III.2.6 TRABAJO PRÁCTICO: FUNCIONES POLINÓMICAS

1. Dados los siguientes polinomios:

$\mathbf{P}(x) = 4x^3 + x^2 - 2x - 13$ $\quad$ $\mathbf{Q}(x) = 2x^2 + 3x + 9$ $\quad$ $\mathbf{R}(x) = -x^3 + 2$

$\mathbf{S}(x) = x - 5$ $\quad$ $\mathbf{T}(x) = 2x^2$

Encontrar:

a) $3.\mathbf{Q}(x)$ $\quad$ e) $\mathbf{S}(x).\mathbf{R}(x)$ $\quad$ i) $\mathbf{T}(x).\mathbf{Q}(x)$

b) $-5.\mathbf{S}(x)$ $\quad$ f) $\mathbf{T}(x).\mathbf{R}(x)$ $\quad$ j) $\mathbf{Q}(x).\mathbf{R}(x)$

c) $\mathbf{P}(x) + \mathbf{Q}(x)$ $\quad$ g) $\mathbf{P}(x) + 4\mathbf{R}(x)$ $\quad$ k) $\mathbf{T}(x).\mathbf{S}(x).\mathbf{R}(x)$

d) $\mathbf{Q}(x) + \mathbf{R}(x)$ $\quad$ h) $\mathbf{Q}(x) - \mathbf{P}(x)$ $\quad$ l) $(\mathbf{S}(x))^2$

2. Dados los siguientes polinomios:
i) Predecir el grado de cada uno de ellos.
ii) Reducirlos a su mínima expresión.

a) $\mathbf{P}(x) = 7x - (3 - x) - 2x$

b) $\mathbf{P}(x) = (7x + 5) - (2x + 3)$

c) $\mathbf{P}(x) = (x + 2).(x - 2)$

d) $\mathbf{P}(x) = (3 - 5x).(3 + 5x)$

e) $\mathbf{P}(x) = (-2x - 3).(3x + 6)$

f) $\mathbf{P}(x) = 2x^2.(2x + 1 - 10x^2)$

g) $\mathbf{P}(x) = (\sqrt{x} - 10).(\sqrt{x} + 10)$

h) $\mathbf{P}(x) = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - (x^2 + 2x + 1)$

i) $\mathbf{P}(x) = (\sqrt{x} - \sqrt{2}).(\sqrt{x} + \sqrt{2}) + 1$

j) $\mathbf{P}(x) = (x + 3).(2x + 2) - (6x + 10)$

3. i) Use el algoritmo de la división para encontrar el cociente y el resto de las siguientes divisiones entre polinomios.

a) $(8x^4 - 8x^2 + 6x + 6) : (2x^2 - x)$

b) $(x^3 - x^2 + 7) : (x - 1)$

c) $(-8x^5 + 10x^4 - 8x^3 - 11x^2 + 17x + 9) : (2x^2 + 3x + 1)$

d) $(x^3 + 9x^2 - 3x - 1) : (2x - 1)$

e) $(5x + 2x^3 - 3) : (x + 2)$

f) $(x^3 + 4x^2 + 3x - 2) : (x + 2)$

ii) Verifique cada resultado teniendo en cuenta la relación entre dividendo, divisor, cociente y resto. ($\mathbf{P}(x) = \mathbf{Q}(x).\mathbf{C}(x) + \mathbf{R}(x)$).

iii) Escribir el resultado de las divisiones dadas teniendo en cuenta que $\dfrac{\mathbf{P}(x)}{\mathbf{Q}(x)} = \mathbf{C}(x) + \dfrac{\mathbf{R}(x)}{\mathbf{Q}(x)}$.

4. Se dan los siguientes polinomios

P(x) = $-x^2 - 6x + 4$ $\quad$ Q(x) = $x - 1$ $\quad$ R(x) = $x^2 + 6x - 4$ $\quad$ S(x) = $4 - x^2$

Se pide, obtener mediante operaciones entre los mismos, un polinomio con las características indicadas en cada caso.

a) De dos términos.

b) De grado 3.

c) De grado 5.

d) Nulo.

e) Sea un monomio en "x" con coeficiente positivo.

f) Sea un cuatrinomio de 3er grado.

5. Dadas las siguientes divisiones:

a) $(x^4+x^3-2x^2+3x-1):(x-2)$

b) $(x^5-32):(x-2)$

c) $(-2x^4+x^2+4):(x+3)$

d) $(\frac{1}{8}-x^3):\left(x-\frac{1}{2}\right)$

e) $(x^4-3x^3+7x^2-2x+1):(x+2)$

i) Utilizar el Teorema del Resto para establecer si el polinomio dividendo es divisible por el polinomio divisor.
ii) Cuando sea posible, factorearlo en término del divisor, aplicando la regla de Ruffini para encontrar el cociente.

6. Factorear el polinomio $\mathbf{P}(x)$ = 4 x^5 + 2 x^2 – 10 x^6 + 20 x^3 extrayendo como factor común el indicado en cada caso.

a) $\frac{1}{2}x$ b) $4x^2$ c) $5x^4$

7. Teniendo en cuenta que: "Un polinomio $\mathbf{P}(x)$ tiene un factor x – c, si y sólo si: P(c) = 0" (Teorema del factor).

i) Establecer si el binomio dado $x - \text{c}$ es un factor del polinomio P(x). Si lo es, factorice P(x)

a) $\mathbf{P}(x)=x^3+6x^2+11x+6;$ $x+1$

b) $\mathbf{P}(x)=x^3+5x^2-2x-24;$ $x-3$

c) $\mathbf{P}(x)=-x^3+7x+6;$ $x+2$

d) $\mathbf{P}(x)=x^3-6x^2+11x-6;$ $x-1$

ii) Establecer si existe un factor " x – c " para los siguientes binomios. En caso afirmativo, factorizar los binomios dados en término del factor encontrado

a) x^2+4
b) x^2-4
c) x^2-1
d) $\frac{1}{8}-x^3$
e) $2+x^3$
f) x^5-32
g) x^2-5
h) $16x^2-9$
i) $2-x^3$
j) x^4-3

8. i) Para cada polinomio de *segundo grado*, encontrar los factores x – c.

a) $\mathbf{P}(x)=-x^2+2x-3x+6$

b) $\mathbf{P}(x)=\frac{1}{2}x^2$

c) $\mathbf{P}(x)=2x^2-2x-4$

d) $\mathbf{P}(x)=-x^2$

e) $\mathbf{P}(x)=-x^2+4$

f) $\mathbf{P}(x)=x^2-1$

g) $\mathbf{P}(x)=x^2+4x+4$

h) $\mathbf{P}(x)=-\frac{1}{3}x^2+2x-3$

i) $\mathbf{P}(x)=x^2-6x+9$

i) $\mathbf{P}(x)=4x^5+2x^2-10x^6+20x^3$

ii) Escribir los polinomios dados como producto de sus factores.

9. Simplificar las siguientes expresiones racionales.

a) $\dfrac{x^2}{x^2+2x}$

b) $\dfrac{n^2-1}{n^3-n^2+n-1}$

c) $\dfrac{3x^2+x-10}{5x-3x^2}$

d) $\dfrac{x^2-5x}{5-x}$

e) $\dfrac{x^3-x}{x^3-2x^2+x}$

f) $\dfrac{9y^2+12y^8-15y^6}{3y^3}$

g) $\dfrac{2x+4}{x^3+5x^2-2x-24}$

h) $\dfrac{3x^2+3x-6}{2x^2+6x+4}$

i) $\dfrac{8-x^3}{x^2-x}$

j) $\dfrac{-6a^3+9a^6-12a^9}{-2a^3}$

k) $\dfrac{4x^2+12x+9}{4x^2-9}$

l) $\dfrac{2x^3+x^2-3x+1}{2x-1}$

m) $\dfrac{n-1}{n^2-1}$

10. Dadas las siguientes funciones polinómicas:

$\mathbf{P}(x)=2x-4$ $\mathbf{Q}(x)=4x^2+2x^3-6x$ $\mathbf{R}(x)=-6-3x+3x^2$

$\mathbf{S}(x)=x^4-x^3-6x$ $\mathbf{T}(x)=5-x$

i) Indicar el grado de cada una de ellas y determinar los coeficientes de los términos de grado cero, uno, dos, tres y cuatro.

ii) Encontrar el valor de la función polinómica para los valores de "x" que se indican:

$x_1=0$ $x_2=3$ $x_3=-3$ $x_4=1$ $x_5=-2$ $x_6=4$ $x_7=-1$

iii) Ubicar algunos puntos $(x_i,\mathbf{P}(x_i))$ en un sistema de ejes cartesianos e indicar en cuáles de las funciones polinómicas es posible anticipar su gráfico.

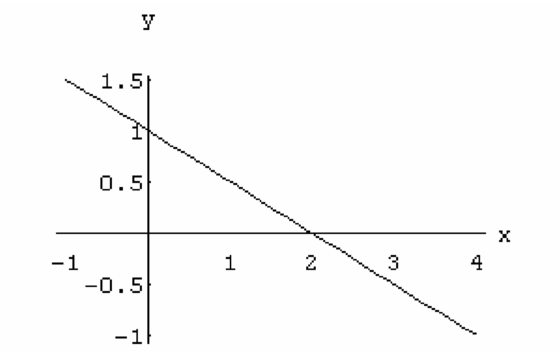
11. Sabiendo que la forma general de la función polinómica es:

$$\mathrm{P}(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n\,.$$

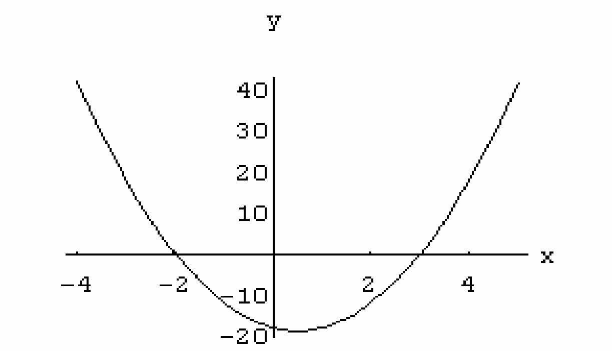
i) Determinar a partir del gráfico:
   a) el valor de "a_0" y completarla.
   b) las raíces reales de cada función polinómica.

ii) Verificar las raíces halladas, resolviendo las ecuaciones P(x) = 0, a partir de la factorización de las funciones polinómicas dadas. Individualizar las raíces múltiples.

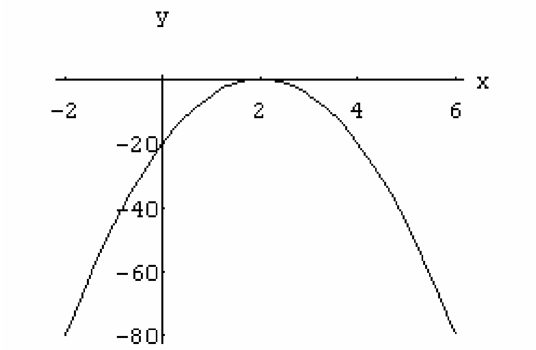
a) $\mathbf{P}(x) = -\frac{1}{2}x + a_0$



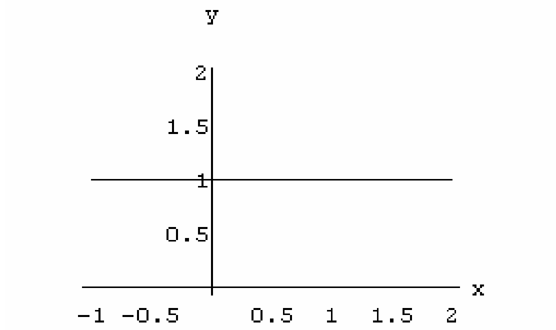
b) $\mathbf{P}(x) = 3x^2 - 3x + a_0$



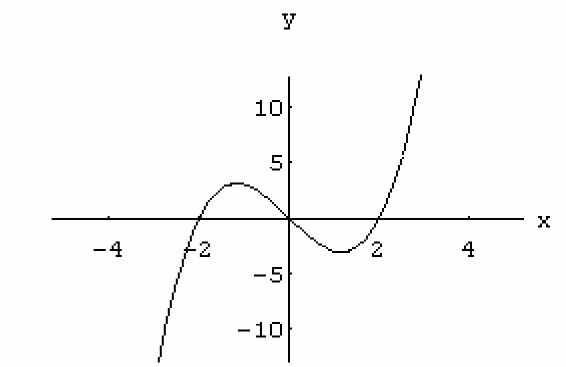
c) $\mathbf{P}(x) = -5x^2 + 20x + a_0$



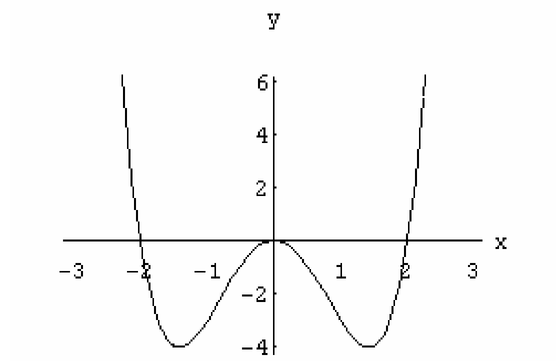
d) $\mathbf{P}(x) = a_0$



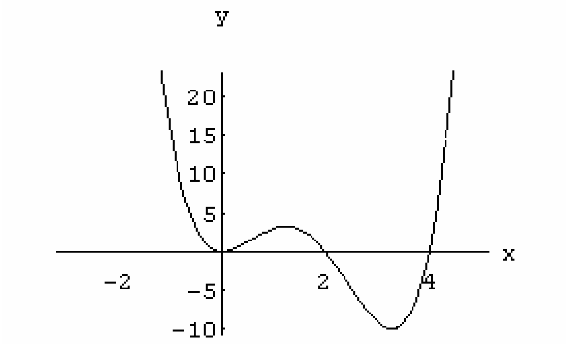
e) $\mathbf{P}(x) = x^3 - 4x + a_0$



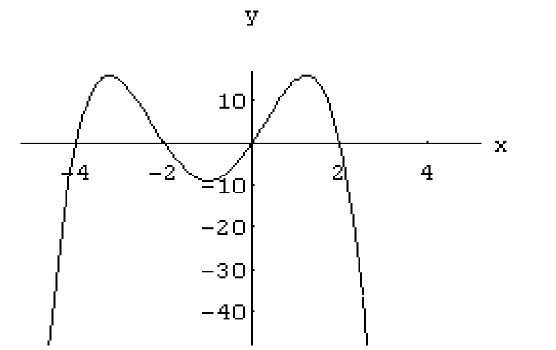
f) $\mathbf{P}(x) = x^4 - 4x^2 + a_0$



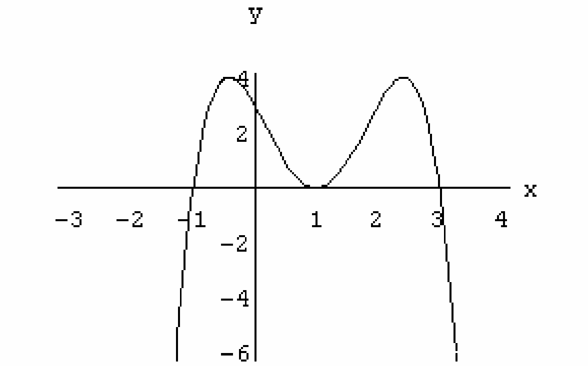
g) $\mathbf{P}(x) = x^4 - 6x^3 + 8x^2 + a_0$



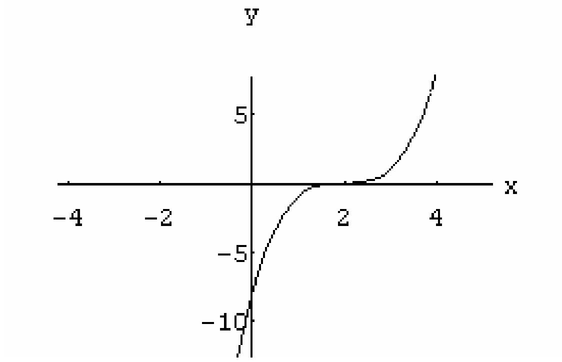
h) $\mathbf{P}(x) = -x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 16x + a_0$



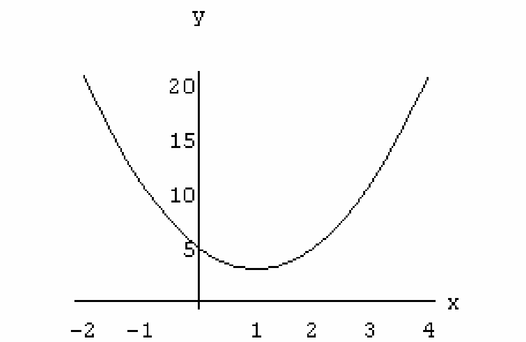
i) $\mathbf{P}(x) = -x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x + a_0$



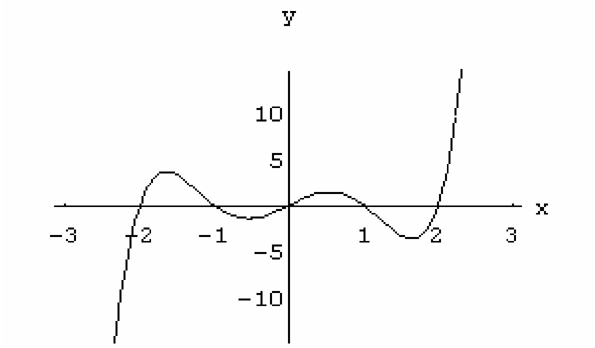
j) $\mathbf{P}(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + a_0$



k) $\mathbf{P}(x) = 2x^2 - 4x + a_0$



l) $\mathbf{P}(x) = x^5 - 5x^3 + 4x + a_0$



12. i) Utilizando la raíz y el término a_0, graficar los siguientes funciones polinómicas de primer grado.

a) $\mathbf{P}(x) = -x + 3$

b) $\mathbf{P}(x) = x + \dfrac{2}{3}$

c) $\mathbf{P}(x) = -\dfrac{4}{3}x + 4$

d) $\mathbf{P}(x) = -4x$

ii) Graficar las funciones polinómicas del ejercicio 8 y 12i indicando sus puntos característicos.

13. Graficar las siguientes funciones polinómicas de segundo grado cuyas raíces son números complejos:

a) $\mathbf{P}(x) = x^2 + 1$

b) $\mathbf{P}(x) = x^2 - 4x + 5$

c) $\mathbf{P}(x) = -x^2 - 4$

d) $\mathbf{P}(x) = x^2 + 2x + 10$

14. a) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 3) con pendiente – 2. Graficar
b) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (–4, 2) con pendiente 0. Graficar
c) Encontrar la ecuación de la recta cuya abscisa al origen es 1 y pendiente – 1/4. Graficar

15. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos señalados y graficarlas:
a) (2, 3) y (2, 6)
b) (1, 2) y (– 1, –2)
c) (– 2, 5) y (4, –6)