POLINOMIOS

Síntesis Teórica

La expresión $5x^3+7x^2+4x-12$ recibe el nombre de **polinomio en la variable *x***. Es de *tercer grado*, porque la tercera es la máxima potencia de la variable x que aparece en él. Los *términos* de este polinomio son: $5x^3$, $-7x^2$, $4x$ y -12. Los *coeficientes* son 5, -7, 4, y -12.

Todos los exponentes de la variables de un polinomio deben ser enteros no negativos. Por consiguiente , las expresiones $x^3+x^{1/2}$ y $x^{-2}+3x+1$ no son polinomios, por los exponentes fraccionarios y negativos.

Cualquier constante diferente de cero, como 7, se clasifica como un polinomio de grado cero, ya que: $7=7x^0$. También al número cero nos referimos como una constante polinomial, pero no se le asigna grado alguno.

Los polinomios que tienen sólo uno, dos o tres términos reciben nombres especiales:

Números de términos	*Nombre del polinomio*	*Ejemplo*
uno	monomio	$17x^5$
dos	binomio	$\frac{1}{2}x^3-6x$
tres	trinomio	x^4-x^2+2

La variable x en el polinomio representa cualquier número real. Por este motivo expresiones como $2x$, $x+3$ y x^2+x representan también números reales, cuyo valor depende del que tome x. Por ejemplo si $x=3$ los valores de las expresiones dadas serán 6, 6 y 12 respectivamente.

Ya que cada símbolo de un polinomio es un número real, se pueden usar las propiedades del sistema de los números reales para operar con ellos.

OPERACIONES CON POLINOMIOS

Suma o resta de polinomios: se puede sumar o restar dos polinomios en x mediante la suma o resta de los coeficientes de potencias iguales. Por ejemplo:

Sumar $2x^2+x-1$ y $3x+2$

Solución:

$(2x^2+x-1)+(3x+2)$	se suprime paréntesis utilizando la regla de supresión de paréntesis,
$2x^2+x-1+3x+2$	se agrupan los términos semejantes haciendo uso de las propiedades conmutativa y asociativa,
$2x^2+(x+3x)-1+2$	se suman los coeficientes de las potencias iguales de x.

$2x^2+4x+1$

¿Por qué no es válido sumar los términos $2x^2$ y $4x$?

Para restar se deberá tener en cuenta que al suprimir los paréntesis cambiarán los signos de cada término del polinomio sustraendo.

Producto entre polinomios: para hallar el producto de dos polinomios, se utilizan la propiedad distributiva y las leyes de los exponentes, como muestra el siguiente ejemplo:

Multiplicar x^3+3x-1 y $2x^2-4x+5$.
Solución:

$$
\begin{aligned}
&(x^3+3x-1)(2x^2-4x+5)\\
&\qquad = (x^3+3x-1)(2x^2)+(x^3+3x-1)(-4x)+(x^3+3x-1)(5)\\
&\qquad = (2x^5+6x^3-2x^2)+(-4x^4-12x^2+4x)+(5x^3+15x-5)
\end{aligned}
$$

Combinando términos semejantes, se encuentra el producto

$$2x^5-4x^4+11x^3-14x^2+19x-5$$

Cuando se multiplican dos polinomios debemos multiplicar cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio. Se puede usar un formato vertical (con tal que conservemos los términos semejantes alineados) como una forma de organizar los datos. Se procede de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{rl}
x^3+3x-1 & \\
\times\ \underline{2x^2-4x+5} & \\
5x^3\ +15x-5 & \Leftarrow 5.(x^3+3x-1)\\
-4x^4\quad -12x^2+4x & \Leftarrow -4x.(x^3+3x-1)\\
\underline{2x^5\ +6x^3-2x^2} & \Leftarrow 2x^2.(x^3+3x-1)\\
2x^5-4x^4+11x^3-14x^2+19x-5 &
\end{array}
$$

División de polinomios: 1) la división de un polinomio por un monomio usa las propiedades de las fracciones y las leyes de los exponentes como se muestra a continuación.
Dividir $15x^4+25x^3-35x^2$ por $5x^2$

Solución:

$$
\begin{aligned}
\frac{15x^4+25x^3-35x^2}{5x^2} &= \frac{15x^4}{5x^2}+\frac{25x^3}{5x^2}-\frac{35x^2}{5x^2}\\
&= 3x^2+5x-7
\end{aligned}
$$

Observación: es válido hacer notar que el monomio divisor debe ser de grado menor o igual al grado del dividendo para asegurar que el cociente sea un polinomio. Por ejemplo:
Dividir $15x^4+25x^3-35x^2$ por $5x^5$
Solución:

$$
\begin{aligned}
\frac{15x^4+25x^3-35x^2}{5x^5} &= \frac{15x^4}{5x^5}+\frac{25x^3}{5x^5}-\frac{35x^2}{5x^5}\\
&= \frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{7}{x^3} \quad \text{esta expresión algebraica no es polinómica.}
\end{aligned}
$$

2) La división de polinomios se realiza con un algoritmo similar al de la división entera. Se explicará con un ejemplo.

Dividir el polinomio x^4-2x^2-8 por x^2+2

Solución:

$$\begin{array}{lrl} \text{Dividendo} \Rightarrow & x^4-2x^2-8 & \left| \underline{\,x^2+2\,} \right. \quad \Leftarrow \text{divisor} \\ & \underline{x^4+2x^2} \quad\;\; & \;\; x^2-4 \quad \Leftarrow \text{Cociente} \\ & -4x^2-8 & \\ & \underline{-4x^2-8} & \\ & 0 & \Leftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

El procedimiento es el siguiente:

1. Se divide x^4 (el primer término del dividendo) por x^2 (el primer término del divisor), para obtener x^2 (el primer término del cociente).
2. Se multiplica x^2+2 (el divisor) por x^2 y se escribe el producto x^4+2x^2 debajo de los términos correspondientes en el dividendo.
3. Se resta para obtener $-4x^2-8$, el cual se trata como el nuevo dividendo.
4. Se divide $-4x^2$ (el primer término del nuevo dividendo) por x^2, se obtiene -4 (el segundo término del cociente).
5. Se multiplica x^2+2 por -4 y se resta el producto del nuevo dividendo.
6. Obsérvese que la diferencia anterior es 0, representa el resto de la división e indica que el polinomio dividendo es múltiplo del divisor.

Analizar el siguiente ejemplo:

Dividir el polinomio $3x^3-x^2-2x+6$ por x^2+x

Solución:

$$\begin{array}{lrl} \text{Dividendo} \Rightarrow & 3x^3-x^2-2x+6 & \left| \underline{\,x^2+x\,} \right. \quad \Leftarrow \text{divisor} \\ & \underline{3x^3+3x^2} \qquad\qquad & \;\; 3x-4 \quad \Leftarrow \text{Cociente} \\ & -4x^2-2x+6 & \\ & \underline{-4x^2-4x} \quad\;\; & \\ & 2x+6 & \Leftarrow \text{Residuo} \end{array}$$

En este caso el resto es $2x+6$ y su grado es menor que el grado del divisor, por lo tanto la división está terminada. El polinomio dividendo no es múltiplo del divisor.

Recordar que en la división entera se cumple que $D=d.C+R$, es decir que el dividendo (D) es igual al divisor (d) por el cociente (C) más el resto (R), lo cual proporciona una prueba para la división de polinomios.

TEOREMA DEL RESTO Y FACTOREO

El siguiente teorema relaciona el residuo R obtenido por la división de un polinomio $P(x)$ por $x-c$ y el valor del polinomio en $x=c$.

“Cuando un polinomio $P(x)$ se divide por $x-c$, el residuo R es el valor del polinomio en $x=c$, $R=P(c)$.”

De acuerdo a lo expresado y retomando la expresión para la division entera de poloinomios, se tiene que el polinomio $P(x)$ podrá ser escrito como

$$P(x) = (x - c).C(x) + R \qquad (1)$$

donde $C(x)$ es el cociente de dividir $P(x)$ por $x - c$ y el residuo R es igual a $P(c)$.

Por ejemplo, si $P(x) = x^3 - 3.\, x^2 + 4$, es posible anticipar cuál será el resto de dividirlo por x – 1, ya que según el teorema se tendrá: $R = P(1)$

$$R = 1^3 - 3.1^2 + 4$$

$$R = 2$$

También se puede escribir $P(x)$ en términos de $x - 1$ encontrando el cociente $C(x)$ y utilizando la expresión (1):

$$P(x) = (x - 1).C(x) + 2$$

Si $P(c) = 0$, entonces $x = c$ se constituye en una raíz de $P(x)$ resultando de (1) la siguiente expresión:

$$P(x) = (x - c).C(x)$$

donde $P(x)$ queda escrito como un producto, es decir $P(x)$ está factoreado.

Así, si $x = 2$, se tiene que $P(2) = 2^3 - 3.2^2 + 4 = 0$ y $x - 2$ será un factor de $P(x)$ y podrá ser factoreado de la siguiente manera:

$$P(x) = (x - 2).(x^2 - x - 2)$$

donde $C(x) = x^2 - x - 2$.

APLICACIÓN DEL FACTOREO

El cociente de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ se denomina expresión racional. Si estos polinomios tienen en común algún factor entonces es posible simplificarlo y escribir $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en forma más sencilla.

Por ejemplo en la expresión $\dfrac{x^2 - 5x - 6}{x^3 + 1}$ se tiene que $x = -1$ es raíz del numerador y del denominador. Así ambos podrán ser escritos como producto donde uno de los factores será $x - (-1)$, es decir $x + 1$:

$$\frac{x^2 - 5x - 6}{x^3 + 1} = \frac{(x+1)(x-6)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{x - 6}{x^2 - x + 1}$$

El numerador tiene una raíz $x = 6$ y el denominador tiene raíces complejas conjugadas. Como no comparten raíces, carecen de factores comunes y no es posible simplificar más la última expresión. Finalmente se obtiene que

$$\frac{x^2 - 5x - 6}{x^3 + 1} = \frac{x - 6}{x^2 - x + 1} \quad \text{para} \quad x \neq -1$$

Nota: La condición $x \neq -1$ debe ser considerada porque las expresiones en ambos miembros son equivalentes para cualquier valor de x excepto para $x = -1$, donde la expresión original no está definida.