x + 7$
d) $5x - 3 = 3x + 1$	d) $2(x + 2) = x - 5$	e) $4(x + 2) = 3(x - 1)$

III.3.1.2 Ecuaciones Racionales de Primer Grado

Se dice que una ecuación es **racional** cuando por lo menos una de las incógnitas figura en el denominador.

Ejemplo 1: Resolver $\dfrac{3}{1-x} = 4$

Solución.	$3 = 4(1 - x)$	Multiplicando ambos miembros por $(1 - x)$
	$3 = 4 - 4x$	Utilizando la propiedad distributiva
	$4x - 4 = -3$	Multiplicando ambos miembros por -1 y ordenándolos
	$4x = 4 - 3$	Sumando 4 a cada lado de la ecuación
	$x = \dfrac{1}{4}$	Multiplicando ambos miembros por $\dfrac{1}{4}$

Luego 1/4 es la raíz de la ecuación dada. En efecto al sustituir ese valor en la ecuación dada esta se satisface.

Ejemplo 2: Resolver $\frac{x}{x-3} - \frac{2}{x+3} = \frac{1+x}{x}$

Recordando que $(x-3)\cdot(x+3) = x^2 - 9$ (diferencia de cuadrados)

$\frac{x\,(x+3)\, - 2(x-3)}{x^2-9} = \frac{1+x}{x}$ Sumando fracciones con distinto denominador.

$\frac{x^2+3x-2x+6}{x^2-9} = \frac{1+x}{x}$

$\frac{x^2+x+6}{x^2-9} = \frac{1+x}{x}$ Multiplicando ambos miembros por x y por $x^2 - 9$

$x\,(x^2 + x + 6) = (x^2 - 9)\,(1 + x)$ Aplicando propiedad distributiva

$x^3 + x^2 + 6x = x^2 - 9x - 9 + x^3$ Reduciendo términos semejantes

$6x + 9x = -9$ Sumando $9x$ a ambos miembros de la ecuación

$15x = -9$ Multiplicando ambos miembros por $\frac{1}{15}$

$x = -\frac{3}{5}$

La ecuación $\frac{x}{x-3} - \frac{2}{x+3} = \frac{1+x}{x}$ tiene por conjunto solución $S = \left\{-\frac{3}{5}\right\}$

Regla

Para resolver una ecuación racional con una incógnita se reducen las fracciones de cada miembro al mínimo común denominador; mediante simplificaciones y pasaje de denominadores se transforma en una ecuación entera. Resuelta ésta, es necesario probar si las raíces halladas satisfacen a la ecuación racional propuesta.

Cuando se resuelven ecuaciones racionales puede suceder que la supresión de los denominadores que contienen a la incógnita haga aparecer raíces extrañas, es decir, números que satisfacen a la ecuación transformada, pero que no satisfacen a la ecuación dada. Por consiguiente, cuando se resuelve una ecuación racional, es necesario verificar siempre la raíz hallada.

Intentar lo siguiente

Resolver las siguientes ecuaciones racionales

a) $\frac{x-3}{x+3} = \frac{4}{5}$ b) $\frac{2x}{x-1} - \frac{1}{x+1} = 2$ c) $\frac{4x}{x^2-4} = \frac{2x}{x+2} - 2$

Exploremos ahora la solución de problemas. Lo que haremos es traducir el enunciado de un problema al lenguaje matemático adecuado, y desarrollar una ecuación que podamos resolver.

III.3.1.3 Aplicación a la Resolución de Problemas

Reglas para Resolver Problemas

1. Lea el problema. Haga una lista de la información disponible.
2. ¿Qué es lo que se debe determinar?. Introduzca una variable y defina lo que representa. En caso de ser posible trace una figura o use una tabla si es necesario.
3. Formule una ecuación.
4. Resuelva la ecuación.
5. ¿Parece razonable la respuesta?. ¿Ha contestado usted la pregunta que aparece en el problema?
6. Compruebe su respuesta con la ecuación en el problema original.
7. Describa la solución del problema.

Problema 1: La longitud de un rectángulo es 1 cm. menos que el doble de su ancho. El perímetro es 28 cm. Determine las dimensiones del rectángulo.

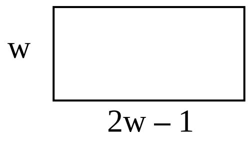
Solución

1. *Vuelva a leer el problema y trate de imaginar la situación que se describe. Tome nota de toda la información que se da en el problema.*

   La longitud es uno menos que el doble del ancho.
   El perímetro es 28.

2. *Determine qué es lo que se pide contestar. Introduzca una variable adecuada, que normalmente representa la cantidad que se debe determinar. Cuando sea apropiado, haga una figura*.

   Representando el ancho con w.
   Entonces, 2w – 1 representa la longitud.



3. *Con la información disponible, forme una ecuación donde intervenga la variable.*

   El perímetro es la distancia que se recorre alrededor del rectángulo. Esto proporciona la información necesaria para escribir la ecuación.

$$w + (2w - 1) + w + (2w - 1) = 28$$

4. *Resuelva la ecuación.*

$$w + (2w - 1) + w + (2w - 1) = 28$$
$$w + 2w - 1 + w + 2w - 1 = 28$$
$$6w - 2 = 28$$
$$6w = 30$$
$$w = 5$$

5. *Regrese al problema original para ver si la respuesta obtenida tiene sentido. ¿Parece ser una solución razonable?. ¿Quedo contestado lo que pregunta el problema?.*

   El problema original preguntaba las dos dimensiones. Si el ancho, w, es 5 cm., entonces la longitud, $2w - 1$, debe ser 9 cm.

6. *Compruebe la solución por sustitución directa de la respuesta en el enunciado original del problema.*

   Como comprobación, vemos que la longitud del rectángulo, 9 cm., es 1 cm. menos que el doble del ancho, 5 cm., tal como lo dice el problema. También, el perímetro es 28 cm.

7. *Por último, describa la solución en términos de las unidades correctas.*

   Las dimensiones son: 5 cm. por 9 cm.

Problema 2: Un automóvil sale de cierta población a mediodía, y se dirige hacia el este a 40 kilómetros por hora. A las 13 horas otro automóvil sale de la población, viaja en la misma dirección a una velocidad de 50 kilómetros por hora. ¿Cuántas horas tarda el segundo vehículo en rebasar al primero?

Solución: Con frecuencia, los problemas de movimiento de este tipo parecen difíciles, cosa que no debería ser. La relación básica que debemos recordar es que **la velocidad multiplicada por el tiempo es igual a la distancia** ($v \times t = d$). Por ejemplo, un automóvil viajando a una velocidad de 60 kilómetros por hora, durante 5 horas, recorre $60 \times 5 = 300$ kilómetros.

Necesitamos volver a leer el problema y ver qué parte de la información que ahí aparece puede ayudar a formar una ecuación. Los dos automóviles viajan a distintas velocidades y durante distintos tiempos, pero ambos viajarán la misma distancia desde el punto de partida hasta que se encuentran. La pista es la siguiente: *Representar la distancia que viaja cada uno e igualar estas cantidades*.

Usaremos la x para representar la cantidad de horas que tardará el segundo automóvil en rebasar al primero. Entonces éste, que ha comenzado una hora antes, viaja $x + 1$ horas hasta el punto de encuentro. Es útil resumir esta información en forma de tabla.

	Velocidad	**Tiempo**	**Distancia**
Primer automóvil	40	$x + 1$	$40\ (x + 1)$
Segundo automóvil	50	x	$50\ x$

Al igualar las distancias llegamos a una ecuación de la que se puede despejar x:

$$50x = 40\,(x + 1) \quad \rightarrow \quad 50x = 40x + 40 \quad \rightarrow \quad 10x = 40 \quad \rightarrow \quad x = 4$$

El segundo automóvil rebalsa al primero en 4 horas. Esta respuesta, ¿parece razonable?. Comprobamos el resultado. El primer automóvil viaja 5 horas a 40 kilómetros por hora, lo que hace un total de 200 kilómetros. El segundo, viaja 4 horas a 50 kilómetros por hora, y se obtiene el mismo total de 200 kilómetros.

Respuesta: El segundo vehículo tarda 4 horas en rebasar al primero.

III.3.1.4 Ecuaciones de Primer Grado con Dos Incógnitas

Las ecuaciones que tienen más de una incógnita se satisfacen para diferentes sistemas de valores atribuidos a sus letras. Así la ecuación $2x + y = 7$ se satisface para infinitos pares de valores atribuidos a x y a y, por ejemplo para:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases} \qquad \text{etcétera.}$$

Estas soluciones se pueden escribir como pares ordenados, así:

$$(1, 5)\ ;\ (2, 3)\ ;\ (4, -1)\ ;\ \text{etc.}$$

Cada uno de los pares de valores que satisface a una ecuación con dos incógnitas constituye una *solución* de esa ecuación.

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación de primer grado con dos incógnitas.

$$3x - y = 2y + 15$$

$3x - y - 2y = 15$	Sumando $-2y$ a cada lado de la ecuación
$3x - 3y = 15$	Reduciendo
$3\,(x - y) = 15$	Sacando factor común
$x - y = \dfrac{15}{3}$	Multiplicando ambos miembros por $\dfrac{1}{3}$
$x - y = 5$	

Luego x e y serán los infinitos pares de números que cumplen la condición de que su diferencia sea 5. Entre ellos:

$$\begin{cases} x = 8 \\ y = 3 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x = -4 \\ y = -9 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} x = 19/3 \\ y = 4/3 \end{cases} \qquad \text{etc.}$$

Como pares ordenados: (8, 3); (3, –2); (–4, –9); (19/3, 4/3); etc.

Cada uno de estos pares de valores es por lo tanto una solución de esa ecuación, como puede comprobarse al reemplazar en ella x e y, respectivamente, por las componentes de cada uno de esos pares.

> Toda ecuación de primer grado con dos o más incógnitas admite infinitas soluciones.

Esta conclusión se expresa también diciendo que la ecuación es *indeterminada*.

Si escribimos en forma genérica una ecuación de primer grado con dos incógnitas, obtenemos

$$a\,x + b\,y = c$$

donde a, b, y c son números que se llaman, respectivamente: coeficiente de x; coeficiente de y, y término independiente. Si se despeja la y se obtiene una función lineal.
En nuestro ejemplo; $3x - y = 2y + 15$, si despejamos la variable y, se obtiene:

$y = x - 5$ representa la ecuación explícita de una recta.

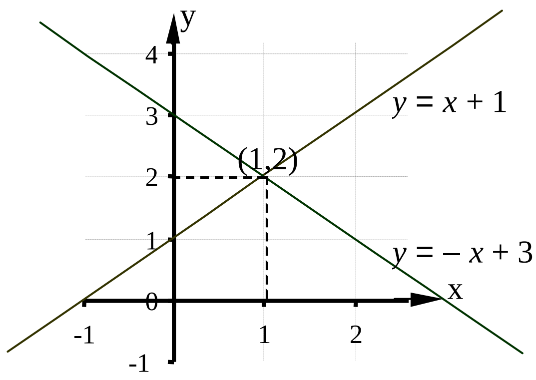
III.3.2 SISTEMA DE ECUACIONES

III.3.2.1 Sistema De Dos Ecuaciones Con Dos Incógnitas

Un conjunto de dos o más ecuaciones que contienen las mismas variables se llama **sistema de ecuaciones**. El conjunto solución de un sistema se compone de todos los pares ordenados que hacen ciertas a todas las ecuaciones del sistema.

Sabemos que dos recta no paralelas cualesquiera en un plano se cortan exactamente en un punto. Para determinar las coordenadas de dicho punto de plantean las ecuaciones de ambas rectas. A continuación, por ejemplo, tenemos un **sistema** de dos ecuaciones lineales con dos variables, y sus gráficas trazadas en el mismo sistema de coordenadas.

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$



La gráfica muestra el conjunto solución del sistema. Su intersección es el par ordenado (1, 2).
Esto se comprueba mediante una sustitución.

$$\begin{array}{r|r} \multicolumn{2}{c}{\underline{x - y = -1}} \\ 1 - 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} \multicolumn{2}{c}{\underline{x + y = 3}} \\ 1 + 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{array}$$

Puesto que ambas ecuaciones son ciertas, (1, 2) es la solución.

> Si un sistema sólo tiene una solución, se dice que es la **única** solución.

Intentar lo siguiente

Resolver gráficamente: a) $\begin{cases} x + y = 11 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ -x + 2y = -5 \end{cases}$

III.3.2.2 Solución de Sistemas de Ecuaciones

Es posible que la representación gráfica no sea un método eficaz y preciso para resolver un sistema de ecuaciones de dos variables. Ahora consideraremos otros métodos más eficientes.

III.3.2.2.1 Método de Sustitución

El **método de sustitución** es una técnica muy útil para resolver sistemas en los que una variable tiene coeficiente igual a 1.

Pasos:

1. Se despeja una de las incógnitas en una de las ecuaciones del sistema.
2. Se sustituye en la otra ecuación dicha incógnita por la expresión obtenida. De ahí el nombre de método de sustitución.
3. Se resuelve la ecuación con una incógnita, que así resulta.
4. Esta incógnita se reemplaza por el valor obtenido, en la expresión que resultó de despejar la primera y se calcula así el valor de está.

Ejemplo 1: Utilizando el método de sustitución, resolver el siguiente sistema,

$$\begin{cases} 2x + y = 6 \\ 3x + 4y = 4 \end{cases}$$

Solución. Comenzamos diciendo que (x, y) son las coordenadas del punto de intersección de este sistema. Esta abscisa y ésta ordenada satisfacen ambas ecuaciones.

Por consiguiente, de cualquiera de las ecuaciones se puede despejar x o y, luego sustituir lo obtenido en la otra.

PRIMER PASO: Despejemos y de la primera ecuación, pues el coeficiente del término correspondiente es 1 (es la más fácil).

$$y = 6 - 2x$$

SEGUNDO PASO: Así y y $6 - 2x$ son equivalentes. Podemos reemplaza $6 - 2x$ en vez de y en la segunda ecuación.

$$3x + 4y = 4$$

$$3x + 4\,(6 - 2x) = 4$$ Sustituyendo $6 - 2x$ en vez de y.

TERCER PASO: Esto da una ecuación de una variable. Ahora podemos resolver para x.

$$3x + 24 - 8x = 4 \qquad \text{Utilizando la propiedad distributiva}$$

$$-5x = -20$$

$$x = 4$$

CUARTO PASO: Se sustituye 4 en vez de x en cualquiera de las ecuaciones y se resuelve para y.

$$2x + y = 6 \qquad \text{Escogiendo la primera ecuación}$$

$$2 \cdot 4 + y = 6$$

$$y = -2$$

El resultado es el par ordenado $(4, -2)$. Este par ordenado satisface ambas ecuaciones, de modo que es la solución del sistema.

Intentar lo siguiente

Utilizar el método de sustitución para resolver los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 2y + x = 1 \\ 3y - 2x = 12 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 6 \\ x - y = -1 \end{cases}$

III.3.2.2.2 Método de Igualación

Pasos:

1. Se despeja una de las incógnitas en las dos ecuaciones.
2. Se igualan las expresiones obtenidas. De ahí el nombre de método de igualación.
3. Se resuelve la ecuación de primer grado en la otra incógnita que así resulta.
4. Se reemplaza el valor obtenido de esta última incógnita en cualquiera de las dos expresiones que resultaron al despejar la primera, y se obtiene así su valor.

Ejemplo 1: Utilizando el método de igualación, resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 3y = 10 & [1] \\ 2x + \frac{5}{4}y = 1 & [2] \end{cases}$$

PRIMER PASO: Al aplicar este método, también conviene observar cuál es la incógnita que se despeja más fácilmente en las dos ecuaciones; en este caso es x.

De [1] $\quad x = 10 - 3y \qquad$ [3]

De [2] $\quad 2x = 1 - \frac{5}{4}y \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{1 - \frac{5}{4}y}{2} \qquad$ [4]

SEGUNDO PASO: Se igualan los segundos miembros de [3] y [4]

$$10 - 3y = \dfrac{1 - \frac{5}{4}y}{2}$$

TERCER PASO: Se resuelve la ecuación en y que se acaba de obtener.

$$(10 - 3y)\, 2 = 1 - \frac{5}{4}y \quad \rightarrow \quad 20 - 6y = 1 - \frac{5}{4}y$$

$$-6y + \frac{5}{4}y = 1 - 20 \quad \rightarrow \quad -\frac{19}{4}y = -19$$

$$-y = \frac{(-19)\cdot 4}{19} \quad \rightarrow \quad y = 4$$

CUARTO PASO: Se sustituye y por su valor, 4, en la expresión [3] o en la [4]. En este ejemplo es más cómodo en la [3].

$$x = 10 - 3 \cdot 4 \quad \rightarrow \quad x = -2$$

El resultado es el par ordenado (–2, 4). Este par ordenado satisface ambas ecuaciones, de modo que es la solución del sistema.

Intentar lo siguiente

Utilizar el método de igualación para resolver los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} 2y + x = 1 \\ 3y - 2x = 12 \end{cases}$ $\qquad$ b) $\begin{cases} 5x + 3y = 6 \\ x - y = -1 \end{cases}$

III.3.2.2.3 Método de Reducción por Suma o Resta

En este método se trata de obtener una ecuación con una sola variable, o *eliminar* una de las variables, por esto también se lo conoce como **método de eliminación**.

Pasos

1. Se multiplican las ecuaciones por un número conveniente, para igualar el valor absoluto de los coeficientes de una misma incógnitas, en las dos ecuaciones.
2. Según que dichos coeficientes resulten de igual o distinto signo, se restan o se suman las ecuaciones, con lo que se consigue eliminar dicha incógnita. De ahí el nombre de método de eliminación o reducción.
3. Se resuelve la ecuación de primer grado en la otra incógnita que así resulta.
4. Se reemplaza está por su valor en una de las ecuaciones dadas y se obtiene el valor de la primera incógnita o bien se calcula esta incógnita por el mismo método.

Ejemplo 1: Utilizando el método de reducción o eliminación, resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - \dfrac{5}{3}y = 5 \\ 3x - 4y = 3 \end{cases}$$

PRIMER PASO: Al aplicar el método conviene observar para cuál de las dos incógnitas se pueden igualar con más facilidad los valores absolutos de sus coeficientes.
En este caso es la x. Es inmediato que multiplicando la primera ecuación por 3 y la segunda por 2 se igualan los coeficientes de x.

$$\begin{cases} 6x - 5y = 15 \\ 6x - 8y = 6 \end{cases}$$

SEGUNDO PASO: Como los coeficientes de x son iguales en valor absoluto y signo, se restan miembro a miembro las ecuaciones para eliminar la x.

$$-5y - (-8y) = 15 - 6$$

TERCER PASO: Se resuelve la ecuación en y que se acaba de obtener.

$$-5y + 8y = 9 \quad \rightarrow \quad 3y = 9 \quad \rightarrow \quad y = 3$$

CUARTO PASO: Se reemplaza el valor de $y = 3$, en una de las ecuaciones del sistema dado; en este caso es más cómodo en la segunda.

$$3x - 4 \cdot 3 = 3 \quad \rightarrow \quad 3x - 12 = 3 \quad \rightarrow \quad 3x = 15$$

$$x = 5$$

Luego, el conjunto solución es: S = {(5, 3)}

Ejemplo 2: Resolver el siguiente sistema por el método de eliminación $\begin{cases} 5x + 6y = 32 \\ 3x - 2y = -20 \end{cases}$

PRIMER PASO: Se observa en este ejemplo, que basta multiplicar la segunda ecuación por 3 para igualar el valor absoluto de los coeficiente de y; el sistema se transforma en:

$$\begin{cases} 5x + 6y = 32 \\ 9x - 6y = -60 \end{cases}$$

SEGUNDO PASO: Como los coeficientes de y tienen signos contrarios, se suman miembro estas ecuaciones para eliminar y.

$$5x + 9x = 32 - 60$$

TERCER PASO: Se resuelve la ecuación en x.

$$14x = -28 \qquad \rightarrow \qquad x = -2$$

CUARTO PASO: Para calcular y se puede reemplazar este valor $x = -2$ en una ecuación del sistema o bien eliminar la x, multiplicando la primera ecuación por 3 y la segunda por 5.

$$\begin{cases} 15x + 18y = 96 \\ 15x - 10y = -100 \end{cases}$$

restando miembro a miembro

$$18y - (-10y) = 96 - (-100) \qquad \rightarrow \qquad 28y = 196 \qquad \rightarrow \qquad y = 7$$

Luego la solución del sistema es: S = {(–2, 7)}.

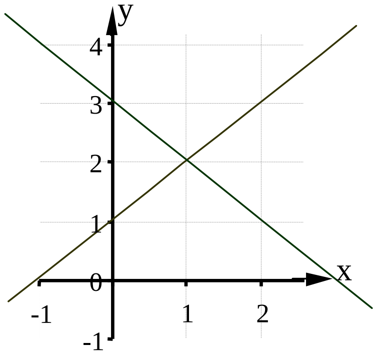
Intentar lo siguiente

Utilizar el método de eliminación para resolver los siguientes sistemas.

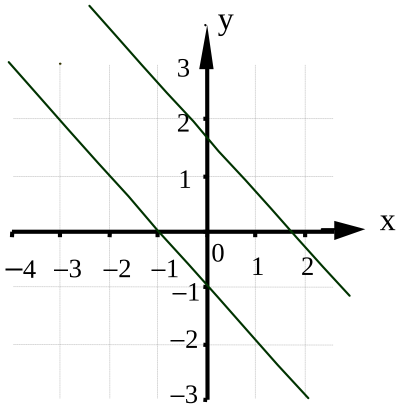
a) $\begin{cases} 5x - 3y = 22 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x - 4y = 5 \\ 3x + y = 5{,}75 \end{cases}$

III.3.2.3 Interpretación Geométrica de las Distintas Soluciones

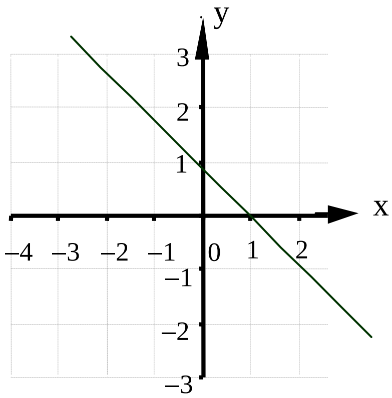
Las gráficas de dos ecuaciones lineales pueden ser dos rectas que se intersecan. También pueden ser dos rectas paralelas o una misma recta.



Dos rectas que se intersecan.
Solución única.



Rectas paralelas.
No hay solución.

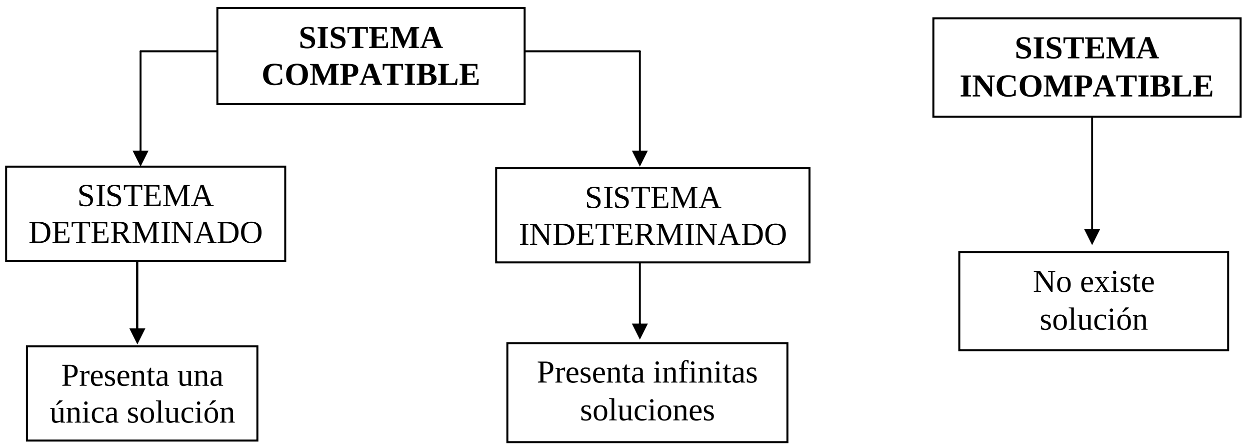


Una misma recta.
Infinitas soluciones.

III.3.2.4 Sistemas Compatibles y Sistemas Incompatibles

Resolver un sistema de ecuaciones lineales, es encontrar él o los valores **que satisfacen simultáneamente** las ecuaciones. Es decir al reemplazar los valores hallados, convierte cada ecuación en una afirmación verdadera. Si no se puede hallar esos valores, significa que no existe ningún valor que lo satisfaga, el sistema se dice que es **incompatible o inconsistente**. Si el sistema presenta solución se dice que es **compatible o consistente**.

Mediante un diagrama presentaremos las distintas situaciones que pueden existir:



Si un sistema de ecuaciones tiene al menos una solución, decimos que es **compatible o consistente**. Si un sistema no tiene solución, decimos que es **incompatible o inconsistente.**

Ejemplo: Determinar si el siguiente sistema es compatible o incompatible.

$$\begin{cases} x - 3y = 1 & [1] \\ -2x + 6y = 5 & [2] \end{cases}$$

Intentamos encontrar una solución. Multiplicamos [1] por 2 y sumamos el resultado a [2] (método de eliminación)

$$\begin{cases} x - 3y = 1 & [1] \\ 0 = 7 & 2*[1] + [2] \end{cases}$$

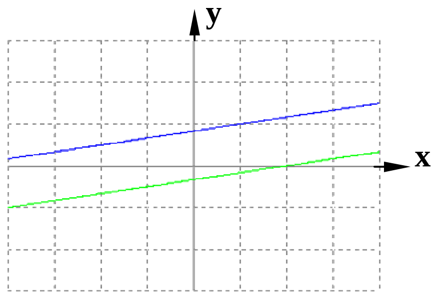
La última ecuación dice que $0 \cdot x + 0 \cdot y = 7$. No hay valores que puedan asumir las variables para los que esto sea cierto, de modo que no hay solución. El sistema es inconsistente. Podemos considerar el problema gráficamente. Las formas **pendiente – ordenada** al origen de las ecuaciones originales son

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \qquad [1]$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{6} \qquad [2]$$

Podemos ver que las rectas son paralelas. No tienen punto de intersección, de modo que el sistema es inconsistente

Si al resolver un sistema de ecuaciones llegamos a una ecuación que es a todas luces falsa, tal como 0 = 7, entonces el sistema es inconsistente.



Intentar lo siguiente

Determinar si los siguientes sistemas son consistentes o inconsistentes.

a) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 4y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

III.3.2.4.1 Sistemas Compatibles Indeterminados

Considerando el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ 10x + 4y = 6 \end{cases}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por 2, obtenemos la segunda de ellas. Sus gráficas son la misma recta. Por lo tanto, el sistema tendrá una infinidad de soluciones. Decimos que el sistema es **indeterminado**.

Sistemas Compatibles Indeterminados o Dependientes
Si un sistema de ecuaciones lineales tiene una infinidad de soluciones, decimos que el sistema es indeterminado o dependiente.

Ejemplo: Determinar si el siguiente sistema es indeterminado.

$$\begin{cases} 2x+3y=1 & [1] \\ 4x+6y=2 & [2] \end{cases}$$

Si multiplicamos a [1] por –2 y sumamos el resultado a [2] obtenemos

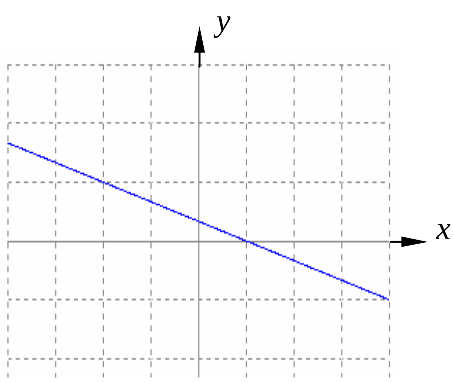
$$\begin{cases} 2x+3y=1 & [1] \\ 0=0 & -2*[1]+[2] \end{cases}$$

La última ecuación dice que $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$. Esto es verdad para todos los valores que puedan asumir las variables. El sistema es indeterminado.

También podemos considerar el problema gráficamente. La forma **pendiente – ordenada** al origen de las ecuaciones son

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3} \qquad [1]$$

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3} \qquad [2]$$



Las ecuaciones en la forma **pendiente – ordenada** al origen de las rectas son iguales. Esto significa que las gráficas son la misma. Este sistema de ecuaciones tiene una infinidad de soluciones. Cada punto de la recta con ecuación

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$$

tiene coordenadas que constituyen una solución. El sistema es indeterminado.

Intentar lo siguiente

Determinar si los siguientes sistemas son indeterminados.

a) $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ -6x+4y=-2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=4 \end{cases}$