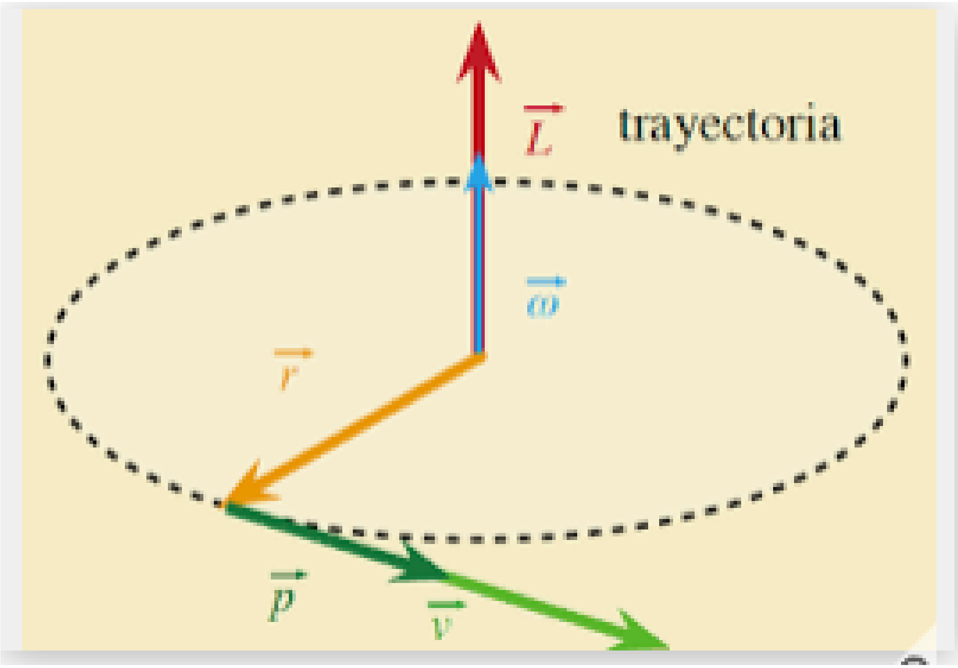
Facultad de Ingeniería
OBERA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

FISICA MECANICA
Momento Angular



Tema	Capítulo del libro
Dinámica de Rotación Momento Angular	Capítulo 10: Dinámica del Movimiento de Rotación

Momento Angular

Hemos visto que los parámetros en el movimiento de traslación de una partícula tienen su análogo en el movimiento de rotación.

La cantidad de movimiento lineal **p**, también tiene su análogo rotacional, que es la cantidad vectorial denominada cantidad de movimiento angular (ó Momento angular) **L.**

La relación entre **p** y **L** es la misma que hay entre el momento torsor $\boldsymbol{\tau}$ y la fuerza **F**:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Momento Angular

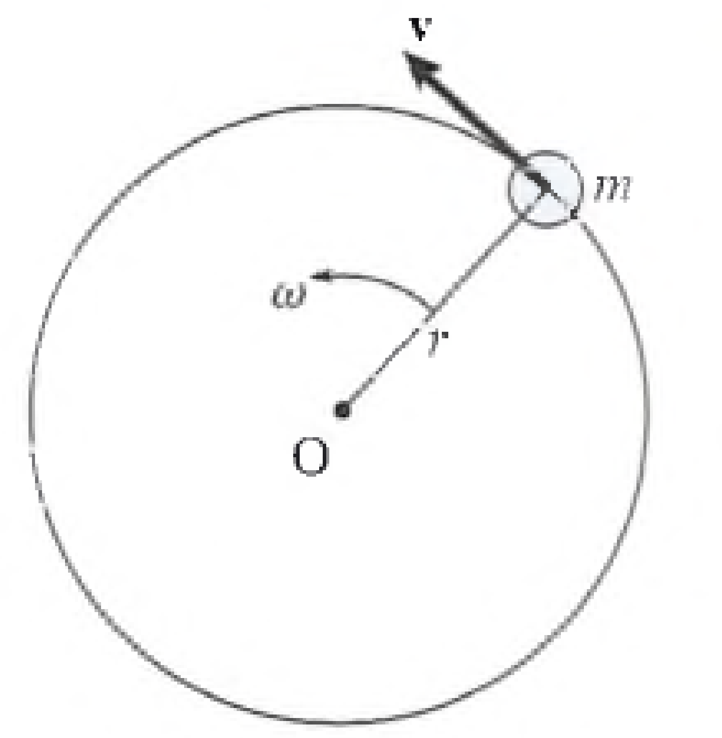
Definimos: **L**=**rxp**=**r**xm.**v**

L: cantidad de movimiento angular (de una partícula en este caso), es una magnitud **vectorial**.

L es el momento angular de una partícula de masa m, velocidad **v** (**p**=m.**v**), cuyo vector de posición es **r** respecto a un origen O de un marco de referencia inercial.

$$\boxed{L=mvr}$$

(r: brazo de palanca)



Momento Angular

L es un vector perpendicular al plano que contiene a **v** y **r**.

(esto lo podemos ver usando la regla de la mano derecha para productos vectoriales)

El valor de **L** depende del origen O elegido, ya que interviene el vector de posición **r** de la partícula respecto al origen.

Unidades: m.v.r.senφ

[(kg).(m/s).(m) = **kg.m²/s**]

Momento Angular

En el caso de un cuerpo rígido rotando.

Para cada m_i: $v_i = \omega . r_i$

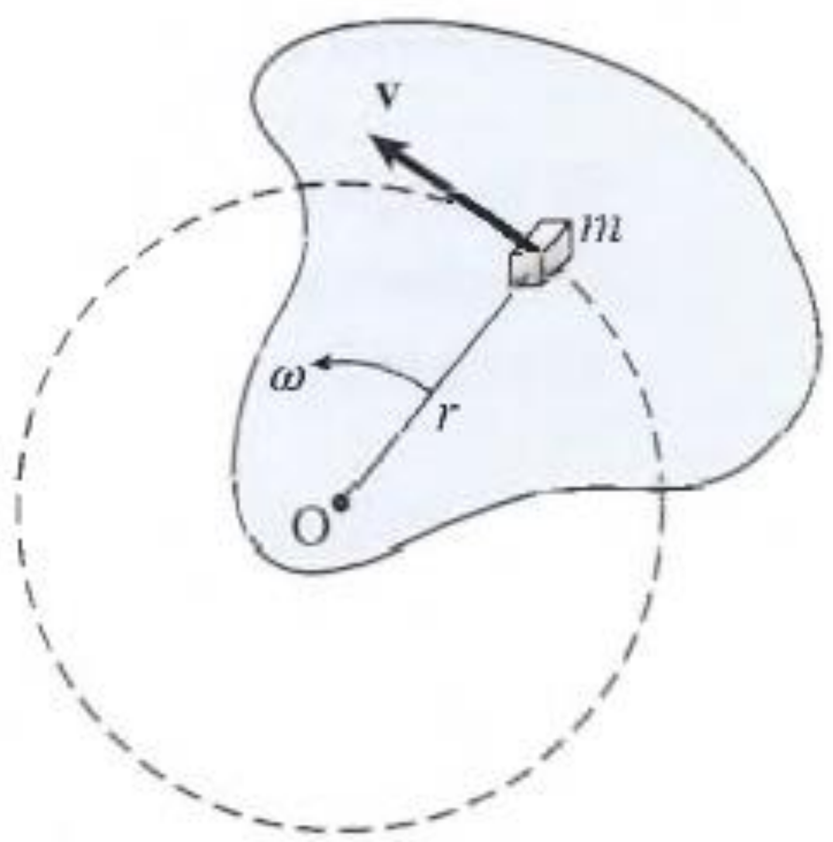
$L_i = m_i.v_i.r_i = m_i.(\omega.r_i).r_i = (m_i.r_i^2).\omega$

$Li = I_i . \omega$

Para todo el cuerpo: $L = (\Sigma m_i.r_i^2).\omega$

Por lo tanto:

$$\boxed{L = I.\omega}$$



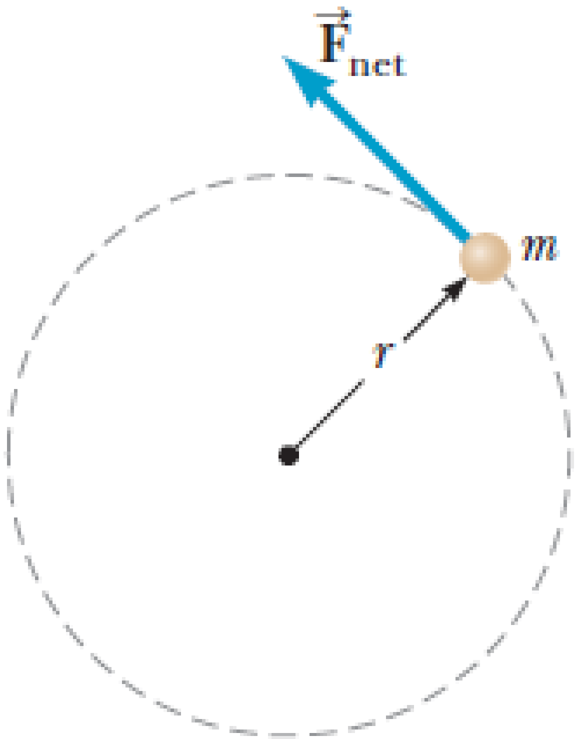
Momento Angular

$\tau = r \times F$

Si se tratara de un cuerpo rígido:

$$\sum \tau = I\alpha = I\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = I\left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta t}\right) = \frac{I\omega - I\omega_0}{\Delta t}$$

$$\sum \tau = \frac{\text{cambio del momento angular}}{\text{intervalo de tiempo}} = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$



La tasa/rapidez de cambio del momento angular de una partícula/cuerpo rígido es igual al momento de torsión de la fuerza neta que actúa sobre ella.

$\tau \,.\, t = I.\omega - I.\,\omega_0$

$\tau \,.\, t =$ Impulso angular

Impulso angular = cambio en la cantidad de movimiento angular

Momento Angular

Para cualquier sistema de partículas, incluido cuerpos rígidos, se cumple:

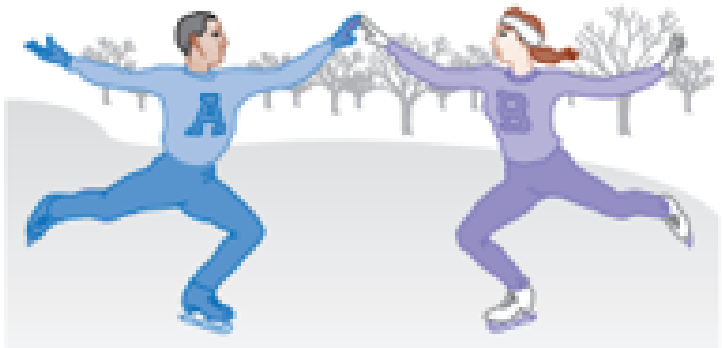
$$\boxed{\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

En un cuerpo rígido **L**=I.**ω**, entonces:

$$\Sigma\tau = \frac{dL}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I.\frac{d\omega}{dt} \quad \rightarrow \quad \Sigma\tau = I.\alpha \text{ (si I es constante)}$$

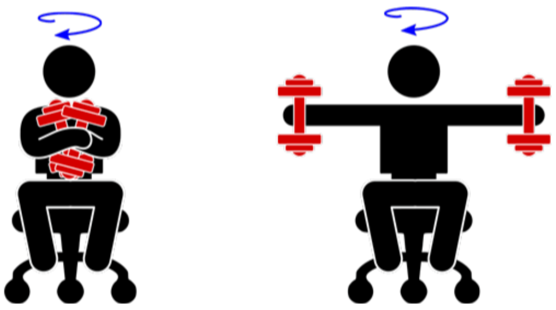
Por lo tanto $\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}$ es otro modo de expresar $\Sigma\tau = I.\alpha$

Conservación del momento angular



En la traslación la conservación del momento lineal en un sistema aislado se conserva cuando la **sumatoria de fuerzas es nula**

En la rotación la conservación del momento angular en un sistema aislado se conserva cuando la **sumatoria de momentos es nulo**



Conservación del momento angular

Ya sabemos que

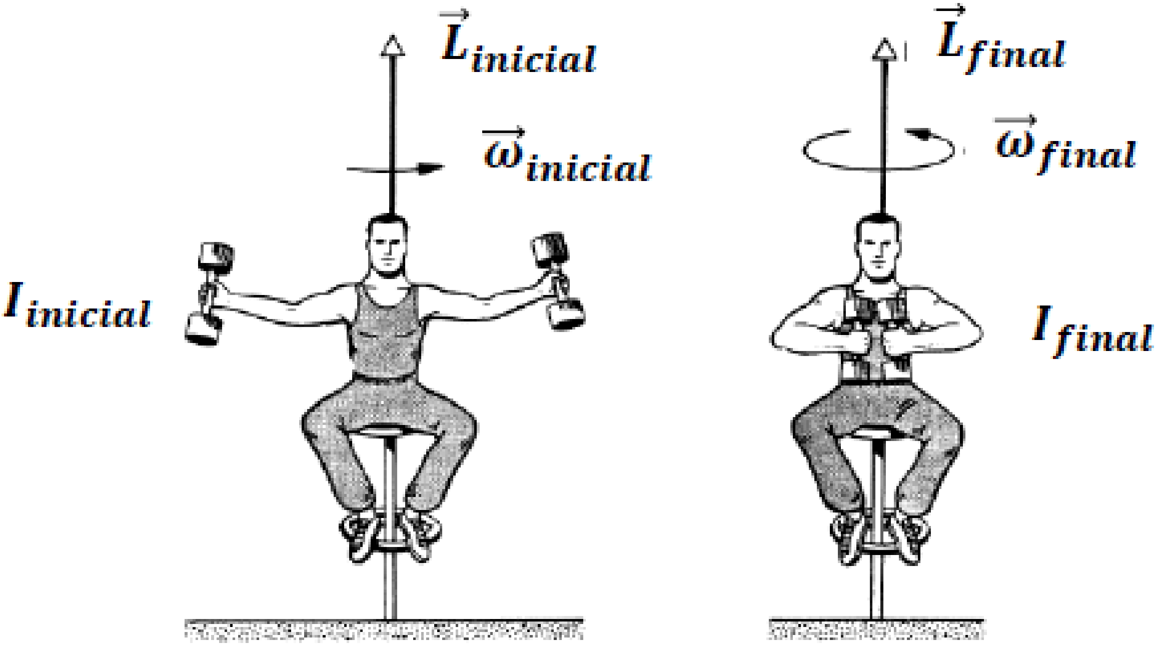
$$\sum \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Si $\Sigma \tau = 0$ → $\frac{dL}{dt} = 0$ → L es constante ($L_f = L_i$)

Si el torque externo neto que actúa sobre un sistema es cero, el momento angular total del sistema es constante (se conserva).

Este es el **Principio de conservación de la cantidad de movimiento angular**; es una ley de conservación universal al igual que conservación de la energía y del momento lineal

Conservación del momento angular

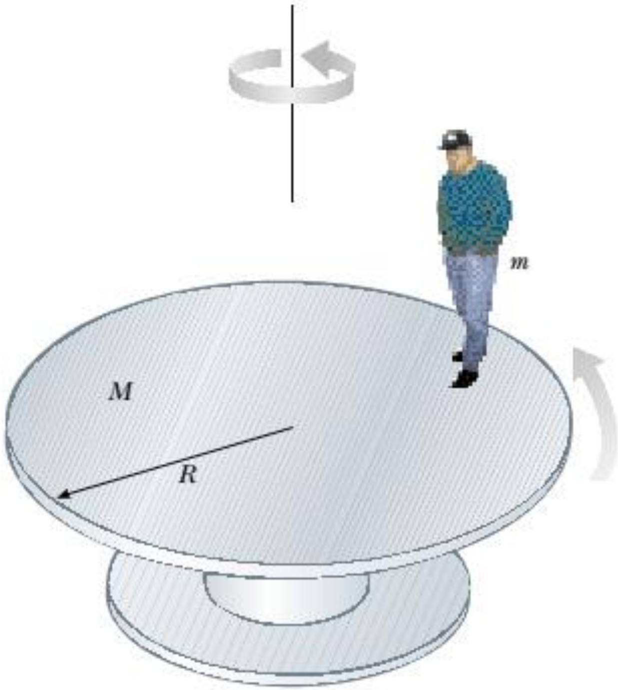


$$\vec{L}_{inicial} = \vec{L}_{final}$$

$$I_{inicial} \cdot \vec{\omega}_{inicial} = I_{final} \cdot \vec{\omega}_{final}$$

Conservación del momento angular

Una plataforma horizontal con forma de disco circular gira en un plano horizontal alrededor de un eje vertical sin fricción, como se muestra en la figura. La plataforma tiene una masa M= 100 kg y un radio R=2,0 m. Una persona cuya masa es m=60 kg, camina lentamente desde el borde del disco hacia el centro. Si la velocidad angular del sistema es 2,0 rad/s cuando la persona está en el borde, ¿Cuál es la velocidad angular cuando llega a un punto r=0,50 m del centro?



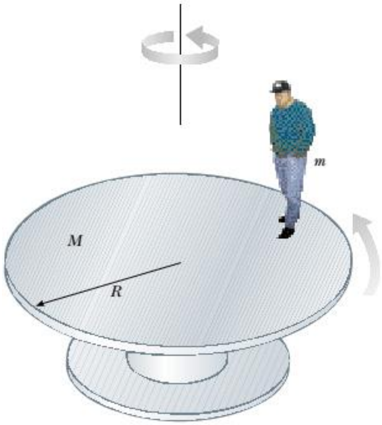
Conservación del momento angular

<u>Interpretación</u>:
Como no hay torque externos se conserva el momento angular, así que usamos el principio de conservación

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f$$

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

$$I_i = I_{platf.i} + I_{pers.i} = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2$$



Y

$$I_f = I_{platf.f} + I_{pers.f} = \frac{1}{2}MR^2 + mr^2$$

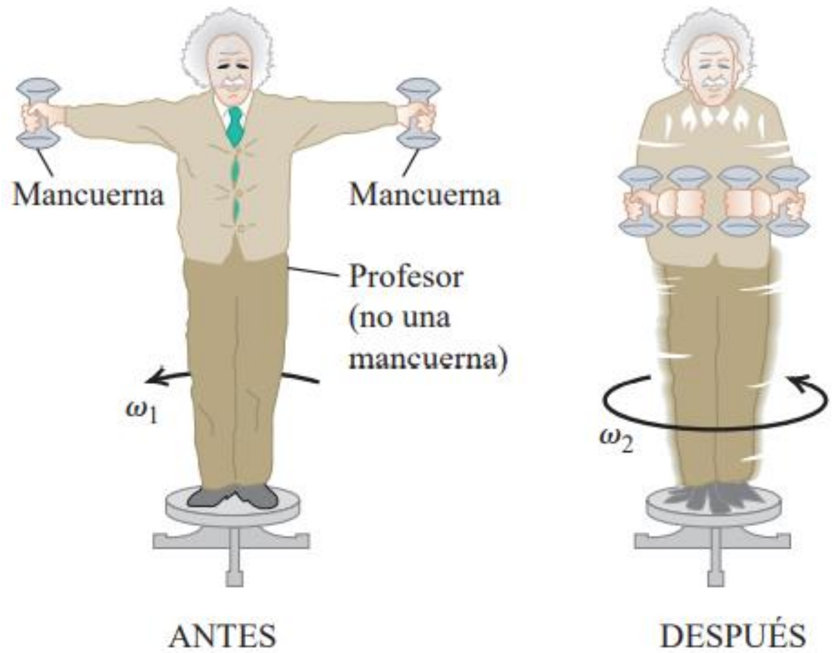
Donde $r < R$, entonces

$$\omega_f = \frac{\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2\right)}\omega_i = 4{,}1 rad/s$$

La velocidad angular aumenta

Conservación del momento angular

Un profesor de física se pone de pie en el centro de una mesita giratoria, y sin fricción, con los brazos extendidos horizontalmente y una mancuerna de 5kg en cada mano. Se le pone a girar sobre un eje vertical, dando una revolución cada 2s.



a) Calcular la velocidad angular final del profesor si él acerca las mancuernas a su abdomen. Su momento de inercia (sin las mancuernas) es de 3kg.m2 con los brazos extendidos, y baja a 2,2kg.m2 si coloca las manos en el abdomen. Las mancuernas están a 1.0 m del eje al principio y a 0,2m al final.

b) Calcular la energía cinética del sistema antes y después de acercar las mancuernas.

Conservación del momento angular

a) No hay torque externo sobre el sistema mientras el profesor gira (el peso del profesor pasa por el eje de giro), entonces habrá conservación de cantidad de movimiento angular.

$$L_0=L_f$$

$$I_0.\omega_0=I_f.\omega_f$$

$I_o = I_{0profe} + I_{0manc} = I_{0profe} + 2.m_m.r_0^2$ (Considero las mancuernas como partículas)

$I_0=....$

$If = I_{fprofe} + I_{fmanc} =......$ → $\omega_f =........$

b) $Ko = 1/2.I_0.\omega_0^2=....$

$Kf = 1/2.I_f.\omega_f^2=...$

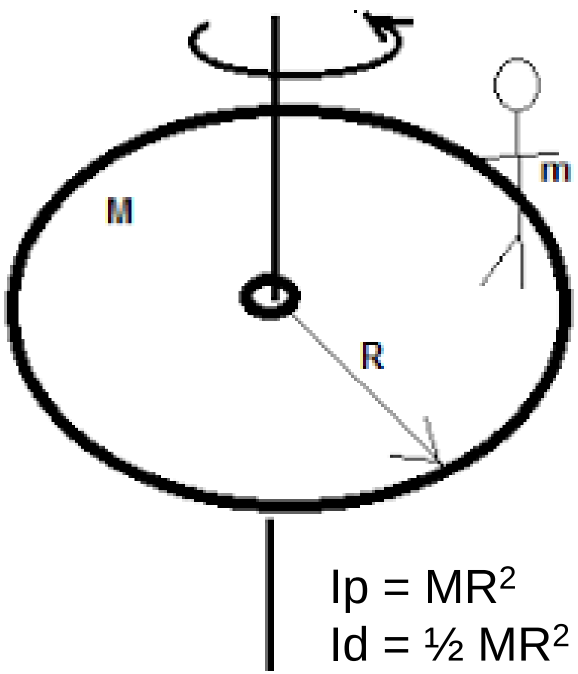
Cantidad de Movimiento Angular

Movimiento Lineal			Movimiento Rotacional
Posición	x	θ	Posición angular
Velocidad	v	ω	Velocidad angular
Aceleración	a	α	Aceleración angular
Ecuaciones del movimiento	$x = \overline{v}\, t$	$\theta = \overline{\omega} t$	Ecuaciones del movimiento
	$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	
	$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$	
	$v^2 = v_0^2 + 2ax$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$	
Masa (inercia lineal)	m	I	Momento de inercia
2ª ley de Newton	$F = ma$	$\tau = I\alpha$	2ª ley de Newton
Momento	$p = mv$	$L = I\omega$	Momento angular
Trabajo	Fd	$\tau\theta$	Trabajo
Energía cinética	$\frac{1}{2} m v^2$	$\frac{1}{2} I \omega^2$	Energía cinética
Potencia	Fv	$\tau\omega$	Potencia

VAMOS A LA PRACTICA

Ejercicio Nº 2

Una persona de 50 kg esta parada en el borde de un disco grande de 110 kg con radio de 4,0 m que gira a 0,50 rev/s alrededor de un eje que pasa por su centro. Calcular la magnitud de la cantidad de movimiento angular total del sistema.



$I_p = MR^2$

$I_d = \frac{1}{2} MR^2$

Considero a la persona como una masa puntual

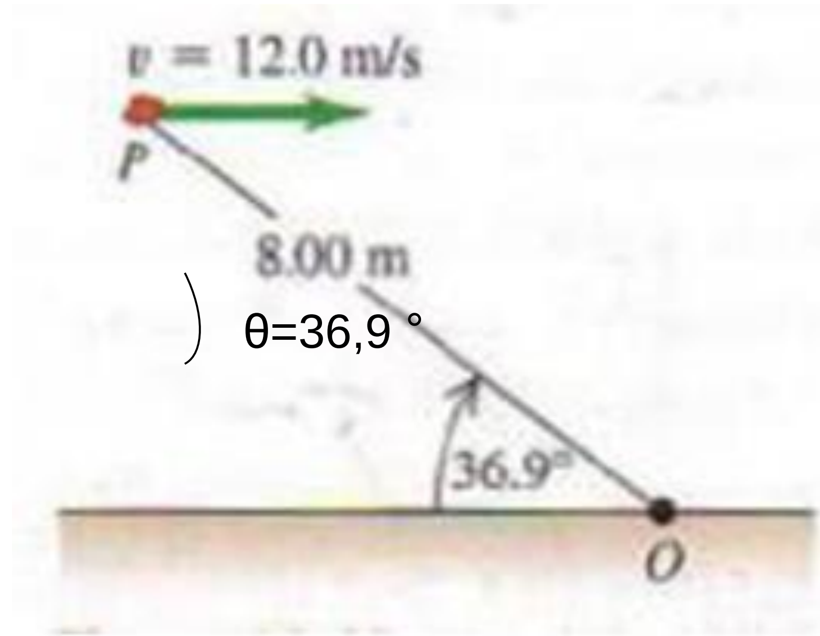
$$L = I\,\omega$$

$$L = I_p\,\omega + I_d\,\omega$$

$$L = \ldots\ldots \text{ kg m}^2/\text{s}$$

Ejercicio Nº 3

Una piedra de 2,00 kg tiene una velocidad horizontal con magnitud de 12,0 m/s cuando está en el punto *P*. ¿Qué cantidad de movimiento angular (magnitud y dirección) tiene respecto a O en ese instante?



Magnitud del momento angular

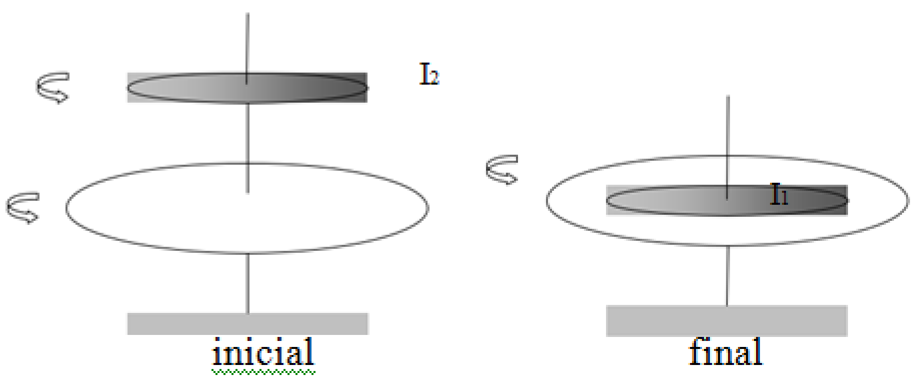
$$L = r.\, \underbrace{p}_{m.v}.\, \text{sen}\, \theta$$

$$L = r.\, m.\, v.\, \text{sen}\, \theta$$

Dirección: regla de la mano derecha

Ejercicio Nº 5

Dos discos encuentran dispuestos como indica la figura. Determinar la velocidad angular del sistema después del acoplamiento para M_1 = 0,2 kg, I_1 = 0,1 Kgm^2 y ω_1 = 2 rad/s, M_2 = 0,8 kg, I_2 = 0,1 Kgm^2 y ω_2 = 0 rad/s.



En el movimiento rotacional a lo largo del mismo eje, se juntan y se adhieren

$\Downarrow$

Conservación del momento angular

$M_1 = 0{,}2$ kg, $I_1 = 0{,}1$ Kgm^2 y $\omega_1 = 2$ rad/s,
$M_2 = 0{,}8$ kg, $I_2 = 0{,}1$ Kgm^2 y $\omega_2 = 0$ rad/s.

$$L_0 = L_F$$

$$I_{01}\,\omega_{01} + \cancel{I_{02}\,\omega_{02}} = I_{F1}\,\omega_{F1} + I_{F2}\,\omega_{F2}$$

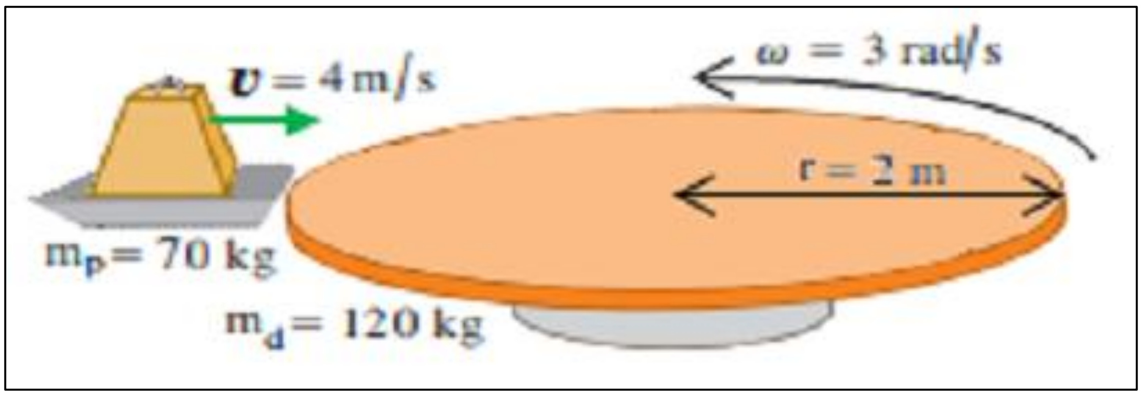
$$I_{01}\,\omega_{01} = (I_{F1} + I_{F2})\,\omega$$

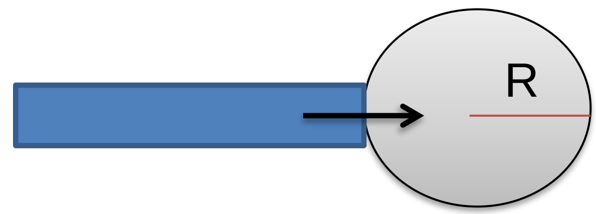
$$\omega = \frac{I_{01}\,\omega_{01}}{(I_{F1} + I_{F2})}$$

Ejercicio Nº 6

Una mesa giratoria de 120 kg masa con forma de disco plano tiene 2 m de radio, gira inicialmente con rapidez angular de 3 rad/s. Un paquete de 70 kg masa viene acercándose sobre una cinta transportadora con una trayectoria radial al disco (como se indica en la figura) y con una velocidad de 4 m/s, finalmente queda apoyado en el borde de la mesa.

Determinar la velocidad angular con que girará la mesa luego que el paquete quede apoyado en el borde de esta.





$$L_{paquete} = r.\ p.\ \text{sen}\ \theta$$

180°

$$L_{paquete} = 0$$

$$L_0 = L_F$$

$$I_{0m}\,\omega_{0m} + \cancel{I_{0p}\,\omega_{0p}} = I_{Fm}\,\omega_{Fm} + I_{Fm}\,\omega_{Fp}$$

$$I_{0m}\,\omega_{0m} = (I_{Fm} + I_{Fp})\,\omega$$

$$\omega = \frac{I_{0m}\,\omega_{0m}}{(I_{Fm} + I_{Fp})}$$

ω = ……. rad /s