III AREA MATEMATICA

OBJETIVOS

Objetivos Generales

- Actualizar los conocimientos matemáticos básicos adquiridos en el nivel medio/polimodal.
- Lograr el manejo apropiado del lenguaje matemático.
- Desarrollar habilidades para la presentación escrita de un proceso matemático.
- Familiarizarse en la lectura comprensiva e interpretación de textos de matemática.
- Desarrollar habilidades para relacionar el lenguaje analítico con el lenguaje gráfico.
- Generar procesos de razonamientos lógicos, creativos y deductivos.
- Promover el desarrollo de habilidades de estudio responsable, trabajo independiente y cooperativo.

Objetivos específicos

- Actualizar los conocimientos básicos de las operaciones con números y sus propiedades.
- Identificar las funciones polinómicas, sus diferentes representaciones y elementos característicos.
- Utilizar operaciones con polinomios en simplificación y resolución de ecuaciones racionales.
- Resolver problemas utilizando ecuaciones de primer grado con una y dos incógnitas.
- Resolver problemas utilizando sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.
- Analizar comparativamente el cálculo analítico y la representación gráfica.
- Utilizar distintos sistemas de medición de ángulos distinguiendo el más adecuado en determinados casos
- Formular y resolver problemas utilizando la trigonometría.

CONTENIDOS

Tema 1: Conjuntos Numéricos

Números: Naturales, Enteros, Racionales, Irracionales y Reales. Operaciones y propiedades. Notación científica. Orden. Representación en la recta numérica. Aplicación de las propiedades de las resoluciones de ecuaciones e inecuaciones. Número complejos. Forma binómica.

Tema 2: Funciones Polinómicas

Polinomios. Operaciones con polinomios. Divisibilidad de polinomios: Teorema del Resto y Teorema del factor. Factoreo. Simplificación de expresiones racionales. Funciones Polinómicas. Gráficos. Intersección con los ejes. Función lineal. Función cuadrática.

Tema 3: Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ecuaciones de primer grado con una y con dos variables. Solución analítica y gráfica. Sistemas de dos ecuaciones con dos variables. Resolución analítica por igualación, sustitución o eliminación. Interpretación geométrica de las distintas soluciones.

Tema 4: Trigonometría

Sistemas de medición de ángulos. Relaciones trigonométricas de un ángulo. Relación fundamental de la trigonometría. Círculo trigonométrico. Funciones trigonométricas. Representación gráfica. Identidades trigonométricas. Aplicaciones: Resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos, Forma trigonométrica de los números complejos.

INDICE GENERAL

III.1 UNIDAD 1: CONJUNTOS NUMÉRICOS

III.1.1 NUMEROS. OPERACIONES. PROPIEDADES

III.1.1.1 Los Números Naturales

Cada día, en nuestra conversación, por la televisión, en la lectura de por ejemplo un diario, o en el trabajo está presente la idea de conjunto.

Ejemplos:

- Al pasar por la plaza se levantó una bandada de palomas.
- En el diario leemos que nuestro equipo de fútbol preferido ganó el partido.

Todos entendemos que una bandada es un conjunto de pájaros, el equipo de fútbol es un conjunto de jugadores. En todos estos ejemplos, se trata de sinónimos de la palabra conjunto y no una definición.

En matemática, utilizamos el término conjunto sin una definición previa y con el mismo significado que se le da en la vida diaria.

Otro ejemplo:

- El conjunto de las notas musicales

Este conjunto sería → A = {do, re, mi, fa, sol, la, si}

Constantemente relacionamos conjuntos con distintos fines; uno de ellos es el de contar sus elementos. Para contar utilizamos los **números naturales**.

Al principio, el hombre fue relacionando conjuntos para contar sus elementos. Al comparar cantidades, se acercó a nuestra noción actual de contar mediante correspondencias, por ejemplo, con partes del cuerpo: "tengo tantas vacas como dedos en una mano".

Cada vaca se relaciona con un único dedo; los elementos del conjunto vaca se pueden "aparear" con el conjunto de los dedos de la mano; decimos, entonces, que estos dos conjuntos son *coordinables*, o que tienen el mismo *cardinal*.

- ➢ El cardinal de un conjunto finito es un **número natural**

Ejemplos:

El cardinal del conjunto de vacas es el número 5. El cardinal del conjunto de notas musicales es 7. El cardinal del conjunto vacío es 0.

- ➢ Al conjunto de los números naturales lo designamos con **N**: $\mathbf{N_0} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

- ➢ Las propiedades de $\mathbf{N_0}$ son:
  1. Es **infinito** (∞).
  2. Tiene primer elemento: **cero**. No tiene último elemento.
  3. Todo número natural tiene un **sucesor**. Un número natural y su sucesor se dicen **consecutivos**.
  4. Todo número (excepto cero) tiene un **antecesor**.
  5. El sucesor **c** de un número natural **b** es mayor que él y su antecesor **a** es menor. Simbólicamente: $\mathbf{a < b < c}$

6. Entre dos números naturales existe siempre un número finito de números naturales. Por eso se dice que es un conjunto **discreto**.

III.1.1.2 Los Números Negativos

Entonces, el hombre conoce los números naturales desde el momento en que tuvo necesidad de contar, pero éstos no le alcanzan para expresar muchas situaciones.

Ejemplos:

- Las temperaturas bajo cero
- El saldo deudor de una cuenta bancaria

Por eso fue necesaria la creación de los **números negativos**.

➢ Los **números negativos** son los opuestos de los números naturales distintos de cero. El 0 no es ni positivo ni negativo.

➢ El conjunto o grupo de los **números enteros** es la unión del conjunto de los números **enteros negativos**, el conjunto que tiene a cero como único elemento y el conjunto de los números **enteros positivos**.

➢ Al conjunto de los **números enteros** lo designamos con **Z**

$$\mathbf{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

➢ Las propiedades de **Z** son:

1. Es **infinito** (∞).
2. No tiene primero ni último elemento.
3. Todo número entero tiene un **sucesor**. Un número entero y su sucesor se dicen **consecutivos**.
4. Todo número entero tiene un **antecesor**.
5. El sucesor **c** de un número entero **b** es mayor que él y su antecesor **a** es menor. Simbólicamente: $\mathbf{a} < \mathbf{b} < \mathbf{c}$
6. Entre dos números enteros existe siempre un número finito de números enteros. Por eso, el conjunto de números enteros es **discreto**.

III.1.1.3 Los Números Fraccionarios

Estos números surgen de la necesidad de expresar fracciones de unidad.

Ejemplos:

- Tomás comió tres de las cuatro partes de las que constaba su tableta de chocolate → $\frac{3}{4}$
- 4 dividido 3 → $\frac{4}{3}$

- Se llama **fracción** a un cociente de números enteros. Todo número que puede ser expresado mediante una fracción es un **número racional**. A este conjunto de números lo designamos con la letra **Q**.

- Todo **número entero** se puede expresar como una **fracción** con denominador 1.
  Ejemplos: $3 = \frac{3}{1}$; $-4 = \frac{-4}{1}$

- Todo **número racional** se puede expresar como **número decimal exacto o periódico**.
  Ejemplos: $0{,}4 = \frac{4}{10}$; $\frac{1}{3} = 0{,}\widehat{3}$

- Dos fracciones, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, que cumplen la condición $a \cdot d = c \cdot b$ son **equivalentes**. Esto significa que expresan el mismo número racional.

- La unión del conjunto **Z** de números enteros y el conjunto de **números fraccionarios** que no representan números enteros es el conjunto **Q** de los **números racionales**.

- Las propiedades de **Q** son:
  1. Es **infinito** (∞).
  2. No tiene primero ni último elemento.
  3. Entre dos números racionales existen infinitos racionales. Por ello, se dice que el conjunto de números racionales es **denso**.

Ejemplo: Entre $\frac{1}{2}$ y 1 se puede encontrar tantos racionales como se quiera. Basta convertir estas fracciones en otras equivalentes de denominador mayor.

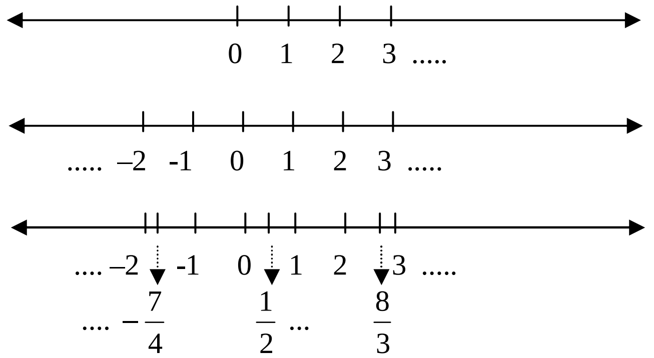
$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{2} & & & & 1 \\
\frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{2}{2} \\
\frac{4}{8} & \frac{5}{8} & \frac{6}{8} & \frac{7}{8} & \frac{8}{8} \\
\frac{8}{16} & \frac{8}{17} & \dots\dots & & \frac{16}{16} \\
 & & \dots\dots\dots & &
\end{array}$$

4. Como consecuencia de la propiedad anterior, ningún número racional tiene sucesor ni antecesor.
5. **Q** es un conjunto ordenado por la relación menor o igual. . Si los números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son fracciones irreducibles, se cumple que: $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d > c \cdot b$

Ejemplos:

- $\frac{2}{3} > \frac{1}{5}$ porque $2 \cdot 5 > 3 \cdot 1$
- $-\frac{1}{2} < \frac{6}{7}$ porque toda fracción negativa es menor que cualquier fracción positiva.
- $\frac{3}{4} < \frac{4}{3}$ porque toda fracción cuyo numerador es mayor que el denominador es mayor que la unidad.

La representación en la recta numérica de los distintos números que hemos visto hasta aquí es:



- ➢ **Naturales**
- ➢ **Enteros**
- ➢ **Racionales**

La pregunta: ¿los números racionales completan la recta numérica?. O, la misma pregunta con otras palabras, ¿quedan puntos de la recta a los que no les corresponde ningún número racional?.

....

....

III.1.1.4 Los Números Irracionales

La ecuación $x^2 - 2 = 0$ no tiene solución en el campo de los números racionales. La solución a esta ecuación requiere la descripción de los números irracionales.

Los números irracionales son aquellos cuya expresión decimal es infinita y no tiene un período, por ejemplo:

- El número pi: π
- El número de oro: $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- Las raíces de índice par de números naturales cuyos resultados no son naturales
  Ejemplo: $\sqrt{2}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt[4]{8}$; etc.
- Las raíces de índice impar de números enteros cuyos resultados no son enteros
  Ejemplo: $\sqrt[3]{7}$; $\sqrt[5]{-2}$; etc.

Por tanto:

- Los números irracionales no se pueden expresar como una fracción o como un cociente de dos enteros.

Para obtener un número irracional, es suficiente escribir un número cuyas cifras decimales sean infinitas y no presenten periodicidad.

Por ejemplo: 3,515511555111555551111155555511111.......

La notación para los números irracionales será **I**.

III.1.1.5 Los Números Reales

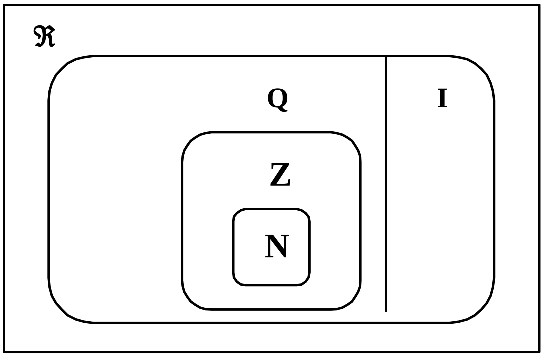
- La unión del conjunto **Q** de números **racionales** y el conjunto **I** de números **irracionales** es el conjunto $\Re$ de los números **reales**, que puede representarse mediante una recta continua llamada **recta real**. Cada punto de esta recta representa un número real, y a cada número real le corresponde un único punto sobre la recta. Por ello, con los números reales se completa la recta numérica.

- Las propiedades de $\Re$ son:
  1. Es **infinito** (∞).
  2. No tiene primero ni último elemento.
  3. Entre dos números reales existe siempre un número infinito de reales. Se dice que el conjunto de números reales es **denso**.
  4. Ningún número real tiene sucesor ni antecesor.
  5. El conjunto $\Re$ es un conjunto **totalmente ordenado** por la relación menor o igual.
  6. Es un conjunto **continuo** porque completa la recta numérica

Hemos visto a los números naturales, enteros, racionales y reales. Un número natural es también entero, y un número entero puede escribirse como un número racional utilizando una fracción que tenga un 1 en el denominador.

$$\text{Si } m \text{ es entero, entonces } \frac{m}{1} = m \text{ es racional}$$

Tenemos así dos grandes grupos de números: los racionales y los irracionales. Estos dos grandes grupos forman el conjunto de los números reales.



Los números reales tampoco son la solución a todas las ecuaciones (como, por ejemplo $x^2+1=0$), sin embargo nos aportan la estructura necesaria para comenzar a trabajar con situaciones matemáticas en las que utilizaremos las operaciones y sus propiedades definidas en los distintos conjuntos numéricos que describimos anteriormente.

Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de falsedad, justifica tu respuesta:

a) $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}=5\sqrt{6}$ ....

b) $\sqrt{2}=\frac{1414}{1000}$ ....

c) $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{2}=1{,}99396$ ....

d) El producto de dos números irracionales es siempre otro número irracional.................

e) El cuadrado de un número irracional siempre es un número racional.............................

f) El producto de un entero por un irracional es un número irracional................................

III.1.1.6 Operaciones en los distintos Conjuntos Numéricos. Propiedades

Desarrollaremos a continuación las operaciones fundamentales y algunas de sus propiedades considerando los dos grandes grupos de números: los racionales y los irracionales

III.1.1.6.1 Adición y Sustracción de Números Racionales

Para sumar o restar fracciones de igual denominador, el resultado es otra fracción de igual denominador que las dadas, y cuyos numeradores se obtienen sumando o restando los numeradores dados. En símbolos:

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b}$$

Cuando sumamos o restamos fracciones de distinto denominador, buscamos fracciones equivalentes a las dadas que tengan igual denominador. En símbolos:

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm cb}{bd}$$

Ejemplos: $\frac{2}{3}+\frac{7}{3}=\frac{9}{3}$ $\qquad$ $\frac{4}{5}-\frac{3}{2}+\frac{5}{4}=\frac{16}{20}-\frac{30}{20}+\frac{25}{20}=\frac{11}{20}$

III.1.6.2 Multiplicación y División de Números Racionales

Para multiplicar fracciones, hacemos: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$

Para dividir fracciones, hacemos: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ $\quad (\text{con } c \neq 0)$

Ejemplos: $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ $\qquad \frac{4}{7} \div \frac{3}{14} = \frac{4}{7} \cdot \frac{14}{3} = \frac{4 \cdot 14}{7 \cdot 3} = \frac{8}{3}$

III.1.1.6.3 Potenciación y Radicación de Números Racionales

Si p es un número racional y k un entero positivo; $p^0 = 1 \ \ si \ \ p \neq 0$; $p^1 = p$;

$$p^k = \underbrace{p \cdot p \cdot p \cdots p}_{\text{k factores}}$$

$$\underbrace{p^{-k} = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} \cdots}_{\text{k factores}} \frac{1}{p} \quad \text{si} \quad p \neq 0$$

Si p es un número racional y n un número natural; $\sqrt[n]{p} = q \Leftrightarrow q^n = p$

Cuando realizamos las operaciones con números (sumamos, restamos, multiplicamos, etc.) hay ciertas reglas que debemos respetar; a este conjunto de reglas las denominamos propiedades. Conocer estas propiedades y manejarlas con soltura es importante.

No vamos a exhibir en este cuadernillo una lista exhaustiva de propiedades sino sólo aquellas que se utilizan con frecuencia y se olvidan con facilidad. En caso de "olvidos" de propiedades que no figuran aquí deberías recurrir a un texto de EGB3 o Polimodal para consultar al respecto.

Se consideran a, b, c números que pertenecen a $\Re$ (esto significa que también se cumplen las propiedades en los otros conjuntos numéricos porque $\Re$ los incluye)

1) $a + b = b + a$ conmutatividad de la suma
2) $a \cdot b = b \cdot a$ conmutatividad del producto
3) $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$ distributividad del producto respecto a la suma
4) $\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ distributividad del cociente respecto de la suma

Sin embargo **<u>no</u>** hay una propiedad distributiva si la suma está en el denominador, es decir

$$\frac{a}{b + c} \neq \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$$

Por ejemplo: $\frac{6}{3+1} = \frac{6}{4} = 1{,}5$ y no es igual a $\frac{6}{3} + \frac{6}{1} = 8$

Las propiedades 3) y 4) valen también para la resta. Es decir

3') $c \cdot (a - b) = c \cdot a - c \cdot b$

4') $\dfrac{a-b}{c} = \dfrac{a}{c} - \dfrac{b}{c}$

Sigamos con más propiedades

III.1.1.6.4 Propiedades de las Operaciones sobre Igualdades

5) Si $a = b$ entonces $a + c = b + c$

6) Si $a = b$ entonces $a \cdot c = b \cdot c$

7) Si $a = b$ y $c \neq 0$ entonces $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{c}$

8) Si $a \cdot b = 0$ entonces $a = 0$ ó $b = 0$ o ambas

Veamos una aplicación. Resolver la ecuación

$$\frac{2}{3} \cdot (x - 1) = x + 1$$

Comenzamos multiplicando ambos miembros por 3.

$3 \cdot \dfrac{2}{3} \cdot (x-1) = 3 \cdot (x+1)$

$2 \cdot (x-1) = 3 \cdot (x+1)$ distribuimos

$2x - 2 = 3x + 3$ sumamos 2 en ambos miembros

$2x = 3x + 3 + 2$ restamos $3x$ en ambos miembros

$-x = 5$ dividimos por -1 en ambos miembros

$x = -5$ es la solución

III.1.1.6.5 Propiedades de las Operaciones sobre Desigualdades

9) *Si* $a < b$ *entonces* $a + c < b + c$

10) *Si* $a < b$ *y* $c > 0$ *entonces* $a \cdot c < b \cdot c$

11) *Si* $a < b$ *y* $c < 0$ *entonces* $a \cdot c > b \cdot c$

Veamos una aplicación. Resolver la inecuación

$2 \cdot (x - 3) > 4x + 2$

Comenzamos dividiendo ambos miembros por 2

$$\frac{2\cdot(x-3)}{2} > \frac{4x+2}{2}$$

$x - 3 > 2x + 1$ sumamos 3 en ambos miembros

$x > 2x + 1 + 3$ restamos $2x$ en ambos miembros

$-x > 4$ multiplicamos por -1 ambos miembros

$x < -4$

Observar que en el último paso se tuvo que dividir por un número negativo, y esto cambió el sentido de la desigualdad.

III.1.1.6.6 Reglas de Signos

12) $-(-a) = a$
13) $(-a)\cdot b = -(a\cdot b) = a\cdot(-b)$
14) $(-1)\cdot a = -a$

Y finalmente una regla importante que nos conviene tener en cuenta cuando operamos con fracciones:

15) $\dfrac{a}{b} = a\cdot\dfrac{1}{b} = a\cdot b^{-1}$

III.1.1.6.7 Algunas Propiedades de la Potenciación y la Radicación

16) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
17) $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$
18) $(a\cdot b)^n = a^n.b^n$ y $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

De estas propiedades se deduce que $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

El ítem 18 marca la propiedad distributiva de la potenciación respecto del producto y cociente. En cambio **no** vale la propiedad distributiva de la potenciación con respecto a la suma o la resta, es decir: $(a+b)^n \neq a^n + b^n$ y $(a-b)^n \neq a^n - b^n$

Ejemplo: $(1+2)^2 = 3^2 = 9$ mientras que $1^2 + 2^2 = 5$

Una diferencia de cuadrados se factoriza así: $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$ en tanto el cuadrado de un binomio se resuelve de esta forma:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Si la operación es la radicación, algunas propiedades son:

19) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

20) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

21) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Bien, es hora de comenzar la ejercitación donde utilizarán las operaciones y propiedades desarrolladas hasta aquí.

III.1.1.6.8 Módulo de un Número Real

El **módulo** o **valor absoluto** de un número real x es la distancia entre ese número y cero. Se simboliza así: $|x|$

$$\text{Si } x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$$
$$\text{Si } x < 0 \Rightarrow |x| = -x$$

Ejemplo: $|2.5| = |-2.5| = 2.5$

Otra forma de expresar el modulo de un número real x es: $|x| = \sqrt{x^2}$

Ejemplo: $x^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{36} \quad \Rightarrow \quad |x| = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 6 \quad$ ó $\quad x = -6$

III.1.1.6.8.1 Propiedades del Módulo

1. $|a| = |-a| \geq 0$
2. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
3. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ con $b \neq 0$
4. Desigualdad triangular: $|a+b| \leq |a| + \cdot |b|$
5. $|a-b| \geq |a| - |b|$

Ejemplo: Resuelva la ecuación: $\left|\frac{x}{-5}\right| + |x| = 6$

Aplicamos la propiedad 3 en el primer término del primer miembro:

$\frac{|x|}{|-5|} + |x| = 6$; como $|-5| = 5$, tenemos: $\frac{|x|}{5} + |x| = 6$

$\left(\frac{1}{5} + 1\right)|x| = 6$ sacando factor común $|x|$

$\frac{6}{5}|x| = 6$ multiplicando miembro a miembro por $\frac{5}{6}$

$|x| = 6\,\frac{5}{6} = 5$

Por definición: $|x| = 5 \Rightarrow x = 5 \lor x = -5$

Por lo tanto el conjunto solución de la ecuación es $S = \{5, -5\}$

III.1.1.6.9 Operaciones con Radicales

III.1.1.6.9.1 Simplificación:

Si **n** es impar $\Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = a$ Si **n** es par $\Rightarrow \sqrt[n]{a^n} = |a|$

Si el índice y el exponente del radicando tienen un divisor común mayor que 1, se simplifican dividiéndolos por ese divisor común. En caso de que éste sea par se toma el valor absoluto del radicando.

Ejemplo: $\sqrt[3]{7^6} = 7^2$ $\sqrt[4]{(-5)^6} = \sqrt{|-5|^3}$

III.1.1.6.9.2 Adición y Sustracción:

- **Radicales semejantes:** son aquellos que tienen el mismo índice y el mismo radicando.
  Al sumar o al restar radicales semejantes, se obtiene una expresión de un solo término.

Ejemplo: $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

- Se pueden **extraer del radical** todos los factores cuyos exponentes sean mayores o iguales que el índice. Para ello, se factoriza el radicando, se descomponen los factores en forma conveniente, se distribuye la raíz con respecto al producto y se simplifica.

Ejemplo: $\sqrt[3]{4000} = \sqrt[3]{2^5.5^3} = \sqrt[3]{2^3.2^2.5^3} = \sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{2^2}.\sqrt[3]{5^3} = 2.5.\sqrt[3]{2^2} = 10.\sqrt[3]{2^2}$

Para sumar o para restar radicales, se hace así:

- Si los radicales son números compuestos, se factorizan.
- Se simplifican todos los radicales posibles.
- Se extraen todos los factores posibles de cada radical.
- Si hay radicales semejantes, se agrupan en un solo termino.
- La suma o la resta de radicales no semejantes se deja expresada.

Ejemplo: $\sqrt[4]{9} - \sqrt{48} + \sqrt{8} = \sqrt[4]{3^2} - \sqrt{2^4.3} + \sqrt{2^3} = \sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = -3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

III.1.1.6.9.3 Multiplicación y División:

- **Si los radicales tienen igual índice,** se aplican estas fórmulas

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Radicales de índices distintos: se buscan radicales equivalentes de modo tal que todos tengan el mismo índice.

Ejemplo: $\sqrt[3]{3}.\sqrt{2}.\sqrt[4]{125} = \sqrt[12]{3^4}.\sqrt[12]{2^6}.\sqrt[12]{(5^3)^3} = \sqrt[12]{3^4.2^6.5^9}$

III.1.1.6.9.4 Racionalización de Denominadores:

Consiste en transformar una expresión que contiene radicales en su denominador en otra equivalente, cuyo denominador sea entero.

Ejemplos:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{2}$$

$$\frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{2}{3+\sqrt{5}}.\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{6-2\sqrt{5}}{3^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{9-5} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

III.1.1.6.10 Exponentes Racionales:

Para cualquier número **n** natural mayor que 1 y $a \geq 0$ se cumple que: $a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$.

Las potencias de exponente racional cumplen las mismas propiedades que las potencias de exponente entero.

Para operar, en algunos casos conviene expresar los radicales como potencias y trabajar con estas aplicando sus propiedades.

Ejemplo: $\sqrt{5}\,.\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{2}}.5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 5^{\frac{5}{6}}$

III.1.2 LOGARITMO DE UN NÚMERO REAL

El logaritmo en base **b** de un número **a** es el número **c**, si **b** elevado al exponente **c** da como resultado **a**.

En símbolos: $\boxed{\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a}$

b es la ***base*** del logaritmo y debe ser un número real positivo y distinto de 1.

a es el ***argumento*** del logaritmo y debe ser un número real positivo.

$y = \log_2 x$ (se lee: "*logaritmo en base 2 de x*")

Ejemplos:

a) $\log_2 4 = 2$ dado que $4 = 2^2$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$ dado que $4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

III.1.2.1 Propiedades de los Logaritmos

1) $\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$

2) $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$

3) $\log_b(x^y) = y \cdot \log_b x$

4) Cualquiera sea a : $\log_a(a) = 1$ y $\log_a(1) = 0$

III.1.2.2 Cambio de base:

Supongamos que queremos averiguar $\log_3 243$ utilizando la calculadora científica.

Para pensar y completar…

Podemos proceder así: según la definición de logaritmo, $\log_3 243 = x \iff 3^x = 243$

Aplicamos logaritmos decimales a ambos miembros $\longrightarrow$ $\log 3^x = \log$ ……….

Aplicamos la propiedad para "bajar" el exponente $\longrightarrow$ $x \times$ …….. = ………..

Despejamos x = $\overline{}$; pero $x = \log_3 243$, entonces $\log_3 243 = \frac{\log 243}{\log 3} =$..............

Este procedimiento se llama cambio de base, y nos permite cambiar la base b de un logaritmo por otra más conveniente (hemos elegido base 10, pero podríamos haber elegido cualquier otra).

Si llamamos w a la base elegida, podemos aplicar directamente la siguiente fórmula:

$$\boxed{\log_b a = \frac{\log_w a}{\log_w b}}$$

Así podemos obtener con la calculadora científica el logaritmo de un número en cualquier base. La nueva base que elegimos será 10 o e

Por ejemplo: $\log_3 230 = \frac{\log 230}{\log 3} =$ .... Este logaritmo se resuelve utilizando la calculadora científica.

Una cuestión de notación...

- $\log_b^n(a) = [\log_b(a)]^n$
- Cuando leamos log a sin hacer referencia a la base b se entenderá que no referimos a la base 10, es decir, b = 10. Las calculadoras toman esta convención.

III.1.3 LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Los números complejos surgen por la necesidad de resolver situaciones como la que plantea la siguiente ecuación:

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x = \sqrt{-1} \quad \notin \quad \Re$$

Situaciones como la presentada requieren la ampliación de $\Re$ para dar respuesta a, por ejemplo, el valor de x ($x = \sqrt{-1}$) que resulta de la ecuación planteada. Tal ampliación origina el conjunto de los números complejos **C.**

Antes de definir número complejo para que puedas comprender mejor definimos par ordenado de números reales.

- Par ordenado son dos elementos dados en un cierto orden. En símbolos: (a, b), donde a se llama primera componente y b segunda componente

Por ejemplo: (3, –5)

$(a,b) \neq (b,a)$ es decir que si cambiamos el orden de las componentes estamos en presencia de dos pares ordenados distintos.

- **Número complejo** es todo par ordenado de números reales.
  C = $\{(a,b) / a \in R \quad \wedge \quad b \in R\}$
- La notación usual es $z = (a,b)$ donde a (primera componente) se denomina **parte real** de z y b (segunda componente) se denomina **parte imaginaria**
- Un número complejo también se puede expresar en **forma binómica**: **z = a + b i**
  El complejo z = (–2, 3) expresado como par ordenado en forma binómica sería

$$z = -2 + 3i$$

- Al número **i** se llama unidad imaginaria que cumple: $\mathbf{i^2 = -1}$
- Si la parte real es nula, el número complejo es **imaginario puro**

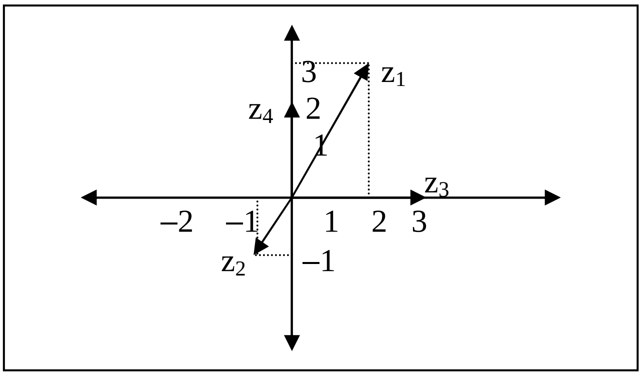
- Si la parte imaginaria es nula, el número complejo es un **número real**

- El conjunto $\Re$ está incluido en el conjunto **C**

La última característica enunciada sobre los números complejos dice: "El conjunto $\Re$ está incluido en el conjunto **C**". ¿Cómo justificarías esta afirmación?

- El número complejo a + bi se representa en el plano mediante el punto de coordenadas (a; b). El eje horizontal se llama **eje real**, y el eje vertical **eje imaginario**.

Ejemplos: $z_1 = 2 + 3i$ $z_2 = -1 - i$ $z_3 = 3$ $z_4 = 2i$



- A cada número complejo le corresponde un punto del plano y a cada punto del plano le corresponde un número complejo.

- El eje real contiene únicamente los números reales, y el eje imaginario, únicamente los imaginarios puros.

- Dos complejos son conjugados si y sólo si tienen la misma parte real, y sus partes imaginarias son opuestas

Ejemplo: z = 2 + 3i y $\bar{z} = 2 - 3i$

III.1.3.1 Operaciones en C

III.1.3.1.1 Suma y Resta

Para sumar y restar números complejos se suman o restan las partes reales y las partes imaginarias

Ejemplos: Dados los complejos $z_1 = (2, -4)$ $z_2 = (-1, 3)$

Presentamos un ejemplo de suma

En forma de par ordenado: $z_1 + z_2 = (2 + (-1), -4 + 3) = (1, -1)$

En forma binómica: $z_1 + z_2 = (2 - 4i) + (-1 + 3i) = 1 - i$

III.1.3.1.2 Multiplicación

En este caso es necesario separar la multiplicación de números complejos en forma de par ordenado y en forma binómica.

En forma de par ordenado: se define

$$(a,b)\cdot(c,d) = (a\cdot c - b\cdot d\ ,\ a\cdot d + b\cdot c)$$

En forma binómica: se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma y resta

$$(a+bi)\cdot(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 =$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)\, i$$

Para ejemplificar consideramos los mismos complejos utilizados en la suma y resta

En forma de par ordenado:

$$z_1\cdot z_2 = (2\cdot(-1) - (-4)\cdot 3,\ 2\cdot 3 + (-4)\cdot(-1)) = (10\ ,10)$$

En forma binómica:

$$z_1\cdot z_2 = (2-4i)\cdot(-1+3i) = -2 + 6\,i + 4i - 12\,i^2 =$$

$$= -2 + 10i - 12\,(-1) = -2 + 12 + 10\,i = 10 + 10i$$

III.1.3.1.3 División

En forma de par ordenado: se define

$$(a,b)\div(c,d) = (a,b)\cdot\left(\frac{c}{c^2+d^2}\ ,-\frac{d}{c^2+d^2}\right)$$

Es decir, que se transforma en una multiplicación.

En forma binómica: se multiplica el dividendo y el divisor por el complejo conjugado del divisor

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)}=\frac{ac+a(-di)+bci-bdi^2}{c^2+d^2}=$$

$$=\frac{(ac+bd)-(ad-bc)\,i}{c^2+d^2}$$

Ejemplos: Dados los complejos $z_1=(2,-4)$ $z_2=(-1,3)$

En forma de par ordenado:

$$z_1\div z_2=(2,-4)\cdot\left(\frac{-1}{1+9}\;,-\frac{3}{1+9}\right)=(2,-4)\cdot\left(-\frac{1}{10}\;,-\frac{3}{10}\right)$$

y se resuelve como la multiplicación ya ejemplificada anteriormente.

En forma binómica:

$$\frac{2-4i}{-1+3i}=\frac{(2-4i)\cdot(-1-3i)}{(-1+3i)\cdot(-1-3i)}=\frac{-2-6i+4i-12}{(-1)^2+(3)^2}=\frac{-14-2i}{10}$$