Unidad 2: Cinemática de la Partícula

Conceptos generales

La cinemática estudia el movimiento de cuerpos o partículas describiendo la posición, velocidad y aceleración sin considerar las causas que lo producen.
Se define como partículas a aquellos elementos que no poseen estructura ni dimensiones, es una abstracción que permite simplificar el estudio del movimiento y desarrollar sus conceptos fundamentales.
Para ello es indispensable adoptar sistemas de referencia para definir los vectores que representan cada magnitud a analizar su comportamiento cinemático.

Vector de posición, velocidad y aceleración

La posición de una partícula que se desplaza describiendo una trayectoria cualquiera respecto a un sistema de referencia se la define con la función vectorial dependiente del tiempo $\vec{r}(t)$. Este vector tendrá su origen coincidente con el origen del sistema fijo y su extremo "seguirá" la partícula definiendo su posición en cada instante.
La trayectoria de un móvil puede ser descripta paramétricamente, existiendo muchos tipos de movimientos diferentes que pueden recorrer una misma trayectoria por ejemplo el movimiento rectilíneo que puede ser realizado con velocidad constante o variada y el movimiento circular que puede ser recorrido con velocidad angular constante o con aceleración angular.
Se presenta en la Figura 1.1 la partícula en dos instantes diferentes, el inicial definido por t y un intervalo posterior dado por $t+\Delta t$. Durante ese intervalo de tiempo, la posición de la partícula pasa de ser definida por el vector $\vec{r}(t)$ al vector $\vec{r}(t+\Delta t)$. se aclara que en el dibujo se han omitido los ejes del sistema referencial. El cambio de posición que ha experimentado la partícula lo define el vector desplazamiento dado por:

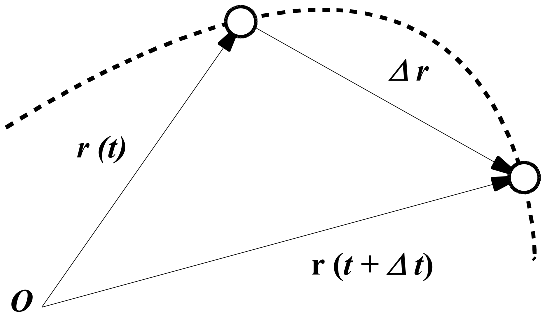


Figura 1.1: Vector posición para dos instantes sobre una trayectoria curva mostrada en linea de puntos.

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$$

Generalmente este vector no coincide con la trayectoria salvo el caso particular del movimiento rectilíneo. Este desplazamiento define el vector velocidad media de la partícula si se considera el intervalo de tiempo que tardó en recorrerla y está dado por el cociente:

$$\vec{v}_{med}=\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (1-1)$$

El vector velocidad instantánea se obtiene para un incremento Δt tendiendo a cero o mediante la derivada del vector posición en el instante t que puede expresarse como:

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{d\,\vec{r}}{d\,t} \qquad (1-2)$$

La Figura 1.2 muestra el vector $\vec{v}_{med}$ en la misma dirección y sentido que el vector $\Delta\vec{r}$ y, al tender el incremento de tiempo a cero, el vector velocidad termina siendo instantáneo y tangente a la trayectoria.
Siguiendo con el mismo razonamiento se puede entender al vector aceleración como consecuencia del cambio del vector velocidad.
Si solo cambia su dirección se genera la aceleración normal o centrípeta. Si solo cambia el módulo del vector velocidad, se genera la aceleración tangencial. Obviamente estos cambios pueden ocurrir simultáneamente.

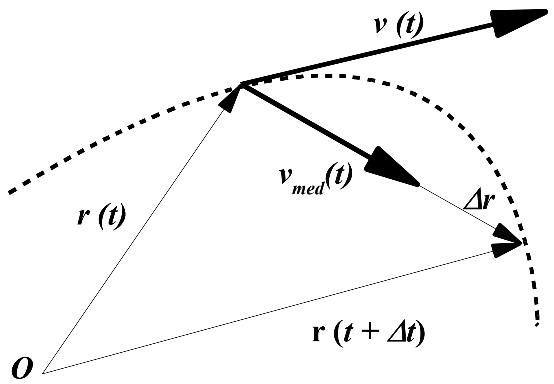


Figura 1.2: Vector velocidad instantánea tangente a la trayectoria en el instante considerado para $\Delta t \rightarrow 0$

Interesa analizar $\vec{r}(t), \vec{v}(t)\, y\, \vec{a}(t)$ para los sistemas de coordenadas más usuales a saber: coordenadas cartesianas, cilíndricas, esféricas e intrínsecas.
Cada uno de estos sistemas de coordenadas se encuentra definido por una base ortogonal respecto de la cual se expresan los vectores mencionados.

Coordenadas cartesianas

Este sistema referencial está definido por una base ortonormal formada por los versores $\vec{i}, \vec{j}\, y\, \vec{k}$ que, mediante una combinación lineal con origen en el punto fijo "O", definen la ubicación espacial de un punto mediante el vector de posición. Al ser este dependiente del tiempo, sus componentes también lo serán por lo que tomará la forma:

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k} \qquad (1\text{-}3)$$

La velocidad se obtiene mediante la derivada del vector posición respecto del tiempo dado por la ecuación (1-3) quedando:

$$\vec{v}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\frac{dx(t)}{dt}\vec{i}+\frac{dy(t)}{dt}\vec{j}+\frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

Se resalta el hecho de la derivada nula de cada uno de los versores de la base debido a que permanecen constantes tanto en módulo como en dirección.
Para facilitar la nomenclatura a la derivada temporal se la indicará con un punto sobre la variable si se la deriva una vez y con dos puntos si se la deriva dos veces. Por lo tanto se tendrá:

$$\vec{v}(t)=\dot{\vec{r}}(t)=\dot{x}\vec{i}+\dot{y}\vec{j}+\dot{z}\vec{k} \qquad (1\text{-}4)$$

Finalmente el vector aceleración resulta de derivar la ecuación (1-4) quedando:

$$\vec{a}(t)=\dot{\vec{v}}(t)=\ddot{\vec{r}}(t)=\ddot{x}\vec{i}+\ddot{y}\vec{j}+\ddot{z}\vec{k} \qquad (1\text{-}5)$$

Coordenadas cilíndricas

Este tipo de referencial, como su palabra lo indica, posicionan las partículas utilizando una base ortogonal móvil $(\vec{e}_\rho; \vec{e}_\phi; \vec{k})$ que "seguirá" en todo instante a la partícula en su trayectoria.
El versor $\vec{e}_\rho$ cuya dirección será coincidente en todo instante con el radio del cilindro ρ de acuerdo a lo representado en la Figura (1.3). El versor $\vec{e}_\phi$ será tangente en todo instante a la "tapa" o "base" del cilindro punteado y con el sentido de crecimiento del ángulo ϕ.

Finalmente el tercer vector que forma la terna es el versor $\vec{k}$ que se mantiene constantemente vertical y coincidente con la generatriz del cilindro o eje "z".
Los versores mencionados tienen la característica de que dos de ellos solo cambian su dirección manteniendo su módulo y "viajando" en el extremo del vector posición $\vec{r}(t)$. por lo que el vector posición en coordenadas cilíndricas queda definido por:

$$\vec{r}(t)=\rho\,\vec{e}_\rho+z\,\vec{k} \qquad (1\text{- }3)$$

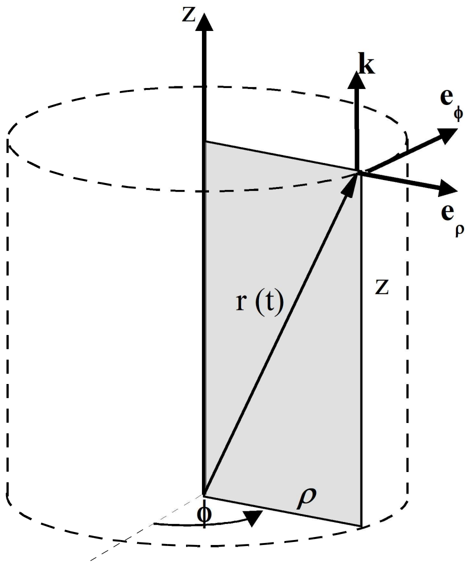


Figura 1.3: Vector posición indicando la ubicación de la terna móvil. El rectángulo sobmreado se dibuja para facilitar la comprensión deesta coordenada.

Para obtener la velocidad se deriva (1-3) obteniendo:

$$\vec{v}(t)=\dot{\vec{r}}(t)=\dot{\rho}\,.\,\vec{e}_\rho+\rho\,.\,\dot{\vec{e}}_\rho+\dot{z}\,\vec{k} \qquad (1\text{- }4)$$

Analizando cada uno de los términos de esta expresión se tendrá:

$\dot{\rho}\,.\,\vec{e}_\rho$ →expresa la velocidad con la que cambia el módulo del radio del "cilindro" en la dirección radial a la que se denominará $\vec{V}\rho$.

$\rho\,.\,\dot{\vec{e}}_\rho$ →expresa la velocidad con la que varía el radio ρ del "cilindro" y en la dirección transversal. Por lo tanto la derivada $\dot{\vec{e}}_\rho$ solo dependerá de la celeridad con la que "gire" el versor $\vec{e}_\rho$ dado que su módulo unitario permanece constante, su sentido estará dado por el sentido del giro del versor y su dirección será tangente al cilindro. Por lo tanto se puede escribir

$\dot{\vec{e}}_\rho=\dot{\phi}\,.\,\vec{e}_\phi$. Finalmente reemplazando esta última quedará: $\rho\,.\,\dot{\vec{e}}_\rho=\dot{\phi}\,.\,\rho\,.\,\vec{e}_\phi$

Esta velocidad será tangente a la circunferencia y depende de la velocidad angular y del radio.

$\dot{z}\,.\,\vec{k}$ → velocidad con la que aumenta la altura del vector posición dada por $v_z\,.\,\vec{k}$ y en la dirección de "z".

El vector velocidad de la partícula quedará definida para este sistema de coordenadas por la suma de las tres componentes ortogonales mostradas como:

$$\vec{v}(t)=v_\rho\,.\,\vec{e}_\rho+v_\phi\,.\,\vec{e}_\phi+v_z\,.\,\vec{k}$$
$$\vec{v}(t)=\dot{\rho}\,.\,\vec{e}_\rho+\dot{\phi}\,.\,\rho\,.\,\vec{e}_\phi+\dot{z}\,.\,\vec{k} \qquad (1\text{- }5)$$

Gráficamente se muestran estas tres componentes de la velocidad de la partícula de acuerdo a lo indicado en la Figura (1.4).

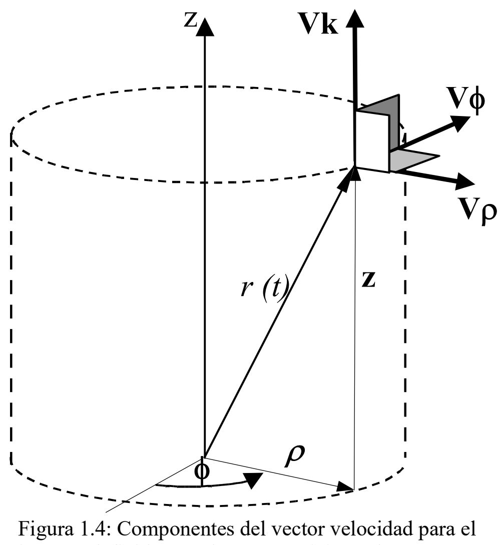


Figura 1.4: Componentes del vector velocidad para el instante definido por el vector posición. El vector velocidad total no se muestra

Para obtener el vector aceleración se deriva la expresión (1- 5) quedando:

$$a(t)=\frac{d(\dot{\rho}\vec{e}_\rho)}{dt}+\frac{d(\dot{\phi}.\rho.\vec{e}_\phi)}{dt}+\frac{(\dot{z}.\vec{k})}{dt}$$
$$a(t)=\frac{d\dot{\rho}}{dt}.\vec{e}_\rho+\dot{\rho}.\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}+\frac{d\dot{\phi}}{dt}.\rho.\vec{e}_\phi+\dot{\phi}.\frac{d\rho}{dt}.\vec{e}_\phi+\dot{\phi}.\rho.\frac{d\vec{e}_\phi}{dt}+\ddot{z}.\vec{k}$$
$$a(t)=\ddot{\rho}.\vec{e}_\rho+\dot{\rho}.\dot{\phi}.\vec{e}_\phi+\ddot{\phi}.\rho.\vec{e}_\phi+\dot{\phi}.\dot{\rho}.\vec{e}_\phi+\dot{\phi}.\rho.(-\dot{\phi}\vec{e}_\rho)+\ddot{z}\vec{k}$$
$$a(t)=\ddot{\rho}.\vec{e}_\rho+2\dot{\rho}.\dot{\phi}.\vec{e}_\phi+\ddot{\phi}.\rho.\vec{e}_\phi-(\dot{\phi})^2.\rho\vec{e}_\rho+\ddot{z}\vec{k} \qquad (1-6)$$

Analizando cada una de las componentes dadas enla expresión (1 – 6) se tendrá:

$\ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho$ →Corresponde a la aceleración del vector $\vec{\rho}$ en la dirección de ese mismo versor, es decir al cambio del módulo de la velocidad radial v_ρ.

$2\dot{\rho}.\dot{\phi}.\vec{e}_\varphi$ Esta aceleración se genera por la simultaneidad del cambio de dirección del vector $\vec{v}_\rho$ dado por la rotación y del cambio de su módulo $\vec{v}_\rho$. Esta aceleración se denomina aceleración de Coriolis y existe siempre que haya velocidad angular y velocidad de estiramiento del vector posición simultaneamente.

$\ddot{\phi}.\rho.\vec{e}_\phi$ →Corresponde a la aceleración tangencial dada por la aceleración angular y el radio.

$-(\dot{\phi})^2.\rho\vec{e}_\rho$ →Corresponde a la aceleración centrípeta o normal donde el signo negativo indica que el sentido es el contrario al que indica el versor o hacia el centro de curvatura.

$\ddot{z}\vec{k}$ → Corresponde a la aceleración con la que varía la velocidad "vertical" la partícula en la dirección del versor *k*.

Cada vector aceleración se muestra en la Figura (1.5) que han sido graficados suponiendo todas las aceleraciones positivas ya que por ejemplo, si la partícula analizada se elevara cada vez mas despacio, es decir se frenara en su acenso, el vector "a_z" tendría el sentido contrario al dibujado.

Un caso particular de este tipo de coordenadas se presenta cuando z = 0 y es conocida como coordenadas polares. La expresión del vector posición para este caso será entonces

$$\vec{r}(t)=\rho\,\vec{e}_\rho$$

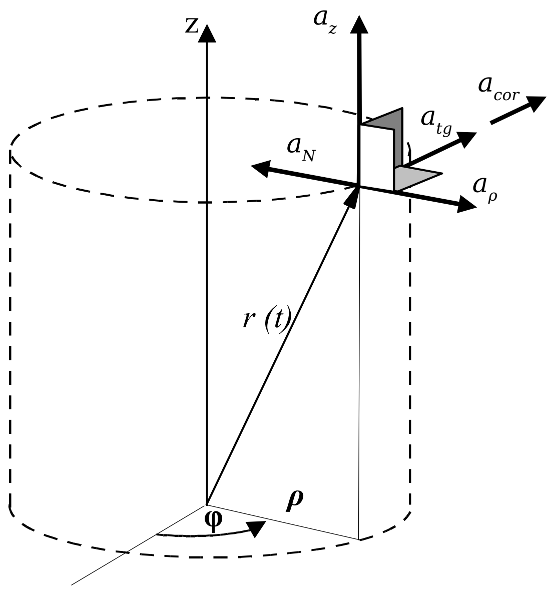


Figura 1.5: Componentes del vector aceleración instantánea para la posición indicada

El vector velocidad será

$$\vec{v}(t)=V_\rho\vec{e}_\rho+V_\varphi\vec{e}_\varphi$$

Finalmente el vector aceleración será

$$\vec{a}(t)=[a_\rho-a_N]\vec{e}_\rho+[a_{cor}+a_{tg}]\vec{e}_\varphi$$

Coordenadas esféricas

Este tipo de coordenadas se caracteriza por posicionar la partícula mediante el módulo del vector posición, el ángulo λ y el ángulo θ de acuerdo a lo indicado en la Figura 1-5. La base ortonormal utilizada en este tipo de coordenadas también es móvil y esta dada por la terna de versores dada por (**e**$_r$, **e**$_\theta$, **e**$_\lambda$) según se muestra en la Figura 1.6.

El versor $\boldsymbol{e_r}$ tiene la dirección del vector posición r(t), el versor $\boldsymbol{e_\theta}$ es tangente al meridiano que pasa por la posición del punto y el versor **e**$_\lambda$ es tangente al paralelo según se indica. El vector posición queda definido finalmente por

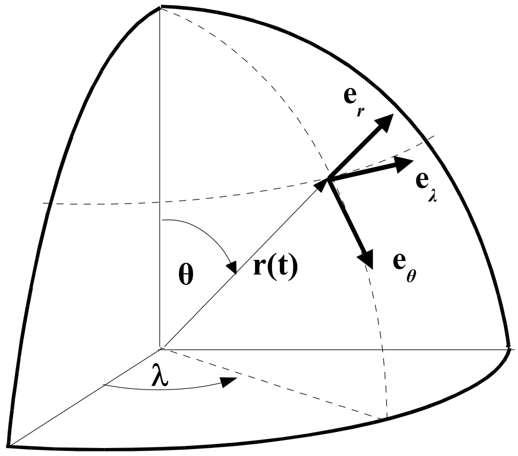


Figura 1.6: Vector posición indicando la ubicación de la terna móvil. En linea de puntos se indica el paralelo y meridiano de los versores e_r y e_λ respectivamente.

$$\vec{r}(t)=r\vec{e}_r \qquad (1\text{- }7)$$

Para determinar la velocidad de la partícula se deriva la expresión (1-7) quedando

$$\vec{V}(t)=\dot{r}\ .\ \vec{e}_r+r\ .\ \dot{\vec{e}}_r \qquad (1\text{- }8)$$

Analizando cada termino por separado se tendrá

$\dot{r}\ .\ \vec{e}_r$ →Corresponde a la variación del módulo del vector posición en la dirección radial.

$r\ .\ \dot{\vec{e}}_r$ →Corresponde a la velocidad tangencial de la partícula y se puede descomponer en dos direcciones, una respecto a la dirección del paralelo definida por el versor $\vec{e}_\lambda$ componente que se puede intuir dejando constante el ángulo θ y la otra componente cuya dirección del meridiano definida por el versor $\vec{e}_\theta$ se mantiene constante el ángulo λ. Por lo tanto se puede expresar la velocidad en función de los tres versores como:

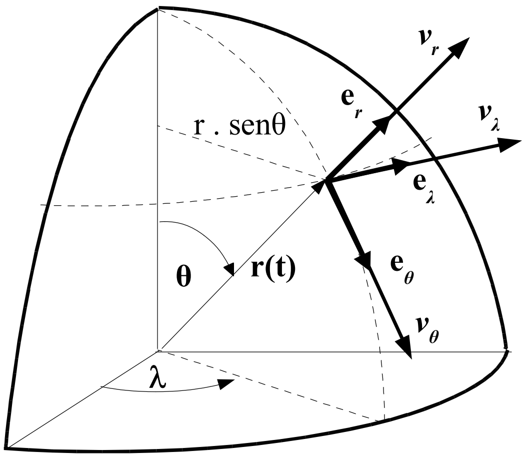


Figura 1.6: Vector posición indicando la ubicación de la terna móvil. En linea de puntos se indica el paralelo y meridiano de los versores e_r y e_λ respectivamente.

$$\vec{V}(t)=\dot{r}.\vec{e}_r+\dot{\theta}.r.\vec{e}_\theta+\dot{\lambda}.r.sen\theta.\vec{e}_\lambda \qquad (1\text{- }9)$$

Finalmente la aceleración de la partícula se obtiene derivando la ecuación (1-9) quedando:

$$\begin{aligned}&\vec{a}(t)=\ddot{r}\ .\ \vec{e}_r+\dot{r}\ .\ \dot{\vec{e}}_r\\&+\ddot{\theta}\ .\ r\ .\ \vec{e}_\theta+\dot{\theta}\ .\ \dot{r}\ .\ \vec{e}_\theta+\dot{\theta}\ .\ r\ .\ \dot{\vec{e}}_\theta\\&+\ddot{\lambda}.r.sen\theta\ .\ \vec{e}_\lambda+\dot{\lambda}.\dot{r}.sen\theta\ .\ \vec{e}_\lambda+\dot{\lambda}.r.\dot{\theta}\ .\ \cos\theta\ .\ \vec{e}_\lambda+\dot{\lambda}.r.sen\theta\ .\ \dot{\vec{e}}_\lambda \qquad (1\text{- }10)\end{aligned}$$

Analizando cada término de la ecuación (1-10) por separado se tendrá

1) $\ddot{r}\ .\ \vec{e}_r=\vec{a}_r$ →Corresponde a la variación del módulo de la velocidad radial en esa dirección.

2) $\dot{r}\ .\ \dot{\vec{e}}_r$ →Este termino equivale a $\dot{r}\ .(\dot{\theta}\ .\ \vec{e}_\theta+\dot{\lambda}\ .\ sen\theta\ .\ \vec{e}_\lambda)=\dot{r}\ .\dot{\theta}\ .\ \vec{e}_\theta+\dot{r}\ .\dot{\lambda}\ .\ sen\theta\ .\ \vec{e}_\lambda$ y da origen a dos aceleraciones debidas a la simultaneidad de las velocidades lineal y angular.

3) $\ddot{\theta}\ .\ r\ .\ \vec{e}_\theta$ →Corresponde a la aceleración tangencial debida al cambio de velocidad angular respecto a la trayectoria sobre el meridiano.

4) $\dot{\theta}\ .\ \dot{r}\ .\ \vec{e}_\theta$ → Este término se repite en el punto 2) por lo que aparecerá como en la ecuación final de la aceleración como $2.\dot{\theta}\ .\ \dot{r}\ .\ \vec{e}_\theta$ correspondiendo a la aceleración de Coriolis definida en las coordenadas cilíndricas.

5) $\dot{\theta}\ .\ r\ .\ \dot{\vec{e}}_\theta$ equivale a $\dot{\theta}\ .\ r\ .\ \left(-\ \dot{\theta}\ .\ \vec{e}_\lambda\right)=-\ \dot{\theta}^2\ .\ r\ .\ \vec{e}_r$ y corresponde a la aceleración normal o centrípeta debida al movimiento curvilíneo sobre el meridiano.

6) $\ddot{\lambda}.r.\,sen\,\theta\ .\ \vec{e}_\lambda$ → Aceleración tangencial sobre el paralelo.

7) $\dot{\lambda}.\dot{r}.sen\,\theta\ .\ \vec{e}_\lambda$ →Este término se repite en el punto 2) por lo que aparecerá como en la ecuación final de la aceleración como $2.\dot{\lambda}.\dot{r}.sen\,\theta\ .\ \vec{e}_\lambda$

8) $\dot{\lambda}.r.\dot{\theta}\ .\ \cos\theta\ .\ \vec{e}_\lambda$ → Aceleración de Coriolis debida a la simultaneidad de las velocidad angular $\dot{\lambda}$ y lineal $r.\dot{\theta}\ .\ \cos\theta$

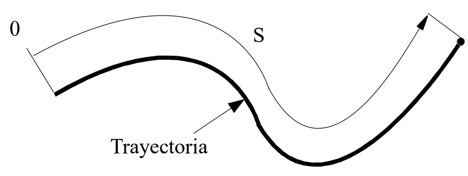
9) $\dot{\lambda}.r.\,sen\,\theta\ .\ \dot{\vec{e}}_\lambda$ →equivale a $\dot{\lambda}.r.\,sen\,\theta\ .(-\ \dot{\lambda}\ .\ \vec{e}_\theta)=-\ \dot{\lambda}^2.r.\,sen\,\theta\ .\ \vec{e}_\theta$ y corresponde a la aceleración normal o centrípeta debida al movimiento curvilíneo sobre el paralelo.

Agrupando componentes la aceleración finalmente queda:

$$\begin{aligned}\vec{a}(t)=&\left(\ddot{r}-\ \dot{\lambda}^2.r.sen\theta-\ \dot{\theta}^2.r\right)\vec{e}_r\\ &+\left(\ddot{\theta}.r-\ \dot{\lambda}^2.r.sen\theta+2.\dot{r}.\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta\\ &+\left(\ddot{\lambda}.r.sen\theta-\ \dot{\theta}^2.r+2.\dot{r}.\dot{\lambda}.sen\theta\right)e_\lambda \quad (1-\ 11)\end{aligned}$$

Coordenadas intrínsecas

En las coordenadas intrínsecas o de trayectoria, la descripción del movimiento de la partícula se realiza en términos de componentes que son tangentes o perpendiculares a la trayectoria. Esto resulta particularmente útil cuando se conoce la curva que sigue la partícula. Por ejemplo un automóvil que recorre un camino sinuoso o una partícula que describe una trayectoria helicoidal.



Por lo tanto el movimiento de una partícula sobre una curva en el espacio puede describirse en función de la coordenada "*s*" que corresponde a la longitud de la trayectoria medida desde un punto inicial de referencia y tomado arbitrariamente cuyo valor estará dado por la expresión:

$$S=\int_{s_{inicial}}^{s_{final}} ds \qquad (1-\ 12)$$

La velocidad de la partícula sobre la trayectoria en un instante cualquiera estará dada por:

$$\vec{V}=\dot{S}\vec{T} \qquad (1-\ 13)$$

Esta velocidad es, como cualquier otro vector velocidad, tangente a la trayectoria por lo tanto en ese instante su dirección estará dada por el versor $\vec{T}$ que se obtiene derivando el vector posición respecto de la trayectoria *S*, es decir haciendo $\frac{d\vec{r}}{ds}$.

La aceleración se obtiene derivando el vector velocidad respecto del tiempo de acuerdo :

$$\vec{a}=\ddot{S}\vec{T}+\dot{S}\dot{\vec{T}} \qquad (1-14)$$

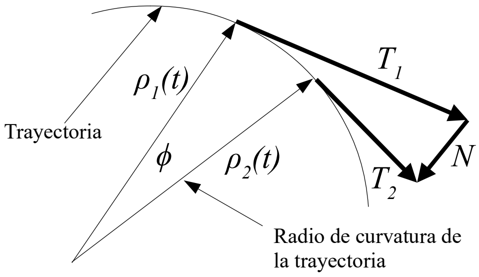


Figura 1.7: Vector tangente para dos posiciones sucesivas mostrando que su variación genera un vector que resulta perpendicular al mismo en dirección normal con entido hacia el centro de curvatura.

El primer término de esta expresión corresponde a la aceleración tangencial. En el segundo término la derivada temporal de la posición como se sabe es la velocidad tangencial y la derivada temporal del versor tangente se puede interpretar gráficamente según se muestra en la Figura 1.7.

Para desplazamientos muy pequeños se cumple vectorialmente que:

$$\frac{d\vec{T}}{dt}=\dot{\phi}.\vec{N}$$

Además se cumple la relación escalar dada por:

$$\frac{dS}{dt}=\dot{\phi}.\rho$$

Dividiendo miembro a miembro las dos expresiones anteriores se puede expresar relación:

$$\frac{d\vec{T}}{dS}=\frac{\vec{N}}{\rho}$$

De esta expresión el versor $\vec{N}$ está dirigido hacia el interior de la curva y permanece normal a la trayectoria en todo instante y dirigido hacia el interior de la curva mientras que ρ es el radio de curvatura de la misma que para una trayectoria circular corresponderá al radio y para una trayectoria rectilínea es infinito. Finalmente la aceleración esta dada por:

$$\vec{a}=\ddot{S}\vec{T}+\frac{\dot{S}^2}{\rho}\vec{N} \qquad (1-15)$$

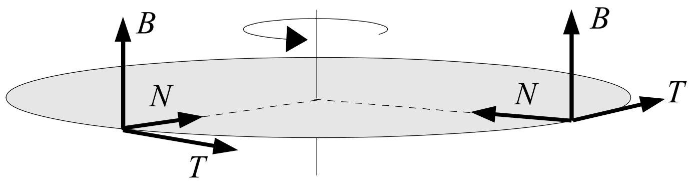


Figura 1.8: Terna de versores que definen la base en coordenadas intrínsecas para un movinieno circular plano. En este caso solo el versor binormal permanece constante

Si bien la descripción de la velocidad y aceleración en función de la coordenadas intrínsecas es sencilla, se debe tener en cuenta que los versores puede cambiar de dirección a medida que la partícula evoluciona en su movimiento, además, el radio de curvatura se mide desde un centro de rotación instantáneo cuya posición se modifica continuamente salvo el caso del movimiento circular. Para determinar la base de estas coordenadas falta definir un tercer versor perpendicular al plano que contiene a los ya definidos que se denomina versor binormal $\vec{B}$ y se obtiene mediante el producto vectorial como:

$$\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}$$

El esquema de la Figura (1.8) presenta una trayectoria circular sobre un plano horizontal de forma circular (indicado en gris) y los tres versores aludidos para dos instantes diferentes.

Para el caso de una partícula que describa una trayectoria sobre una helice de paso constante, la terna de versores cambiará permanentemente de posición según se muestra en la Figura 1.8.

Se resalta que el versor $\vec{N}$ intersecta perpendicularmente al eje de la hélice. El versor $\vec{T}$ es perpendicular tanto al versor normal como a la trayectoria formando un plano denominado osculador y, perpendicular a este, el versor binormal $\vec{B}$ que no posee para este caso particular la dirección vertical.

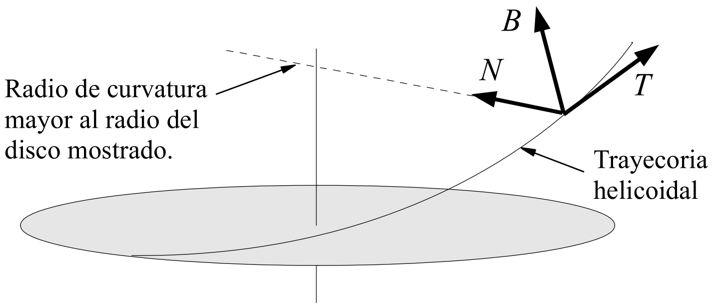


Figura 1.9: Terna de versores que definen la base en coordenadas intrínsecas para un movimiento circular plano. En este caso solo el versor binormal permanece constante

Resumiendo, para trabajar en coordenadas intrínsecas, se parte de la ley que rige la trayectoria de la partícula de acuerdo a

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k} \qquad (1\text{-}16)$$

La longitud de la curva se obtiene mediante la integral

$$S(t)=\int ds=\int \sqrt{\frac{dx}{dt}^2+\frac{dy}{dt}^2+\frac{dz}{dt}^2}\,dt \qquad (1\text{-}17)$$

De la expresión anterior se obtiene el vector posición en función de la distancia *"S"* despejando el tiempo de la expresión (1-17) y reemplazándolo en la (1-16) obteniendo:

$$\vec{r}(S)=x(s)\vec{i}+y(s)\vec{j}+z(s)\vec{k}$$

El versor tangente se obtiene derivando esta última expresión respecto a "*S*" obteniéndose:

$$\vec{T}=\frac{\partial\vec{r}(S)}{\partial S}=\frac{\partial x(s)}{\partial S}\vec{i}+\frac{\partial y(s)}{\partial S}\vec{j}+\frac{\partial z(s)}{\partial S}\vec{k} \qquad (1\text{-}18)$$

El versor normal se obtiene de hacer:

$$\vec{N}=\frac{\frac{d\vec{T}}{dS}}{\left|\frac{d\vec{T}}{dS}\right|}$$

Con ambos versores solo resta realizar el producto vectorial $\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}$ para formar la terna de versores de la base intrínseca.

Cinemática relativa.

Conceptos generales

Este tema también es conocido como, "Cinemática del Movimiento Compuesto de la Partícula" o también "Cinemática en Sistemas de Coordenadas Móviles" y tiene importancia debido a que resulta una herramienta que facilita el análisis de movimientos complejos, que provienen de la combinación o efecto simultaneo de distintos movimientos sencillos o conocidos.
Se trabajará con sistemas de referencia cartesianos ortogonales definidos como rígidos por lo tanto los tres versores se mantienen perpendiculares durante todo el movimiento.
Esta condición de rigidez se define cuando se cumplen los productos escalares siguientes:

$$\vec{i}\,'\,.\,\vec{j}\,'=\vec{j}\,'\,.\,\vec{k}\,'=\vec{k}\,'\,.\,\vec{i}\,'=0 \qquad (1\text{- }19)$$

Los sistemas que no cumplan con estas condiciones se dicen que son "deformables".
En cinemática relativa se trabaja con dos sistemas de referencia simultáneos: uno fijo o "absoluto" dado por los ejes Oxyz cuyas bases serán *i, j, k* y uno móvil o "relativo" con coordenadas dadas por los ejes O'x'y'z' definido por las bases *i', j', k'* de acuerdo con el esquema de la Figura (1.10) donde se muestra la posición de una partícula "*P*" definida respecto a un sistema fijo mediante el vector posición $\vec{r}_F$. El vector posición $\vec{r}_M$ ubica a la misma partícula pero respecto a un sistema móvil cuyo comportamiento puede tener diferentes características a saber:
1- Las bases móviles permanezcan siempre paralelas a las fijas lo que define un movimiento de traslación.
2- Las bases móviles solo roten respecto de las fijas manteniendo los origen fijo y móvil en la misma posición, definiendo un movimiento de rotación pura.
3- Las bases móviles roten y su origen se traslade respecto del origen fijo, definiendo el movimiento de rototraslación.
En este caso el vector $\vec{R}$ que posiciona el origen móvil respecto del fijo puede tener diferentes comportamientos a saber:
1- Que sea permanentemente nulo lo que dará origen a un movimiento de rotación pura del referencial móvil.
2- Que varíe solo su módulo dando origen a un movimiento rectilíneo del origen del sistema móvil.
3- Que varíe solo su dirección generando la rotación del origen de coordenadas relativo.
4- Que varíen tanto su módulo como dirección en forma simultánea dando origen a un movimiento general de roto-traslación del origen de coordenadas móviles.

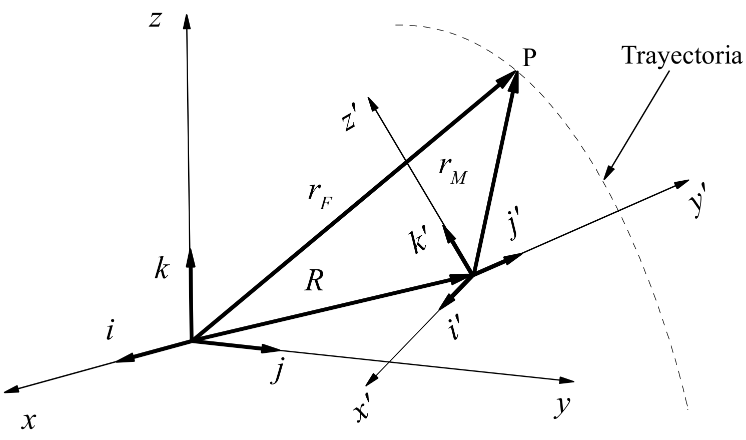


Figura 1.10: Posición de la partícula "P" desde dos sistemas de referencia: absoluto mediante el vector ***r*** y relativo mediante ***r'***. El vector ***R*** posiciona los orígenes de ambos sistemas.

Por lo tanto la posición de la partícula "*P*" puede definirse por la suma vectorial siguiente:

$$\vec{r}_F=\vec{r}_M+\vec{R} \qquad (1\text{- }20)$$

Se resalta que los vectores anteriores son funciones del tiempo y ademas se debe tener cuidado al realizar la suma vectorial debido a las diferentes bases de los sistema. Se comenzará analizando cada uno de los casos en forma individual para culminar con el caso mas general.

Movimiento del sistema móvil en traslación únicamente.

Un sistema móvil evoluciona en traslación respecto de otro fijo cuando se mueva según una ley cualquiera dado por el vector $\vec{R}$ de manera que se trasladen manteniendose sus bases paralelas en todo instante y no necesariamente paralelas a la base fija.
La Figura 1.11 presenta los dos sistemas referenciales en esta situación para lo cual la trayectoria que experimentará "*P*" será rectilínea
Para obtener la velocidad de deriva la expresión (1-20) quedando

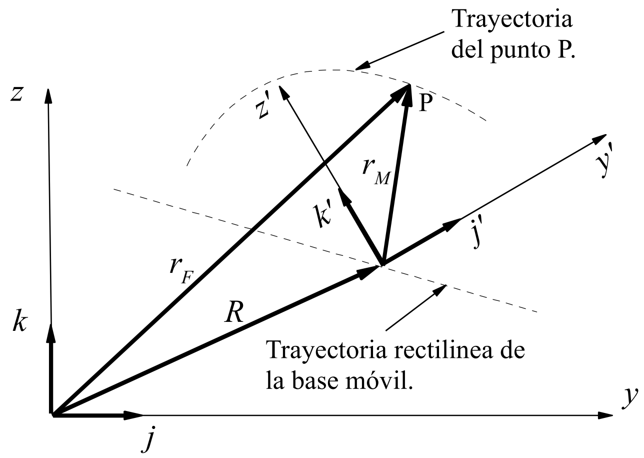


Figura 1.11: Movimiento de traslación del sistema referencial móvil observado desde el eje "x".

$$\vec{V}_F=\vec{V}_M+\vec{V}_R \qquad (1\text{-}21)$$

Para facilitar la nomenclatura se utilizará un punto sobre la variable para expresar la derivada temporal quedando:

$$\dot{\vec{r}}_F=\dot{\vec{r}}_M+\dot{\vec{R}} \qquad (1\text{-}22)$$

El término $\dot{\vec{r}}_M$ corresponde a la velocidad con la que un observador "vería" evolucionar la partícula "*P*" si se encontrara "parado" sobre la referencia móvil.
Para ejemplificar esto, supongamos que una persona camina por el pasillo de un tren en movimiento. Los pasajeros la verían caminar a una velocidad $\dot{\vec{r}}_M$ mientras que un observador parado sobre el anden vería a los pasajeros sentados moverse con una velocidad $(\dot{\vec{R}})$ y al pasajero que camina por el pasillo a una velocidad $\dot{\vec{r}}_M+\dot{\vec{R}}$
Para obtener la aceleración de "*P*" se deriva (1-22) quedando:

$$\vec{a}_F=\vec{a}_M+\vec{a}_R \qquad (1\text{-}23)$$

La misma puede expresarse como:

$$\ddot{\vec{r}}_F=\ddot{\vec{r}}_M+\ddot{\vec{R}} \qquad (1\text{-}24)$$

El mismo ejemplo citado mas arriba puede extenderse a el caso de la aceleración.

Movimiento del sistema móvil en rotación únicamente.

En este movimiento el vector $\vec{R}$ permanece constante en todo instante o lo que es lo mismo, si los orígenes O y O´ permanecerán siempre coincidentes considerarlo nulo. Esto último será ejemplificado en el esquema de la Figura (1.12) para facilitar el análisis. La posición de la partícula "*P*" se describe mediante la el vector de posición $\vec{r}(t)$, el cual puede referirse a ambos sistemas según se puede observar.

El vector posición referido al sistema móvil está dado por la siguiente expresión vectorial:

$$\vec{r}_M = x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,' + z'\vec{k}\,' \qquad (1-25)$$

Por otra parte el vector posición referido al sistema absoluto o fijo está dado por la siguiente expresión vectorial:

$$\vec{r}_F = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} \qquad (1-26)$$

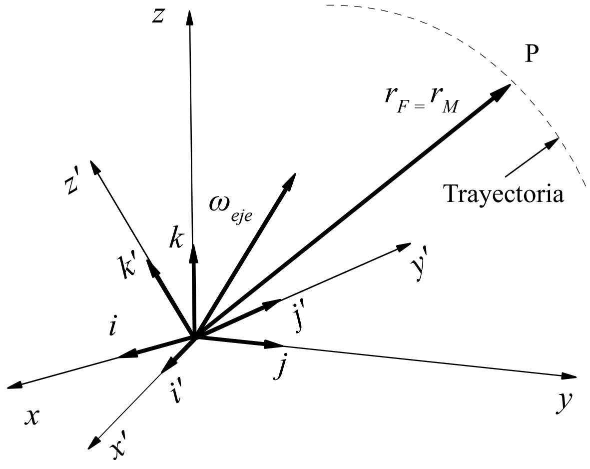


Figura 1.12: Sistema móvil en rotación unicamente. Los vectores posición fijo y móvil son coincidentes al ser el vector $R = 0$. Los ángulos de giro de cada versor de la base móvil no necesariamente son los mismos

Se resalta que los vectores dados por las expresiones (1-25) y (1-26) son exactamente los mismos vectores pero referidos a bases diferentes pudiendo escribir

$$\vec{r}_F = x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,' + z'\vec{k}\,' \qquad (1-27)$$

Se resalta que la terna de bases móviles dependen del tiempo lo cual es importante recordar al momento de realizar las derivadas de cada uno de sus versores. La velocidad absoluta se obtiene derivando la expresión (1-27) dando por resultado

$$\vec{v}_F = \frac{d\vec{r}_F}{dt} = \frac{dx'}{dt}\,\vec{i}\,' + x'\,\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\,\vec{j}\,' + y'\,\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\,\vec{k}\,' + z'\,\frac{d\vec{k}\,'}{dt} \qquad (1-28)$$

Reagrupando términos se puede expresar

$$\vec{v}_F = \left(\frac{dx'}{dt}\,\vec{i}\,' + \frac{dy'}{dt}\,\vec{j}\,' + \frac{dz'}{dt}\,\vec{k}\,'\right) + \left(x'\,\frac{d\vec{i}\,'}{dt} + y'\,\frac{d\vec{j}\,'}{dt} + z'\,\frac{d\vec{k}\,'}{dt}\right) \qquad (1-29)$$

El primer paréntesis corresponde a la velocidad referida a los ejes móviles quedando expresada como:

$$\vec{v}_M = \left(\frac{dx'}{dt}\,\vec{i}\,' + \frac{dy'}{dt}\,\vec{j}\,' + \frac{dz'}{dt}\,\vec{k}\,'\right) \qquad (1-30)$$

Para analizar el segundo paréntesis de la expresión (1-29) se procede de la siguiente manera. Por condición de rigidez dadas por la expresión (1-19) el sistema móvil cumple con las siguientes expresiones a saber:

$$\vec{i}\,' \,.\, \vec{j}\,' = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{i}\,' \,.\, \vec{j}\,') = 0 \qquad (1-31)$$

La derivada del producto expresado por (1-31) resulta

$$\frac{d}{dt}(\vec{i}\,' \,.\, \vec{j}\,') = \frac{d\vec{i}\,'}{dt} \,.\, \vec{j}\,' + \vec{i}\,' \,.\, \frac{d\vec{j}\,'}{dt} = 0$$

Por lo tanto se puede definir a cada uno de los

$$\frac{d\vec{i}\,'}{dt}\cdot\vec{j}\,'=-\;\vec{i}\,'\cdot\frac{d\vec{j}\,'}{dt}=\omega_z{}' \qquad (1-32)$$

La figura 1.13 muestra gráficamente la variación temporal del versor i´ en la dirección del versor j´ que se puede interpretar como la “velocidad tangencial” del extremo del versor i´ que es equivalente a la velocidad angular por el radio, en este caso unitario.
Manteniendo el mismo sentido de “giro”, la variación del versor j´ estará en la dirección del versor -i´ cumpliendo con lo analizado.
De igual manera se tendrá para las otras condiciones de rigidez que:

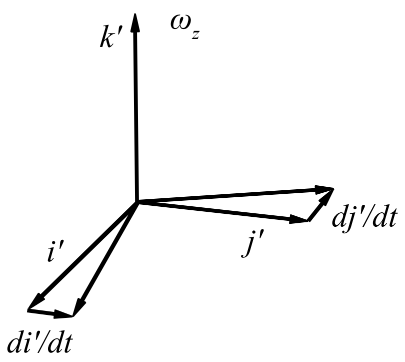


Figura 1.13. Se muestra la variación del versor i' proyectado en la dirección del versor j'. Éste sólo puede girar ya que su módulo es por definición constante en todo instante.

$$\frac{d\vec{j}\,'}{dt}\cdot\vec{k}\,'=-\;\vec{j}\,'\cdot\frac{d\vec{k}\,'}{dt}=\omega_x{}' \qquad (1-33)$$

$$\frac{d\vec{k}\,'}{dt}\cdot\vec{i}\,'=-\;\vec{k}\,'\cdot\frac{d\vec{i}\,'}{dt}=\omega_y{}' \qquad (1-34)$$

Siendo $\omega_x{}'$, $\omega_y{}'$ y $\omega_z{}'$ funciones escales que dependen del tiempo pudiendo expresarlas vectorialmente como:

$$\vec{\omega}_{eje}=\omega_x{}'\,\vec{i}\,'+\omega_y{}'\,\vec{j}\,'+\omega_z{}'\,\vec{k}\,' \qquad (1-35)$$

Por otra parte se recuerda que si existe la derivada de un vector de magnitud constante esta puede ser solo ortogonal al mismo, por lo que se cumple:

$$\frac{d\vec{i}\,'}{dt}\cdot\vec{i}\,'=0\;;\;\frac{d\vec{j}\,'}{dt}\cdot\vec{j}\,'=0\;;\;\frac{d\vec{k}\,'}{dt}\cdot\vec{k}\,'=0$$

Ahora si se expresan los vectores $\frac{d\vec{i}\,'}{dt}$, $\frac{d\vec{j}\,'}{dt}$ y $\frac{d\vec{k}\,'}{dt}$ en la base móvil $\vec{i}\,'$, $\vec{j}\,'$ y $\vec{k}\,'$ se obtendrá:

$$\frac{d\vec{i}\,'}{dt}=\left(\frac{d\vec{i}\,'}{dt}\cdot\vec{i}\,'\right)\vec{i}\,'+\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\cdot\vec{j}\,'\right)\vec{j}\,'+\left(\frac{d\vec{i}\,'}{dt}\cdot\vec{k}\,'\right)\vec{k}\,'$$
$$\frac{d\vec{i}\,'}{dt}=(0)\vec{i}\,'+(\omega_z{}')\vec{j}\,'+(\omega_y{}')\vec{k}\,' \qquad (1-36)$$

Se puede analizar que la variación temporal del versor indicado más arriba resulta perpendicular al eje *i*´. Lo mismo ocurre con las siguientes derivadas según se indica:

$$\frac{d\vec{j}\,'}{dt}=\left(\frac{d\vec{j}\,'}{dt}\cdot\vec{i}\,'\right)\vec{i}\,'+\left(\frac{d\vec{j}\,'}{dt}\cdot\vec{j}\,'\right)\vec{j}\,'+\left(\frac{d\vec{j}\,'}{dt}\cdot\vec{k}\,'\right)\vec{k}\,'$$
$$\frac{d\vec{j}\,'}{dt}=(-\omega_z{}')\vec{i}\,'+(0)\vec{j}\,'+(\omega_x{}')\vec{k}\,' \qquad (1-37)$$

$$\frac{d\vec{k}'}{dt} = (\frac{d\vec{k}'}{dt}.\vec{i}')\vec{i}' + (\frac{d\vec{k}'}{dt}.\vec{j}')\vec{j}' + (\frac{d\vec{k}'}{dt}.\vec{k}')\vec{k}'$$

$$\frac{d\vec{k}'}{dt} = (\omega_y')\vec{i}' + (-\omega_x')\vec{j}' + (0')\vec{k}' \qquad (1-38)$$

Si se reemplazan estas últimas tres expresiones en el paréntesis de la expresión (1-30) quedará:

$$\begin{aligned} \vec{v}_F = \vec{v}_M &+ x' \ [(0)\vec{i}' + (\omega_z')\vec{j}' + (\omega_y')\vec{k}'] \\ &+ y' \ [(-\omega_z')\vec{i}' + (0)\vec{j}' + (\omega_x')\vec{k}'] \\ &+ z' \ [(\omega_y')\vec{i}' + (-\omega_x')\vec{j}' + (0')\vec{k}'] \qquad (1-39) \end{aligned}$$

Agrupando los términos por sus respectivas componentes se obtendrá:

$$\vec{v}_F = \vec{v}_M + \begin{pmatrix} i' & j' & k' \\ \omega_x' & \omega_y' & \omega_z' \\ x' & y' & z' \end{pmatrix}$$

Expresando la matriz el producto vectorial de la velocidad angular del eje con el vector posición se puede expresar en forma compacta:

$$\vec{v}_F = \vec{v}_M + \vec{\omega}_{eje} \times \vec{r}_M \qquad (1-40)$$

En esta última se puede expresar también como:

$$\frac{\partial(\vec{r})}{\partial t}_F = \frac{\partial(\vec{r})}{\partial t}_M + \vec{\omega}_{eje} \times (\vec{r})_M \qquad (1-41)$$

La velocidad absoluta referida a la base fija es igual a la velocidad relativa a la base móvil más el producto vectorial de la velocidad angular con la que gira el eje móvil por el vector posición de la partícula respecto a la base móvil.
Basándose en la expresión (1-41) es posible definir un operador para derivar vectores móviles expresando su resultado respecto a la referencia fija de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial(\ )}{\partial t}_F = \frac{\partial(\ )}{\partial t}_M + \vec{\omega} \times (\ )_M \qquad (1-42)$$

Se interpreta como: la derivada temporal de un vector respecto a una referencia absoluta o fija "*F*" es igual a la derivada del mismo vector pero respecto a una referencia relativa o móvil "*M*" más el producto vectorial de la velocidad de rotación del referencial móvil por el vector que se está derivando.

$$\vec{a}_F = \frac{\partial(\vec{v})}{\partial t}_F = \frac{\partial(\vec{v})}{\partial t}_M + \vec{\omega}_{eje} \times (\vec{v})_M \qquad (1-43)$$

Siendo $\vec{\omega}_{eje} = (\omega_x \ ; \ \omega_y \ ; \ \omega_z)$ la velocidad angular con la que el vector velocidad es "arrastrado rotacionalmente" por la velocidad angular del referencia móvil.
Reemplazando el vector velocidad expresado por la expresión (1-40) en el operador se tendrá:

$$\vec{a}_F = \left.\frac{\partial\left(\vec{v}_M + \vec{\omega}_{eje} \times \vec{r}_M\right)}{\partial t}\right|_M + \vec{\omega}_{eje} \times \left(\vec{v}_M + \vec{\omega}_{eje} \times \vec{r}_M\right)_M \qquad (1-44)$$

Analizando el primer término de la expresión (1–44) se tendrá:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\partial\left(\vec{v}_M + \vec{\omega}_{eje} \times \vec{r}_M\right)}{\partial t}\right|_M &= \left.\frac{\partial\left(\vec{v}_M\right)}{\partial t}\right|_M + \left.\frac{\partial\left(\vec{\omega}_{eje} \times \vec{r}_M\right)}{\partial t}\right|_M \\
&= \vec{a}_M + \left.\frac{\partial\left(\vec{\omega}_{eje}\right)}{\partial t}\right|_M \times \vec{r}_M + \vec{\omega}_{eje} \times \left.\frac{\partial\left(\vec{r}_M\right)}{\partial t}\right|_M \\
&= \vec{a}_M + \alpha_{eje} \times \vec{r}_M + \vec{\omega}_{eje} \times \vec{v}_M \qquad (1-45)
\end{aligned}$$

Analizando el segundo término de la expresión (1–44) se tendrá:

$$\vec{\omega}_{eje} \times \left(\vec{v}_M + \vec{\omega}_{eje} \times \vec{r}_M\right)_M$$

$$\vec{\omega}_{eje} \times \vec{v}_M + \vec{\omega}_{eje} \times \vec{\omega}_{eje} \times \vec{r}_M$$

Recordando que $\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{a}_N$ que corresponde a la aceleración normal o centrípeta quedará:

$$\vec{\omega}_{eje} \times \vec{v}_M + \vec{a}_N \qquad (1-46)$$

Reemplazando las expresiones (1- 45) y (1 – 46) en la (1 – 44) y acomodando términos se tendrá:

$$\vec{a}_F = \vec{a}_M + \alpha_{eje} \times \vec{r}_M + \vec{\omega}_{eje} \times \vec{v}_M + \vec{\omega}_{eje} \times \vec{v}_M + \vec{a}_N$$

$$\vec{a}_F = \vec{a}_M + \alpha_{eje} \times \vec{r}_M + \vec{a}_N + 2.\vec{\omega}_{eje} \times \vec{v}_M \qquad (1-47)$$

Agrupando queda en definitiva

$$\vec{a}_F = \vec{a}_M + \vec{a}_{tg} + \vec{a}_N + 2.\vec{\omega}_{eje} \times \vec{v}_M \qquad (1-48)$$

Donde la aceleración absoluta referida al sistema fijo es igual a la aceleración relativa al sistema móvil mas la aceleración de arrastre compuesta por tres aceleraciones: una debida a la aceleración tangencial debida a la variación de la velocidad angular de rotación, otra dada por el cambio de dirección del vector velocidad o aceleración normal (conocida ademas como aceleración radial o centrípeta) y la aceleración debida al la simultaneidad de la velocidad angular y radial.

Movimiento del sistema móvil en rototraslación

En este movimiento el sistema de coordenadas móviles posee una rotación respecto a una referencia fija con velocidad $\vec{\omega}_{eje}$ y simultáneamente el origen de coordenadas móviles se traslada de acuerdo con una trayectoria definida por un vector $\vec{R}$.
Es importante determinar exactamente la velocidad angular $\vec{\omega}_{eje}$ de los ejes referenciales móviles siendo muy importante su determinación para la resolución de problemas.
La Figura 1.14 muestra cada uno de los vectores involucrados y las variaciones que pueden tener estos resaltando sus correspondientes trayectorias.
Para obtener la velocidad absoluta de "*P*" se deriva la expresión dada por (1-20) quedando:

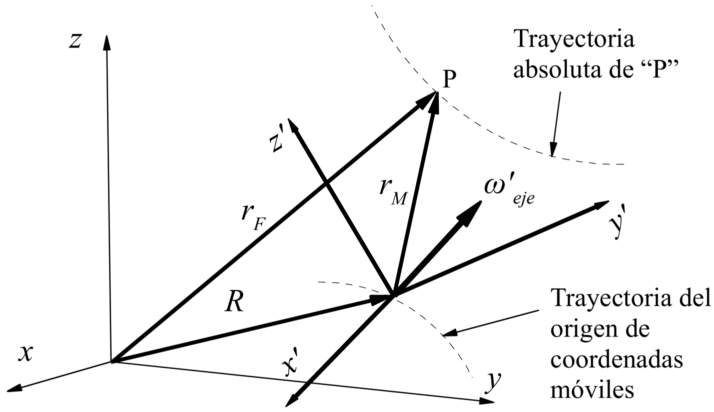


Figura 1.14: Sistema referencial en rototraslación girando con ω_{eje} y elvector posición del origen de coordenadas móviles girando con ω.

$$\left(\frac{\partial \vec{r}_F}{\partial t}\right)_F = \left(\frac{\partial \vec{r}_M}{\partial t}\right)_F + \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial t}\right)_F \qquad (1-49)$$

El primer paréntesis corresponde a la velocidad absoluta $\vec{v}_F$ del punto "P".
El segundo paréntesis corresponde al movimiento de rotación pura, analizado anteriormente dada por la expresión (1 – 41).
Para finalizar se aplica el operador de derivación al tercer paréntesis que corresponde al vector posición del origen móvil obteniendo:

$$\frac{\partial(\vec{R})}{\partial t}_F = \frac{\partial(\vec{R})}{\partial t}_M + \vec{\omega}_R \times (\vec{R}) \qquad (1-50)$$

En esta última expresión se resalta que la velocidad angular del vector posición $\vec{R}$ puede ser diferente a la velocidad angular de los ejes móviles si estos no se encuentran solidarios a dicho vector.
Finalmente para obtener la velocidad absoluta del punto "P" se suman las expresiones (1–41) y (1–50) quedando:

$$\vec{v}_F = \frac{\partial(\vec{r})}{\partial t}_M + \vec{\omega}_{eje} \times (\vec{r})_M + \frac{\partial(\vec{R})}{\partial t}_M + \vec{\omega}_R \times (\vec{R}) \qquad (1-51)$$

Analizando cada termino se tendrá:

$\vec{v}_F$ → Velocidad absoluta del punto "P" respecto del referencial fijo.

$\frac{\partial(\vec{r})}{\partial t}_M = \vec{v}_M$ → Velocidad relativa a los ejes móviles del punto "P".

$\vec{\omega}_{eje} \times (\vec{r}_M)$ → Velocidad tangencial debido al arrastre por rotación del referencial móvil del extremo del vector $\vec{r}_M$.

$\frac{\partial(\vec{R})}{\partial t}_M = \vec{v}_R$ → Velocidad con la que varía el módulo del vector posición del origen móvil.

$\vec{\omega}_R \times (\vec{R})$ → Velocidad tangencial del extremo del vector $\vec{R}$ debida a su propia rotación.

Reemplazando las expresiones anteriores se tendrá:

$$\vec{v}_F = \vec{v}_M + \vec{\omega}_{eje} \times (\vec{r}_M) + \vec{v}_R + \vec{\omega}_R \times (\vec{R}) \qquad (1-52)$$

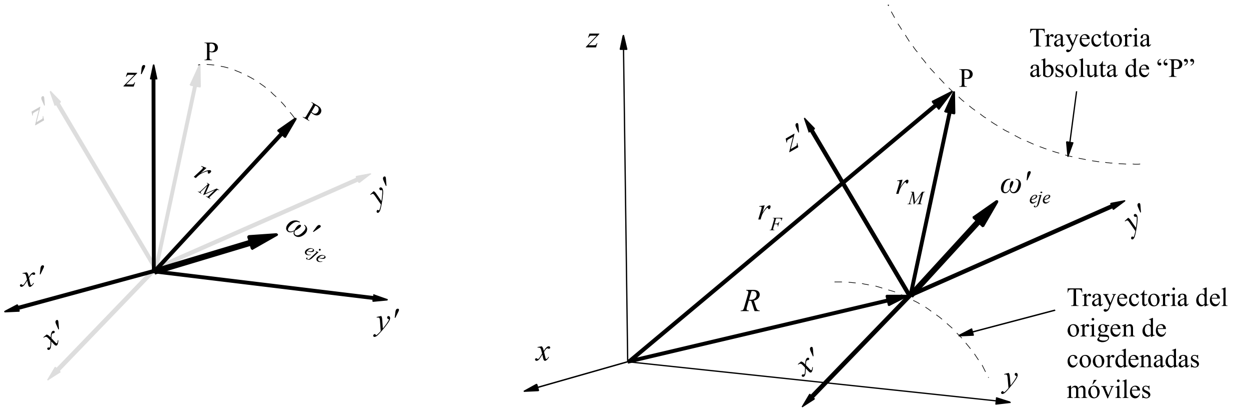


Figura 1.14: Sistema referencial en rototraslación girando con ω_{eje} y elvector posición del origen de coordenadas móviles girando con ω.

Para obtener la aceleración se debe derivar dos veces respecto del tiempo la expresión (1 – 49). El segundo paréntesis de esta última corresponde al movimiento de rotación pura, analizado anteriormente dada por la expresión (1 – 41) por lo tanto su derivada segunda corresponde a la aceleración absoluta dada por la expresión (1-48).

Para determinar la aceleración del origen de coordenadas móviles dada por el vector $\vec{R}$. Su primer derivada está dada por la expresión (1-50) por lo tanto si se deriva dicha expresión se tendrá:

$$\left.\frac{\partial(\vec{R})}{\partial t}\right|_F = \left.\frac{\partial(\vec{R})}{\partial t}\right|_M + \vec{\omega}_R \times (\vec{R}) \qquad (1-50)$$

$$\left.\frac{\partial^2(\vec{R})}{\partial t^2}\right|_F = \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\left.\frac{\partial(\vec{R})}{\partial t}\right|_F + \vec{\omega}_R \times (\vec{R})\right)\right]_F$$

$$\left.\frac{\partial^2(\vec{R})}{\partial t^2}\right|_F = \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\left.\frac{\partial(\vec{R})}{\partial t}\right|_F\right)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\vec{\omega}_R \times (\vec{R})\right)\right]_F$$

$$\left.\frac{\partial^2(\vec{R})}{\partial t^2}\right|_F = \left.\frac{\partial^2(\vec{R})}{\partial t^2}\right|_M + \vec{\omega}_R \times \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial t}\right) + \frac{\partial \vec{\omega}_R}{\partial t} \times (\vec{R}) + \vec{\omega}_R \times \left(\frac{\partial \vec{R}}{\partial t}\right)$$

$$\vec{a}_R = \left.\frac{\partial^2(\vec{R})}{\partial t^2}\right|_M + \vec{\omega}_R \times (\vec{v}_R) + \vec{\alpha}_R \times (\vec{R}) + \vec{\omega}_R \times \left[\left.\frac{\partial(\vec{R})}{\partial t}\right|_M + \omega_R \times (\vec{R})\right]$$

$$\vec{a}_R = \left.\frac{\partial^2(\vec{R})}{\partial t^2}\right|_M + \vec{\omega}_R \times \vec{v}_R + \vec{\alpha}_R \times \vec{R} + \vec{\omega}_R \times \vec{v}_R + \vec{\omega}_R \times \vec{\omega}_R \times \vec{R}$$

$$\vec{a}_R = \vec{a}_{RM} + 2 . \vec{\omega}_R \times \vec{v}_R + \vec{\alpha}_R \times \vec{R} + \vec{\omega}_R \times \vec{\omega}_R \times \vec{R} \qquad (1-51)$$

Finalmente la aceleración absoluta del movimiento de rototraslación estará dado por la expresión que resulta de sumar las expresiones (1-48) y la (1-51) quedando:

$$\vec{a}_F = \left(\vec{a}_M + \alpha_{eje} \times \vec{r}_M + \vec{a}_N + 2.\vec{\omega}_{eje} \times \vec{v}_M \right) + \left(\vec{a}_{RM} + \vec{\alpha}_R \times \vec{R} + \vec{\omega}_R \times \vec{\omega}_R \times \vec{R} + 2.\ \vec{\omega}_R \times \vec{v}_R \right) \qquad (1\text{- } 52)$$

$\vec{a}_M$ → Aceleración que depende de la variación de la velocidad del vector posición del punto respecto del sistema móvil.

$\alpha_{eje} \times \vec{r}_M$ → Aceleración tangencial del extremo del vector posición relativo al sistema móvil debido a la rotación del sistema referencial.

$\vec{a}_N$ → Aceleración normal del extremo del vector posición relativo al sistema móvil debido a la rotación del sistema referencial.

$2.\vec{\omega}_{eje} \times \vec{v}_M$ → Aceleración de Coriolis debido a la simultaneidad de la rotación del sistema referencial y de la velocidad relativa. Como es un producto vectorial, ambos vectores no deben ser colineales para su existencia.

$\vec{a}_{RM}$ → Aceleración que depende de la velocidad de traslación del vector posición del origen móvil.

$\vec{\alpha}_R \times \vec{R}$ → Aceleración tangencial del extremo del vector posición del origen del sistema móvil debido a su rotación.

$\vec{\omega}_R \times \vec{\omega}_R \times \vec{R}$ → Aceleración normal del extremo del vector posición del origen del sistema móvil debido a su rotación.

$2.\ \vec{\omega}_R \times \vec{v}_R$ → Aceleración de Coriolis debido a la simultaneidad de la rotación del vector posición del sistema móvil y de la velocidad con la que varía. Como es un producto vectorial, ambos vectores no deben ser colineales para su existencia.
IMPORTANTE: A los efectos de la resolución de problemas prácticos se debe tener presente que las bases no siempre son paralelas por lo que es necesario conocer la transformación lineal que permita relacionar las bases (i,j,k) con (i´,j´,k´).

ANEXO 1

Cambio de coordenadas cilíndricas a

Si se tienen las características cinemáticas de una partícula en coordenadas cilíndricas y se las debe referir al sistema cartesiano, la matriz de cambio de base. La Figura 1.15 presenta ambas bases vistas desde el eje "z" sabiendo que el versor "k" es común a ambas. Se puede plantear lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
e_\rho &= \cos\varphi\,\vec{i} + sen\varphi\,\vec{j} + 0\,\vec{k}\\
e_\theta &= -\,sen\,\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} + 0\,\vec{k}\\
\vec{k} &= 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + \vec{k}
\end{aligned}
$$

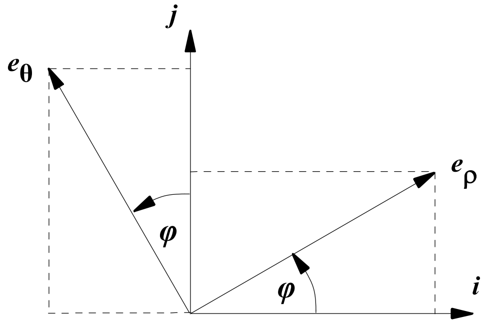


Figura 1.15: Base cilíndrica rotada respecto de la base cartesiana y vistas ambas desde la dirección del eje "z".

Que expresado en forma matricial queda

$$
\begin{pmatrix} e_\rho \\ e_\theta \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\cos\varphi & sen\varphi & 0 \\ -\,sen\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \qquad (1-51)
$$

Por lo tanto, si al vector posición dado por la expresión (1–3) se le reemplaza la base en cilíndricas por su equivalente en cartesianas quedará:

$$
\begin{aligned}
\vec{r}(t) &= \rho\,\vec{e}_\rho + z\,\vec{k}\\
\vec{r}(t) &= \rho(\cos\varphi\,\vec{i} + sen\varphi\,\vec{j}) + z\,\vec{k}\\
\vec{r}(t) &= \rho\cos\varphi\,\vec{i} + \rho\,sen\varphi\,\vec{j} + z\,\vec{k}
\end{aligned}
$$

Procediendo de igual forma con el vector velocidad dado por la expresión (1–5) pero ahora expresado en forma matricial quedará:

$$
\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} V_\rho & V_\varphi & V_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_\rho \\ e_\varphi \\ k \end{pmatrix}
$$

Reemplazando el vector de la base según la expresión (1-51) quedará:

$$
\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} V_\rho & V_\varphi & V_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +\cos\varphi & sen\varphi & 0 \\ -\,sen\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}
$$

Resolviendo el producto matricial quedará:

$$\vec{V}(t)=\begin{pmatrix}V_\rho & V_\varphi & V_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+\cos\varphi & sen\varphi & 0\\ -sen\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}i\\ j\\ k\end{pmatrix}$$

$$\vec{V}(t)=\begin{pmatrix}V_\rho & V_\varphi & V_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi\, i+sen\varphi\, j\\ -sen\,\varphi i+\cos\varphi\, j\\ k\end{pmatrix}$$

$$\vec{V}(t)=\begin{pmatrix}\cos\varphi\, V_\rho i+sen\varphi\, j\, V_\rho\\ -sen\varphi\, V_\varphi i+\cos\varphi\, j\, V_\varphi\\ V_z k\end{pmatrix}\qquad(1-52)$$

Ordenando la expresión anterior se tiene el vector velocidad expresado en coordenadas cartesianas:

$$\vec{V}(t)=(V_\rho\cos\varphi-V_\varphi sen\varphi)\vec{i}+(V_\rho sen\varphi+V_\varphi\cos\varphi)\vec{j}+V_z\vec{k}\qquad(1-53)$$

Para obtener la aceleración en coordenadas cartesianas dada en coordenadas cilíndricas se utiliza la misma matriz de cambio de base, para lo cual se presenta la expresión (1-16) en forma matricial quedará

$$\vec{a}(t)=\begin{pmatrix}(a_\rho-a_N) & (a_{cor}+a_{tg}) & (a_z)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}e_\rho\\ e_\varphi\\ z\end{pmatrix}\qquad(1-21)$$

Reemplazando el vector columna de la base dada por la expresión (1-19) queda

$$\vec{a}(t)=\begin{pmatrix}(a_\rho-a_N) & (a_{cor}+a_{tg}) & (a_z)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}+\cos\varphi & sen\varphi & 0\\ -sen\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}i\\ j\\ k\end{pmatrix}\qquad(1-22)$$

Multiplicando las matrices y ordenando la expresión de la aceleración quedará:

$$\vec{a}(t)=[(a_\rho-a_N)\cos\varphi-(a_{cor}+a_{tg})sen\,\varphi]\vec{i}+[(a_\rho-a_N)sen\varphi+(a_{cor}+a_{tg})\cos\varphi]\vec{j}+a_z\vec{k}\qquad(1-23)$$

Cambio de coordenadas esféricas a

Para facilitar la obtención de la matriz de cambio de base se analizarán los versores de la base esférica en forma independiente.
La Figura (1.10 presenta el versor $\boldsymbol{e_r}$ en sus componentes cartesianas quedando

A diferencia del versor anterior, el versor et se encuentra en el plano que genera la traza del meridiano siendo este paralelo al plano "x, y" por lo que la base se dibujará solo en este último. La Figura (2-?) presenta el versor en sus componentes cartesianas. La expresión final quedará con solo tres términos debido a que la componente en "k" es permanentemente nula.

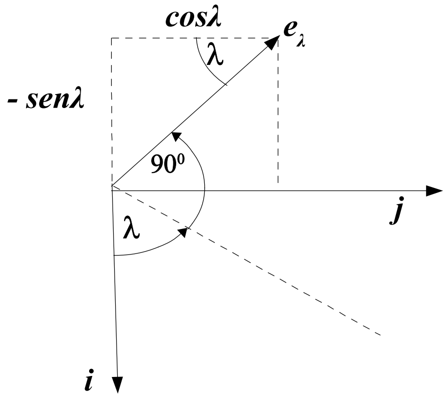


Figura 1.10. Componentes cartesianas del vector $\boldsymbol{e_\lambda}$

$$\vec{e}_{\lambda}=-\ sen\lambda\,\vec{i}+\cos\lambda\,\vec{j}+0\vec{k} \qquad (1-23)$$

Finalmente el tercer versor puede obtenerse de igual modo que los anteriores o realizando el producto vectorial de las dos bases halladas, procedimiento que se utilizará solo con fines didácticos. Para que el versor a obtener genere una terna derecha se realizará el producto vectorial en el siguiente orden

$$\vec{e}_{\theta}=\vec{e}_{\lambda}\ x\ \vec{e}_{r}=\begin{pmatrix} i & j & k \\ -\ sen\lambda & \cos\lambda & 0 \\ sen\theta\cos\lambda & sen\theta\, sen\lambda & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{\theta}=(\cos\lambda\cos\theta)\,\vec{i}+(\cos\theta)\,\vec{j}+(-\ sen\theta)\,\vec{k} \qquad (1-24)$$

La matriz de cambio de base que refiere las coordenadas esféricas a las cartesianas queda expresada por

$$\begin{pmatrix} e_{\%r} \\ e_{\theta} \\ e_{\lambda} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} sen\theta\cos\lambda & sen\theta\, sen\lambda & \cos\theta \\ \cos\lambda\cos\theta & \cos\theta & -\ sen\theta \\ -\ sen\lambda & \cos\lambda & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \qquad (1-25)$$

La expresión del vector posición dado por (1-7) se puede expresar como

$$\vec{r}(t)=r\begin{pmatrix} e_r & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Basándose en la expresión (1-25) se puede realizar el cambio de base y luego realizar las operaciones pertinentes según se muestra a continuación para obtener el vector posición en coordenadas cartesianas.

$$\vec{r}(t)=\ r\ .\begin{pmatrix} sen\theta\cos\lambda & sen\theta\, sen\lambda & \cos\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t)=r\, sen\theta\cos\lambda\, i+r\, sen\theta\, sen\lambda\, j+r\cos\theta\, k \qquad (1-26)$$

El vector velocidad dado por la expresión (1-9) expresado matricialmente queda

$$\vec{V}(t)=\begin{pmatrix} (\dot{r}) & (\dot{\theta}\ .\ r) & (\dot{\lambda}.r.sen\,\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_r \\ e_{\theta} \\ e_{\lambda} \end{pmatrix}$$

Reemplazando el vector base en coordenadas esféricas de acuerdo a la expresión (1-25) se tendrá

$$\vec{V}(t)=\vec{V}(t)=\begin{pmatrix} (\dot{r}) & (\dot{\theta}\ .\ r) & (\dot{\lambda}.r.sen\,\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} sen\theta\cos\lambda & sen\theta\, sen\lambda & \cos\theta \\ \cos\lambda\cos\theta & \cos\theta & -\ sen\theta \\ -\ sen\lambda & \cos\lambda & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix}$$

Realizando los productos matriciales indicados finalmente queda

$$\vec{V}(t)=\begin{pmatrix}(\dot{r}) & (\dot{\theta}\,.\,r) & (\dot{\lambda}.r.sen\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}sen\theta\cos\lambda i+sen\theta\, sen\lambda\, j+\cos\theta\, k\\ \cos\lambda\cos\theta i+\cos\theta\, j\pm sen\theta k\\ -\, sen\lambda i+\cos\lambda\, j+0k\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\vec{V}(t)=&\dot{r}.(sen\theta\cos\lambda i+sen\theta\, sen\lambda\, j+\cos\theta\, k)\\ &+(\dot{\theta}\,.\,r).(\cos\lambda\cos\theta i+\cos\theta\, j-\, sen\theta\, k)\\ &+(\dot{\lambda}.r.\,sen\theta).(-\, sen\lambda\, i+\cos\lambda\, j+0k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{V}(t)=&\dot{r}.sen\,\theta\cos\lambda\, i+\dot{r}.sen\theta\, sen\lambda\, j+\dot{r}.\cos\theta\, k\\ &+\dot{\theta}\,.\,r.\cos\lambda\cos\theta\, i+\dot{\theta}\,.\,r.\cos\theta\, j-\,\dot{\theta}\,.\,r.sen\theta\, k\\ &-\,\dot{\lambda}.r.sen\theta.sen\lambda i+\dot{\lambda}.r.sen\,\theta\cos\lambda\, j+0k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{V}(t)=&(\dot{r}sen\,\theta\cos\lambda+\dot{\theta}\;r\cos\lambda\cos\theta-\,\dot{\lambda}r\,sen\theta\, sen\lambda)i\\ &+(-\,\dot{r}sen\theta\, sen\lambda+\dot{\theta}\;r\cos\theta\dot{\lambda}r\,sen\theta\cos\lambda)j\\ &+(\dot{r}\cos\theta-\,\dot{\theta}\,r\,sen\theta)k\end{aligned}$$

Con la aceleración se procede de igual manera.

Cambio de coordenadas intrínsecas a cartesianas

Partiendo de la expresión del vector de posición en coordenadas cartesianas dada por la expresión (1-3) y sabiendo que *S(t)* es una función siempre creciente, en teoría es factible determinar su inversa (es decir *t = t(s)*) por lo que se puede obtener la posición en función del arco reemplazando esta última en la anterior quedando

$$\vec{r}(s)=x(s)\vec{i}+y(s)\vec{j}+z(s)\vec{k} \qquad (1-27)$$

Partiendo de esta última, la velocidad estará dada por la

$$\begin{gathered}\vec{V}(t)=\frac{d\vec{r}(s)}{dt}\\ \vec{V}(t)=\frac{d\vec{r}(s)}{ds}.\frac{ds}{dt}\\ \vec{V}(t)=\frac{d\vec{r}(s)}{ds}.\dot{S}\\ \vec{V}(t)=[\vec{T}].\dot{S} \qquad (1-28)\end{gathered}$$

La expresión del versor tangente a la trayectoria *T* en coordenadas cartesianas esta dado por

$$\vec{T}=\frac{dx_{(s)}}{ds}\vec{i}+\frac{dy_{(s)}}{ds}\vec{j}+\frac{dz_{(s)}}{ds}\vec{k} \qquad (1-29)$$

La expresión del versor normal *N* en coordenadas cartesianas esta dado por

$$\vec{N} = \frac{\frac{d\vec{T}_{(s)}}{ds}}{\left|\frac{d\vec{T}_{(s)}}{ds}\right|} = \frac{\frac{d^2 x_{(s)}}{ds^2}\vec{i} + \frac{d^2 y_{(s)}}{ds^2}\vec{j} + \frac{d^2 z_{(s)}}{ds^2}\vec{k}}{\left|\frac{d\vec{T}_{(s)}}{ds}\right|} \qquad (1\text{- }30)$$

Al recíproco del valor absoluto se lo denomina radio de curvatura ρ quedando finalmente

$$\vec{N} = \frac{\frac{d^2 x_{(s)}}{ds^2}}{\rho}\,\vec{i} + \frac{\frac{d^2 y_{(s)}}{ds^2}}{\rho}\,\vec{j} + \frac{\frac{d^2 z_{(s)}}{ds^2}}{\rho}\,\vec{k} \qquad (1\text{- }31)$$

El versor binormal B se obtiene del producto vectorial $B = T \; x \; N$ por lo que la base estará dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} = \left| \begin{matrix} \left(\frac{dx_{(s)}}{ds}\right) & \left(\frac{dy_{(s)}}{ds}\right) & \left(\frac{dz_{(s)}}{ds}\right) \\ \left(\frac{\frac{d^2 x_{(s)}}{ds^2}}{\rho}\right) & \left(\frac{\frac{d^2 y_{(s)}}{ds^2}}{\rho}\right) & \left(\frac{\frac{d^2 z_{(s)}}{ds^2}}{\rho}\right) \\ (Bx) & (By) & (Bz) \end{matrix} \right| . \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \qquad (1\text{- }32)$$

Resumiendo, dado el vector posición en coordenadas intrínsecas para expresarlo en coordenadas cartesianas se utiliza la expresión ya vista $\vec{r}(s) = x(s)\,\vec{i} + y(s)\,\vec{j} + z(s)\,\vec{k}$

Para expresar el vector velocidad $\vec{V} = \dot{S}\vec{T}$ en coordenadas cartesianas se presenta este último en forma matricial como

$$\vec{V} = (\dot{S} \quad 0 \quad 0) \, . \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \qquad (1\text{- }33)$$

Luego se reemplaza la matriz columna de los vectores base dados por (1-32) resultando

$$\vec{V} = (\dot{S} \quad 0 \quad 0) \, . \, l \left| \begin{matrix} \left(\frac{dx_{(s)}}{ds}\right) & \left(\frac{dy_{(s)}}{ds}\right) & \left(\frac{dz_{(s)}}{ds}\right) \\ \left(\frac{\frac{d^2 x_{(s)}}{ds^2}}{\rho}\right) & \left(\frac{\frac{d^2 y_{(s)}}{ds^2}}{\rho}\right) & \left(\frac{\frac{d^2 z_{(s)}}{ds^2}}{\rho}\right) \\ (Bx) & (By) & (Bz) \end{matrix} \right| . \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \qquad (1\text{- }34)$$

El resultado de este producto de matrices dará un vector columna en coordenadas cartesianas.
Con el vector aceleración se procede de igual manera. Primero se lo expresa en forma matricial quedando

$$\vec{a} = \left(\ddot{S} \quad \frac{\dot{S}}{\rho} \quad a_{BN}\right) . \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \qquad (1\text{- }35)$$

Reemplazando el vector columna por su equivalente queda

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}\ddot{S} & \frac{\dot{S}}{\rho} & a_{BN}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\left(\frac{d\,x_{(s)}}{ds}\right) & \left(\frac{d\,y_{(s)}}{ds}\right) & \left(\frac{d\,z_{(s)}}{ds}\right)\\ \left(\frac{\frac{d^2x_{(s)}}{ds^2}}{\rho}\right) & \left(\frac{\frac{d^2y_{(s)}}{ds^2}}{\rho}\right) & \left(\frac{\frac{d^2z_{(s)}}{ds^2}}{\rho}\right)\\ (Bx) & (By) & (Bz)\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}i\\ j\\ k\end{pmatrix} \qquad (1\text{-}\ 36)$$