

## ***CAPITULO 6***

## ***NIVELACION***

6.	Nivelación	6-1
6.1.	Forma de la Tierra	6-1
6.2.	Curvatura y refracción	6-3
6.3.	Nivelación trigonométrica	6-6
6.4.	Nivelación taquimétrica	6-9
6.5.	Nivelación Geométrica	6-11
6.5.1.	Nivelación geométrica simple desde el extremo	6-11
6.5.2.	Nivelación geométrica simple desde el medio	6-13
6.5.3.	Nivelación geométrica compuesta desde el medio	6-14
6.6.	Nivelación de perfiles	6-16
6.7.	Control de nivelaciones	6-18
6.7.1.	Error de cierre	6-18
6.7.2.	Tolerancia del error de cierre	6-19
6.7.3.	Compensación de nivelaciones	6-20
	6.7.3.1. Compensación proporcional a la distancia	6-20
	6.7.3.2. Compensación sobre los puntos de cambio	6-21
6.8.	Cálculo y ajuste del error de inclinación	6-24
	Problemas propuestos	6-26



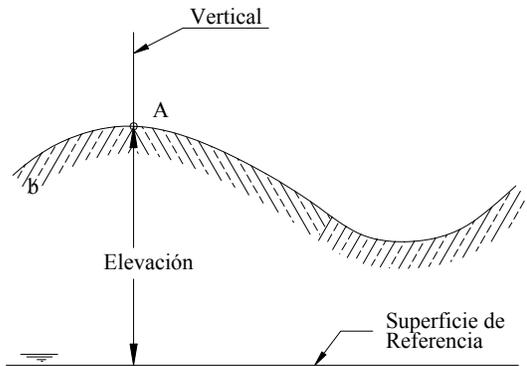


Figura 6.1 Elevación o altitud de un punto

## 6. NIVELACIÓN

La nivelación es el proceso de medición de elevaciones o altitudes de puntos sobre la superficie de la tierra. La elevación o altitud es la distancia vertical medida desde la superficie de referencia hasta el punto considerado. La distancia vertical debe ser medida a lo largo de una línea vertical definida como la línea que sigue la dirección de la gravedad o dirección de la plomada (figura 6.1).

### 6.1 Forma de la Tierra

Para el estudio de la nivelación es necesario definir o determinar la forma de la tierra, problema extremadamente complejo si no imposible para una solución matemática.

Fue costumbre definir la superficie de la tierra como la superficie del geoide o superficie de nivel, que coincide con la superficie del agua en reposo de los océanos, idealmente extendido bajo los continentes, de modo que la dirección de las líneas verticales crucen perpendicularmente esta superficie en todos sus puntos<sup>1</sup>.

En realidad, la superficie del geoide es indeterminada, ya que depende de la gravedad y esta a su vez de la distribución de las masas, de la uniformidad de las mismas y de la deformación de la superficie terrestre. Se ha demostrado que la tierra no sólo es achatada en los polos, sino también en el Ecuador aunque en mucha menor cantidad. Debido a la complejidad del problema, se ha reemplazado la superficie del geoide por la superficie de un elipsoide que se ajusta lo suficiente a la forma real de la tierra. Con esta aproximación podemos asumir que una superficie de nivel es perpendicular en cualquier punto a la vertical del lugar o dirección de la plomada, tal y como se muestra en la figura 6.2.

Un plano horizontal en un punto sobre la superficie terrestre es perpendicular a la línea vertical que pasa por el punto, es decir, es un plano tangente a la superficie de nivel solamente en dicho punto (figura 6.3).

**La cota absoluta de un punto** es la distancia vertical entre la superficie equipotencial que pasa por dicho punto y la superficie equipotencial de referencia o superficie del elipsoide ( $Q_A$  y  $Q_B$  en la figura 6.3).

<sup>1</sup> Zakatov P. (1981). *Curso de Geodesia superior*. Moscú: Editorial Mir., p.14

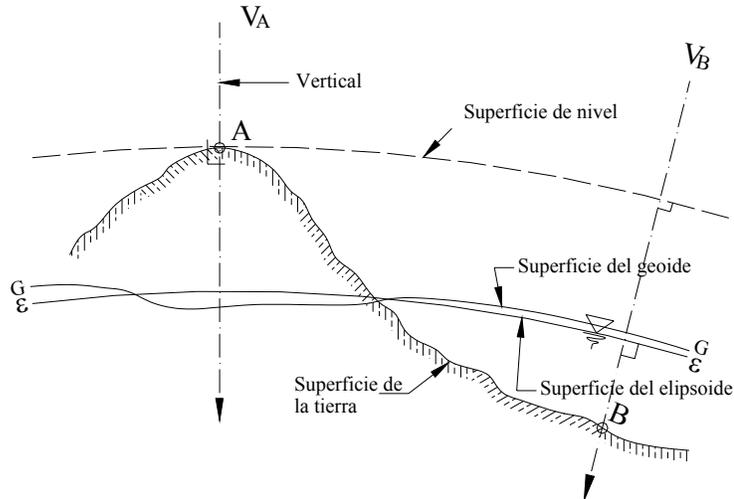


Figura 6.2 Representación de las superficies del geoide y el elipsoide

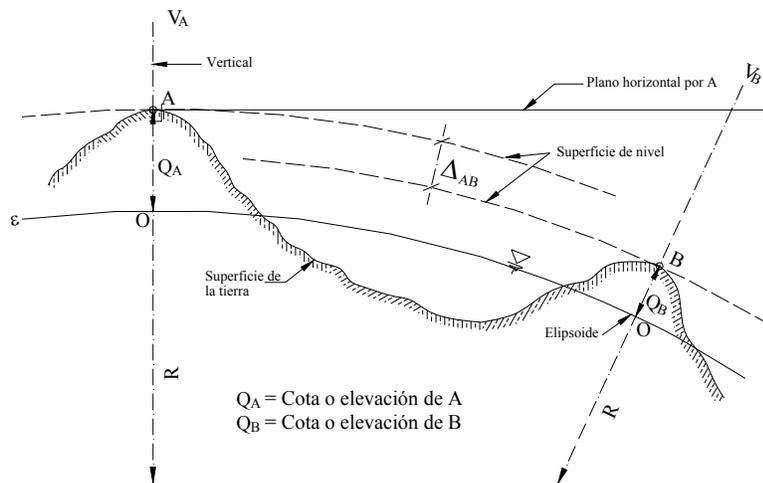


Figura 6.3 Plano horizontal de un punto sobre la superficie de la tierra

**El desnivel entre dos puntos** ( $\Delta_{AB}$ ) es la distancia vertical entre las superficies equipotenciales que pasan por dichos puntos. El desnivel también se puede definir como la diferencia de elevación o cota entre ambos puntos.

$$\Delta_{AB} = Q_B - Q_A \quad (6.1)$$

Para la solución de los problemas prácticos de ingeniería, debemos estimar hasta que punto se puede asumir, sin apreciable error, que el plano horizontal coincide en toda su extensión con la superficie de nivel; es decir, hasta que punto podríamos considerar la tierra como plana.

## 6.2 Curvatura y Refracción

Aceptando la simplificación sobre la forma de la tierra, debemos estimar el efecto que la misma tiene en el proceso de nivelación. Como se puede observar en la figura 6.4, una visual horizontal lanzada desde el punto A se aleja de la superficie de la tierra en función de la distancia horizontal D, por lo que el *efecto de la curvatura de la tierra*  $e_c$ , será la distancia  $BB'$ .

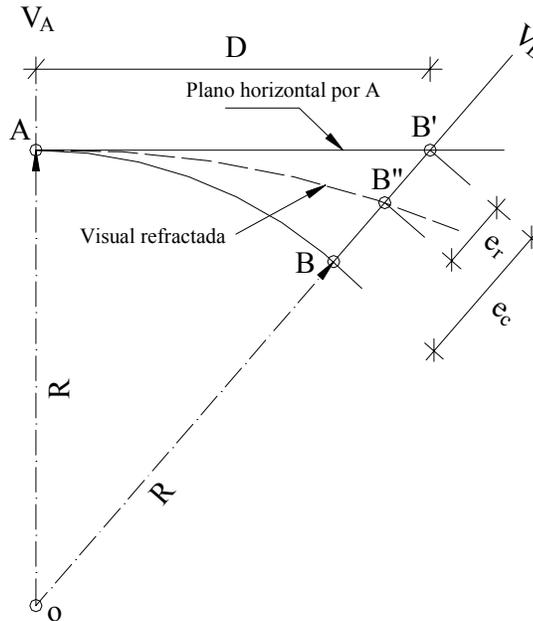


Figura 6.4 Representación de los efectos de curvatura y refracción

Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos

$$(R + e_c)^2 = R^2 + D^2$$

$$R^2 + 2Re_c + e_c^2 = R^2 + D^2$$

$$e_c = \frac{D^2 - e_c^2}{2R} \quad (6.2)$$

Tomando un valor de  $R = 6.370$  km, y considerando por el momento una distancia horizontal de unos pocos km, digamos 2 km, la magnitud del efecto de curvatura resulta un valor pequeño por lo que  $e_c^2 \cong 0$  por ser un infinitésimo de orden superior, quedando la ecuación 6.2

$$e_c = \frac{D^2}{2R} \quad (6.3)$$

Si recordamos que la atmósfera está constituida por una masa de aire dispuesta en estratos de diferentes densidades, considerados constantes para cada estrato e iguales a la densidad media del

aire del estrato considerado, la refracción atmosférica desviará la visual lanzada desde A describiendo una línea curva y generando el efecto de refracción ( $e_r$ ), tal y como se muestra en la figura 6.4.

El efecto de refracción depende de la presión atmosférica, temperatura y ubicación geográfica, pero se puede admitir, para simplificar el problema, como función directa de la curvatura terrestre.

$$e_r = K \cdot e_c \quad (6.4)$$

$$e_r = K \frac{D^2}{2R}$$

K representa el coeficiente de refracción.

Se puede observar en la figura 6.4 que el efecto de refracción contrarresta el efecto de curvatura, por lo que el efecto o error total de curvatura y refracción ( $e_{cr}$ ) se determina según la siguiente expresión:

$$e_{cr} = e_c - e_r = \frac{D^2}{2R}(1-K) \quad (6.5)$$

$$e_{cr} = \frac{D^2}{2R}(1-K)$$

El campo topográfico planimétrico dependerá de la precisión que se desee obtener y de la apreciación de los instrumentos a utilizar en las operaciones de nivelación.

En el ejemplo 6.1 determinaremos el límite del campo topográfico planimétrico para una nivelación de precisión.

### ***Ejemplo 6.1.***

Determinar la máxima distancia horizontal para una nivelación de precisión en la que se requiere que el  $e_{cr} \leq 1$  mm.

#### ***Solución***

Para mantener el  $e_{cr} \leq 1$  mm, es necesario que en la nivelación se empleen instrumentos con apreciación de 1 mm y aproximaciones de lectura del orden de décimas de mm.

Aplicando la ecuación 6.5 tenemos:

$$e_{cr} = \frac{D^2}{2R}(1-K) \quad \therefore \quad D = \sqrt{\frac{2Re_{cr}}{1-K}}$$

Tomando como valor promedio de  $k = 0,16$  y haciendo  $e_{cr} = 1$  mm nos queda:

$$D = \sqrt{\frac{2 \times 6.370.000 \times 0,001}{(1-0,16)}} = 123,153m$$

Redondeando,  $D = 120$  m

### Ejemplo 6.2

¿Cual sería el límite del campo topográfico para nivelaciones geométricas con nivel automático y mira vertical con apreciación de 1 cm?.

#### Solución

Como las miras verticales utilizadas en las nivelaciones geométricas vienen graduadas al centímetro, pudiéndose estimar lecturas al milímetro, asumiremos para este problema una precisión en la lectura de 2,5 mm, por lo que  $e_{cr} = 2.5$  mm.

Aplicando el mismo procedimiento del ejemplo 6.1, tenemos:

$$D = \sqrt{\frac{2 \times 6.370.000 \times 0,0025}{(1-0,16)}} = 194,722m$$

Redondeando,  $D = 200$  m

A fin de determinar los límites del campo topográfico altimétrico para los distintos tipos de nivelación, en la tabla 6.1 se calcula el  $e_{cr}$  para diferentes distancias, tomando como valores promedio de  $K = 0,16$  y  $R = 6.370$  km.

En la tabla 6.1, los valores de  $D$  representan el límite del campo topográfico perimétrico para los diferentes tipos de nivelación.

**Tabla 6.1. Límites del campo topográfico planimétrico**

<b>D</b>	<b><math>e_{cr}</math> mm</b>	<b>TIPO DE NIVELACION</b>
100	0,65	Nivelación geométrica de precisión. Mira vertical de invar y micrómetro óptico.
200	2,64	Nivelación geométrica con mira vertical.
400	10,55	Nivelaciones taquimétricas . Determinación de puntos de relleno.
500	16,48	Considerar el $e_{cr}$ .
$\geq 1.000$	65,93	

Para valores de  $D > 400$  m, se debe tomar en cuenta el  $e_{cr}$ .



$\alpha$  = Angulo vertical de elevación

$\phi$  = Angulo cenital

$P$  = Inclinación de la visual en %

$h_I$  = Altura del instrumento

$h_s$  = Altura de la señal (lectura en mira)

En ángulo vertical se puede medir con teodolito o con clisímetro, dependiendo de la precisión deseada.

Para el caso de visual horizontal, en el que  $\alpha = 0$  y  $\phi = 90^\circ$  (visual con nivel), la ecuación 6.4 queda

$$\Delta_{AB} = h_I - h_s \quad (6.7)$$

que es el caso particular de la nivelación geométrica o nivelación diferencial que estudiaremos más adelante.

### Ejemplo 6.3

Con los datos de la figura E6-3, determine el desnivel entre los puntos A y B y la cota del punto B.

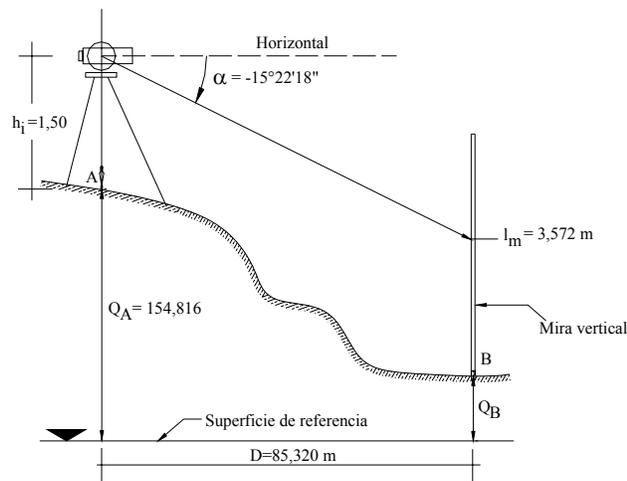


Figura E6-3

### Solución

Aplicando la ecuación 6.1

$$\Delta_{AB} = 85,320 \times \tan(-15^\circ 22' 18'') + 1,50 - 3,572 = -25,528 \text{ m.}$$

El signo negativo indica que el punto B está por debajo del punto A.

Para calcular la cota del punto B aplicamos la ecuación 6.1

$$\begin{aligned}\Delta_{AB} &= Q_B - Q_A \therefore Q_B = \Delta_{AB} + Q_A \\ Q_B &= 25,528 + 154,816 = 126,288 \\ Q_B &= 129,288 \text{ m.}\end{aligned}$$

### Ejemplo 6.4

Con los datos de la figura E6-4 determine el desnivel entre A y B y la cota del punto B.

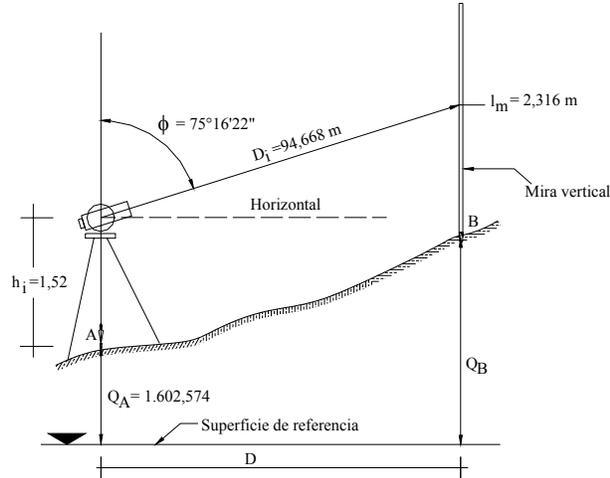


Figura E6-4

### Solución

Para la solución de este problema debemos referirnos al capítulo 3.4 correspondiente a medición de distancia.

Aplicando la ecuación 3.4 de reducción de distancias inclinadas al horizonte tenemos:

$$D_H = D_i \text{sen } \phi \quad (3.4)$$

Sustituyendo la 3.4 en 6.2 nos queda,

$$\begin{aligned}\Delta_{AB} &= D_i \text{sen } \phi \times \text{cotg } \phi + h_p - l_m \\ \Delta_{AB} &= D_i \text{cos } \phi + h_p - l_m = 94,668 \times \text{cos}(75^\circ 16' 22'') + 1,52 - 2,316 \\ \Delta_{AB} &= +23,270 \text{ m}\end{aligned}$$

El signo positivo indica que B está por encima del punto A.

$$\begin{aligned}\Delta_{AB} &= Q_B - Q_A \therefore Q_B = \Delta_{AB} + Q_A \\ Q_B &= 23,270 + 1.602,574 = 1.625,844 \text{ m} \\ Q_B &= 1.625,844 \text{ m.}\end{aligned}$$

## 6.4 Nivelación Taquimétrica

La taquimetría, palabra compuesta proveniente del griego *ταχύς-metro* que significa medida rápida, es un procedimiento topográfico que se apoya en la medición óptica de distancias para la ubicación plano altimétrica de puntos sobre la superficie terrestre.

Para la determinación del desnivel por taquimetría utilizaremos las ecuaciones 3.21 y 6.6 para teodolitos que miden ángulos de elevación tenemos:

$$D_H = KH \cos^2 \alpha \quad (3.21)$$

$$\Delta_{AB} = D \tan \alpha + h_I - l_m \quad (6.6)$$

Sustituyendo la 3.21 en la 6.6 nos queda:

$$\Delta_{AB} = KH \times \cos^2 \alpha \tan \alpha + h_I - l_m \quad (6.8)$$

$$\Delta_{AB} = KH \cos \alpha \times \operatorname{sen} \alpha + h_I - l_m \quad (6.9)$$

Para teodolitos que miden ángulos cenitales la ecuación 6.9 queda como sigue:

$$\Delta_{AB} = KH \cos \phi \operatorname{sen} \phi + h_I - l_m \quad (6.10)$$

Recordemos que K es la constante diastimométrica generalmente igual a 100 para los instrumentos modernos y H es el intervalo de mira o diferencia entre la lectura superior y la lectura inferior a la mira.

Por la sencillez y rapidez de la toma de datos en campo, el método taquimétrico constituye el método más empleado en el levantamiento de puntos de relleno.

Por ser un levantamiento rápido para puntos de relleno, donde no se requiere de gran precisión, el campo topográfico altimétrico para la taquimetría se puede extender a distancias de hasta 400 m.

### Ejemplo 6.5

Con los datos de la figura E6-5, calcule la cota del punto B.

#### Solución

Aplicando la ecuación 6.10 de nivelación taquimétrica con ángulo cenital tenemos,

$$\Delta_{AB} = 100 (3,250 - 1,286) \cos 85^\circ 32' 20'' \times \operatorname{sen} 85^\circ 32' 20'' + 1,540 - 2,268$$

$$\Delta_{AB} = 14,502 \text{ m}$$

$$\Delta_{AB} = Q_B - Q_A \quad \therefore Q_B = \Delta_{AB} + Q_A$$

$$Q_B = 14,502 + 956,432 = 970,934 \text{ m}$$

$$Q_B = 970,934 \text{ m}$$

Por lo general, en trabajos taquimétricos se levantan varios puntos a partir de una misma estación.

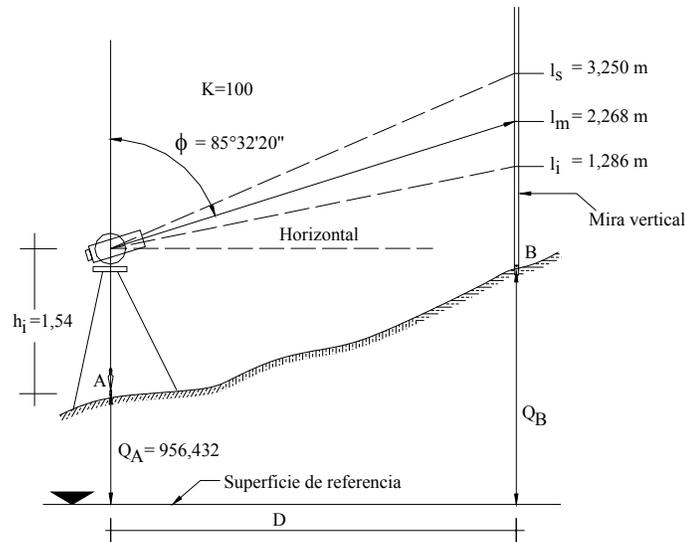


Figura E6.5

**Ejemplo 6.6**

Con los datos de la tabla TE6.6.1, calcule las cotas de los puntos 1 al 5.

**Tabla TE6.6.1**  
Libreta de campo para una nivelación taquimétrica

EST	Pv	Ángulos medidos		Lecturas en mira		
		$\angle H$	$\angle V$	$l_s$	$l_m$	$l_i$
A	1		$91^{\circ}30'$	3,658	2,493	1,328
$h_i = 1,602$	2		$95^{\circ}17'$	2,302	1,921	1,540
$Q_A = 1.620,32$	3		$83^{\circ}10'$	1,514	1,274	1,034
	4		$90^{\circ}30'$	2,386	1,406	0,426
	5		$85^{\circ}32''$	2,043	1,704	1,365

**Solución**

Aplicando la ecuación 6.10 para el cálculo del desnivel entre A y cada uno de los puntos restantes y la ecuación 6.1 para el cálculo de las cotas, construimos la tabla TE6.6.2.

**Tabla TE6.6.2.**

A	Pv	Dist	Desnivel	Cota
A	1	232,84	- 6,99	1.613,33
	2	75,55	- 7,31	1.613,01
	3	47,32	+ 6,00	1.626,32
	4	195,99	- 1,51	1.618,81
	5	67,39	+ 5,16	1.625,48

En la tabla TE6.6.2 se ha incluido una columna para el cálculo de las distancias, ya que las mismas se requieren para el cálculo de las coordenadas rectangulares y para la elaboración del plano acotado del terreno, procedimiento que estudiaremos más adelante.

## 6.5. Nivelación Geométrica

**La nivelación geométrica o nivelación diferencial** es el procedimiento topográfico que nos permite determinar el desnivel entre dos puntos mediante el uso del nivel y la mira vertical.

La nivelación geométrica mide la diferencia de nivel entre dos puntos a partir de la visual horizontal lanzada desde el nivel hacia las miras colocadas en dichos puntos (figura 6.6).

Cuando los puntos a nivelar están dentro de los límites del campo topográfico altimétrico y el desnivel entre dichos puntos se puede estimar con una sola estación, la nivelación recibe el nombre de **nivelación geométrica simple** (figura 6.6). Cuando los puntos están separados a una distancia mayor que el límite del campo topográfico, o que el alcance de la visual, es necesario la colocación de estaciones intermedias y se dice que es una **nivelación compuesta** (figura 6.7).

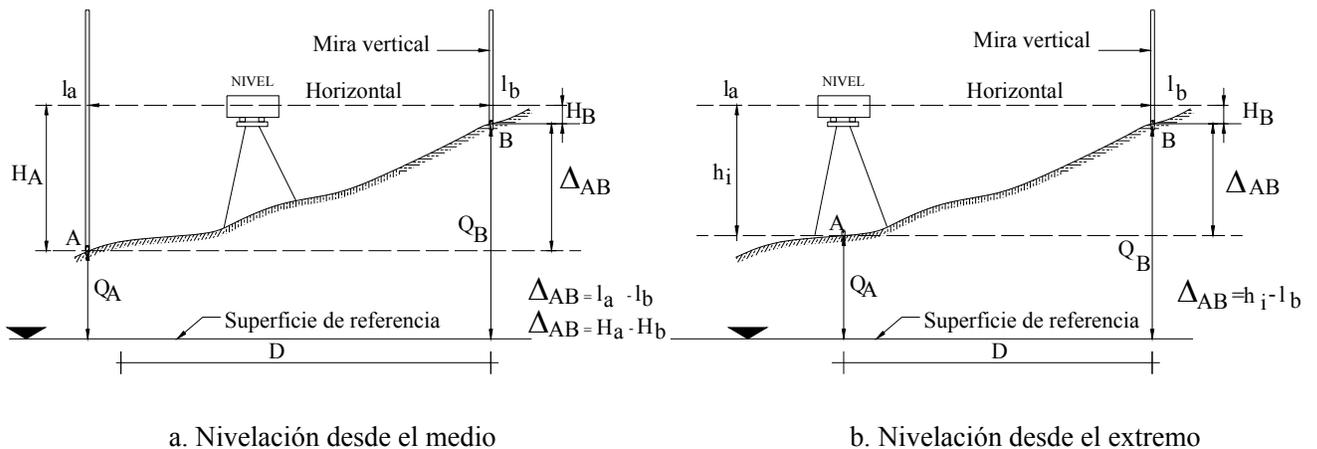


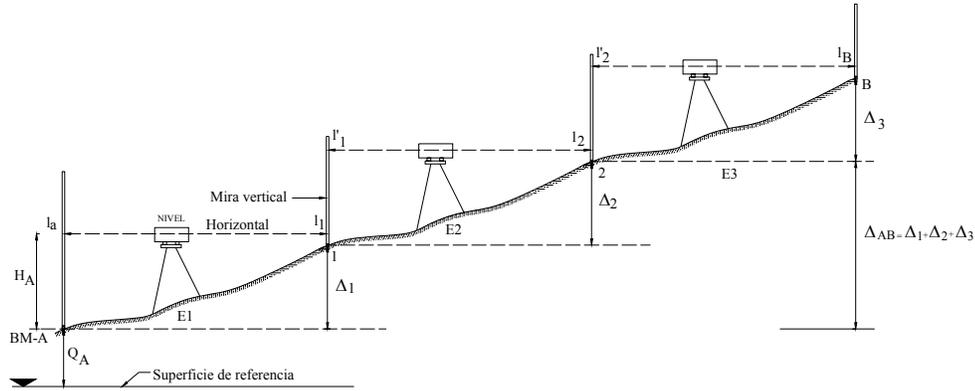
Figura 6.6. Nivelación Geométrica Simple

### 6.5.1. Nivelación Geométrica Simple desde el Extremo

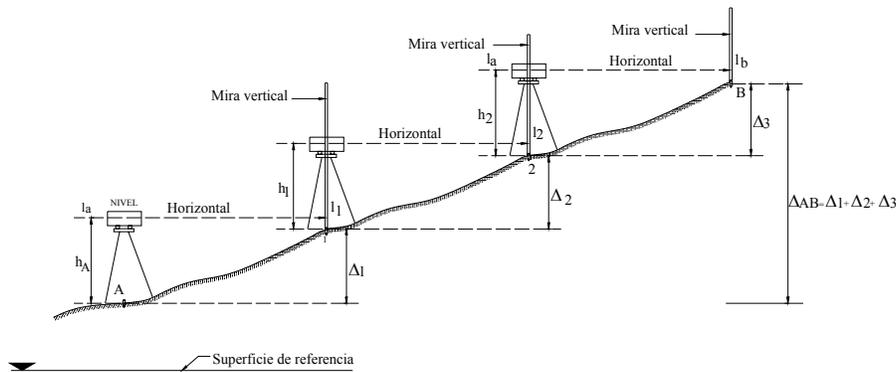
La figura 6.6.b representa el caso de una nivelación geométrica simple desde el extremo. En este tipo de nivelación es necesario medir la altura del instrumento en el punto de estación A y tomar lectura a la mira colocada en el punto B. Como se puede observar en la figura, el desnivel entre A y B será:

$$\Delta_{AB} = h_I - l_B \quad (6.11)$$

Es necesario recordar que previo a la toma de la lectura a la mira en el punto B, es necesario estacionar y centrar el nivel exactamente en el punto A y medir la altura del instrumento con cinta métrica. Este proceso, adicionalmente a la imprecisión en la determinación de la altura del instrumento, toma más tiempo que el empleado en la nivelación geométrica desde el medio; además que a menos que dispongamos de un nivel de doble curvatura, no es posible eliminar el error de inclinación del eje de colimación representado en la figura 6.8.

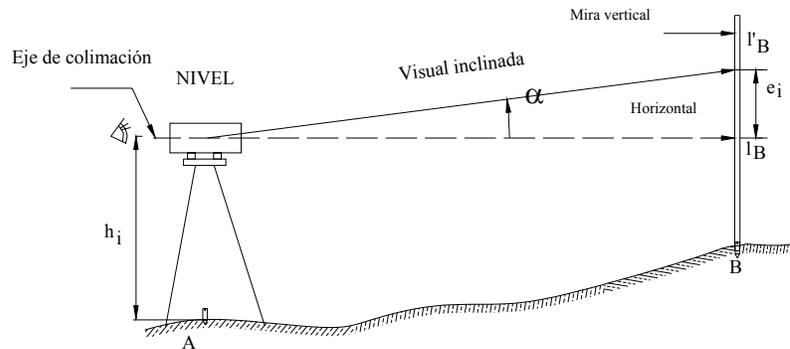


a. Nivelación compuesta desde el medio



b. Nivelación compuesta desde el extremo

**Figura 6.7. Nivelación Geométrica Compuesta**



**Figura 6.8 Error de inclinación del eje de colimación**

### 6.5.2. Nivelación Geométrica Simple desde el Medio

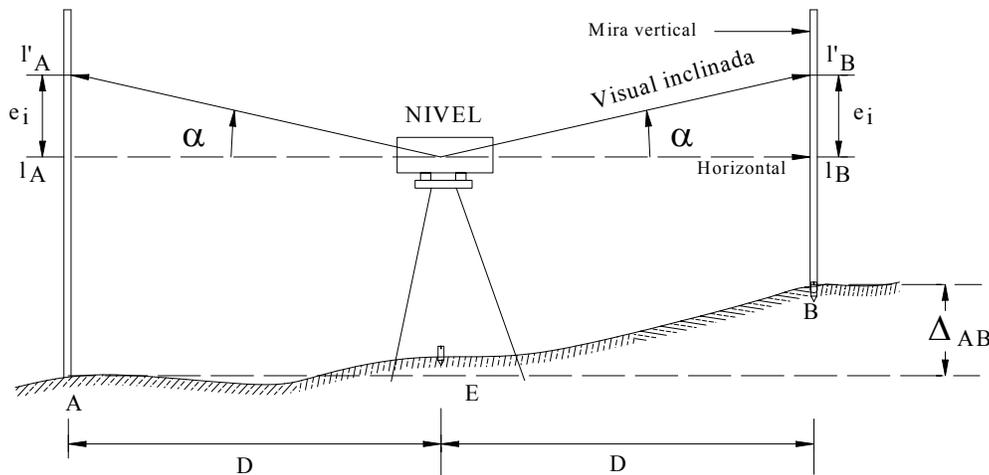
Supongamos ahora el caso de la nivelación geométrica simple desde el medio, representado en la figura 6.6.a.

En este tipo de nivelación se estaciona y se centra el nivel en un punto intermedio, equidistante de los puntos A y B, no necesariamente dentro de la misma alineación, y se toman lecturas a las miras colocadas en A y B. Luego el desnivel entre A y B será:

$$\Delta_{AB} = l_A - l_B \quad (6.12)$$

Nótese que en este procedimiento no es necesario estacionar el nivel en un punto predefinido, ni medir la altura de la estación ( $h_i$ ), lo que además de agilizar el proceso, elimina la imprecisión en la determinación de ( $h_i$ ).

Para analizar el efecto del error de inclinación del eje de colimación en la nivelación geométrica desde el medio, nos apoyaremos en la figura 6.9.



**Figura 6.9 Determinación del error de inclinación del eje de colimación**

Estacionando el nivel en un punto E equidistante entre A y B, y colocando miras verticales en ambos puntos, tomamos lecturas a las miras. De existir error de inclinación, el eje de colimación estaría inclinado un ángulo  $\alpha$  con respecto a la horizontal, por lo que las lecturas a la mira serían  $l'_A$  y  $l'_B$ , generando el error de lectura  $e_i$ , igual para ambas miras por ser distancias equidistantes a la estación.

De la figura 6.9 tenemos que:

$$\Delta_{AB} = l_A - l_B \quad (6.12)$$

en donde,

$$l_A = l'_A - e_i \quad (A)$$

$$l_B = l'_B - e_i \quad (\text{B})$$

Reemplazando A y B en 6.12

$$\begin{aligned} \Delta_{AB} &= (l'_A - e_i) - (l'_B - e_i) \\ \Delta_{AB} &= l'_A - l'_B \end{aligned} \quad (6.13)$$

La ecuación 6.13 nos indica que en la nivelación geométrica desde el medio, el error de inclinación no afecta la determinación del desnivel, siempre que se estacione el nivel en un punto equidistante a las miras, no necesariamente en la misma alineación.

Las ventajas presentadas por el método de nivelación geométrica desde el medio, hacen de este el método recomendado en los procesos de nivelación.

### 6.5.3. Nivelación Geométrica Compuesta desde el Medio

La nivelación geométrica compuesta desde el medio (figura 6.7.a), consiste en la aplicación sucesiva de la nivelación geométrica simple desde el medio.

En la figura 6.7.a, los puntos 1 y 2 representan los puntos de cambio (PC) o punto de transferencia de cota. El punto A es una **Base de Medición** (BM) o punto de cota conocida.  $E_1$ ,  $E_2$  y  $E_3$  representan puntos de estación ubicados en puntos equidistantes a las miras y los valores de  $l$  representan las lecturas a la mira.

El desnivel entre A y B vendrá dado por la suma de los desniveles parciales

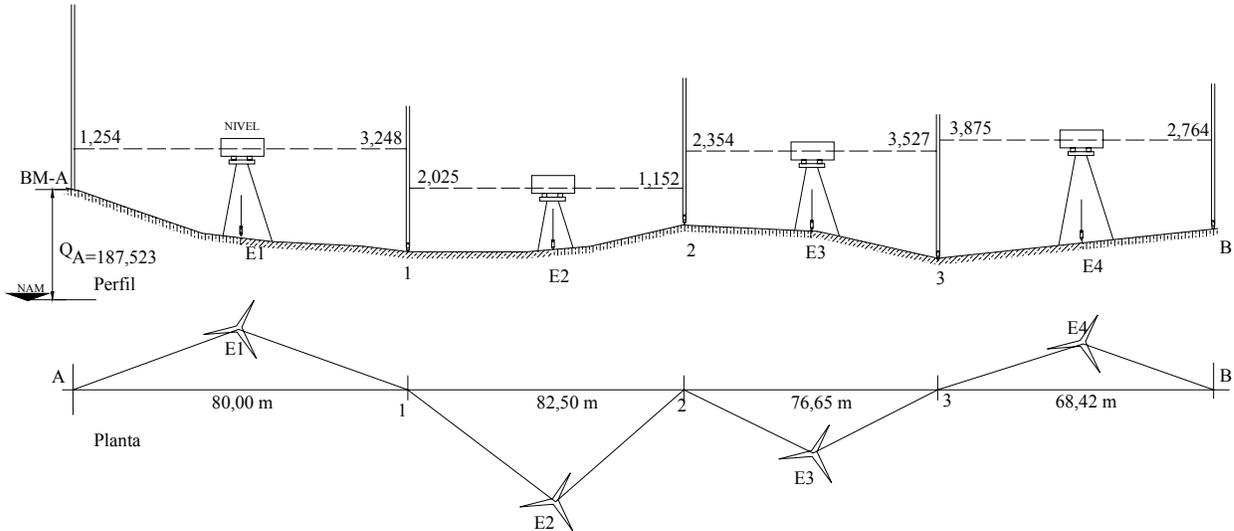
$$\begin{aligned} \Delta_{A1} &= l_A - l_1 \\ \Delta_{12} &= l'_1 - l_2 \\ \Delta_{2B} &= l'_2 - l_B \\ \Delta_{AB} &= \Delta_{A1} + \Delta_{12} + \Delta_{2B} = (l_A + l'_1 + l'_2) - (l_1 + l_2 + l_B) \end{aligned}$$

Si a  $l_A$ ,  $l'_1$  y  $l'_2$  le llamamos lecturas atrás ( $l_{AT}$ ) y a  $l_1$ ,  $l_2$  y  $l_B$  lecturas adelante ( $l_{AD}$ ), tenemos que:

$$\Delta_{AB} = \Sigma l_{AT} - \Sigma l_{AD} \quad (6.14)$$

**Ejemplo 6.7**

Calcule las cotas de los puntos de la nivelación representada en la figura E6-7.



**Figura E6.7**

**Solución**

En la figura E6-7 se han representado esquemáticamente el perfil y la planta de la nivelación a fin de recalcar que no es necesario que las estaciones estén dentro de la alineación, ya que lo importante es que estén equidistantes a los puntos de mira, a fin de eliminar el error de inclinación del eje de colimación.

El la tabla TE 6.7 se resume el proceso de cálculo de la nivelación propuesta.

**Tabla TE.6.7**

1	2	3	4	5	6
Est.	PV	$L_{AT}$	$L_{AD}$	$\Delta p$	Cotas
E1	A	1,254			<b>187,523</b>
	1		3,248	-1,994	185,529
E2	1	2,025			185,529
	2		1,152	+0,873	186,402
E3	2	2,354			186,402
	3		3,527	-1,173	185,229
E4	3	3,875			185,229
	B		2,764	+1,111	186,340
	$\Sigma$	9,508	10,691	-1,183	
	Dif.		-1,183		

Control

En la tabla TE6.7, la columna 1 identifica los puntos de estación, la columna 2 los puntos de ubicación de la mira, las columnas 3 y 4 las lecturas atrás y adelante en los puntos de cambio; en la columna 5 se han calculado los desniveles parciales  $\Delta p = L_{AT} - L_{AD}$  y en la columna 6 se calculan las cotas de los puntos restantes a partir de la cota del punto conocido (A) y los desniveles parciales.

Como control, la suma de las lecturas atrás (columna 3) menos la suma de las lecturas adelante (columna 4) debe ser igual a la suma de los desniveles parciales (columna 5).

## 6.6. Nivelación de Perfiles

En ingeniería es común hacer nivelaciones de alineaciones para proyectos de carreteras, canales, acueductos, etc. Estas nivelaciones reciben el nombre de nivelación de perfiles longitudinales y se toman a lo largo del eje del proyecto.

En el caso de nivelaciones para proyectos viales, la nivelación se hace a lo largo del eje de proyecto con puntos de mira a cada 20 o 40 m, dependiendo del tipo de terreno más en los puntos de quiebre brusco del terreno.

Los puntos de cambio y las estaciones deben ubicarse de manera de abarcar la mayor cantidad posible de puntos intermedios. Debe tenerse cuidado en la escogencia de los puntos de cambio ya que éstos son los puntos de enlace o de transferencia de cotas. Deben ser puntos firmes en el terreno, o sobre estacas de madera, vigas de puentes, etc.

Siendo los puntos de cambio puntos de transferencia de cotas, en ellos siempre será necesario tomar una lectura adelante desde una estación y una lectura atrás desde la estación siguiente.

En el ejemplo E6-8 demostramos el procedimiento de cálculo de una nivelación geométrica con puntos intermedios, por el método del horizonte.

### *Ejemplo 6.8*

Calcule las cotas de la nivelación representada en la figura E6-8.

#### *Solución*

El cálculo de las cotas por el método del horizonte consiste en calcular la cota de la línea de visual o eje de colimación en cada uno de los puntos de estación.

La cota de la línea de visual u horizonte para la estación E1 será la cota del punto A más la lectura a la mira en el punto A.

$$H = Q + l_m \quad (6.15)$$

$$H = Q_A + L_A = 887,752 + 0,528 = 888,280$$

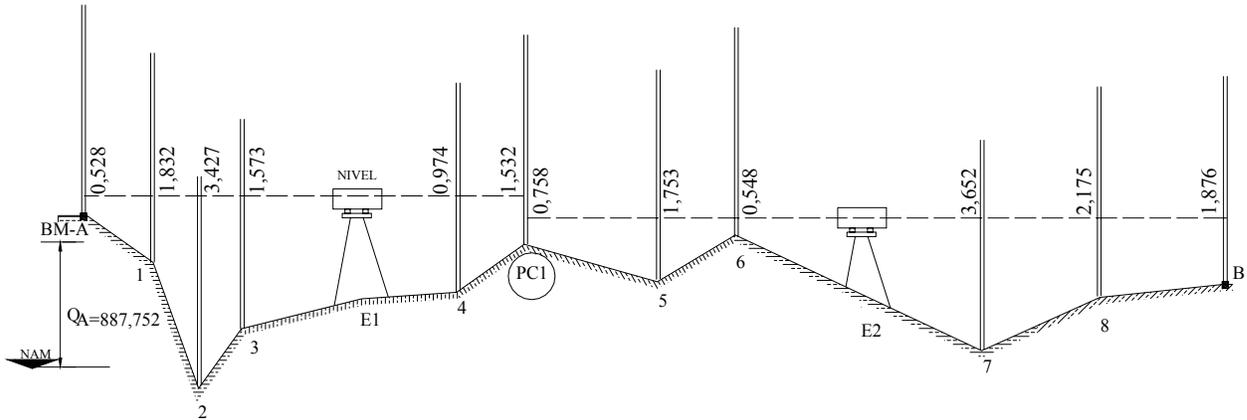


Figura E.6.8

Luego, la cota de los puntos intermedios se calcula restando a la cota del horizonte las lecturas a la mira.

$$Q = H - l_m \tag{6.16}$$

Al hacer cambio de estación es necesario calcular la nueva cota del horizonte sumando a la cota del punto de cambio la lectura a la mira en dicho punto de cambio.

En la tabla TE6.8 se resume el proceso de cálculo descrito

Tabla TE6.8

Est.	Pv	L <sub>AT</sub>	L <sub>INT</sub>	L <sub>AD</sub>	Horizonte	Cota
E1	A	0,528			888,280	<b>887,752</b>
	1		1,832			886,448
	2		3,427			884,853
	3		1,573			886,707
	4		0,974			887,306
	PC <sub>1</sub>			1,532		886,748
E2	PC <sub>1</sub>	0,758			887,506	886,748
	5		1,753			885,753
	6		0,548			886,958
	7		3,652			883,854
	8		2,175			885,331
	B			1,876		<b>885,630</b>
Σ		1,286		3,408		
Δ =		-2,122				

Control

$$\Delta_{AB} = \Sigma L_{AT} - \Sigma L_{AD}$$

$$\Delta_{AB} = 1,286 - 3,408 = -2,122$$

$$Q_B = Q_A + \Delta_{AB} = 887,752 - 2,122$$

$$Q_B = 885,630$$

## 6.7. Control de Nivelaciones

En los ejemplos resueltos hasta el momento, solamente hemos podido comprobar las operaciones aritméticas y no la magnitud de los errores sistemáticos y accidentales, inevitables en todo proceso topográfico.

Para poder determinar el error de cierre de una nivelación, es necesario realizar una nivelación cerrada (de ida y vuelta) o una nivelación de enlace con puntos de control (BM) al inicio y al final de la nivelación.

### 6.7.1. Error de Cierre

El error de cierre de una nivelación depende de la precisión de los instrumentos utilizados, del número de estaciones y de puntos de cambio y del cuidado puesto en las lecturas y colocación de la mira.

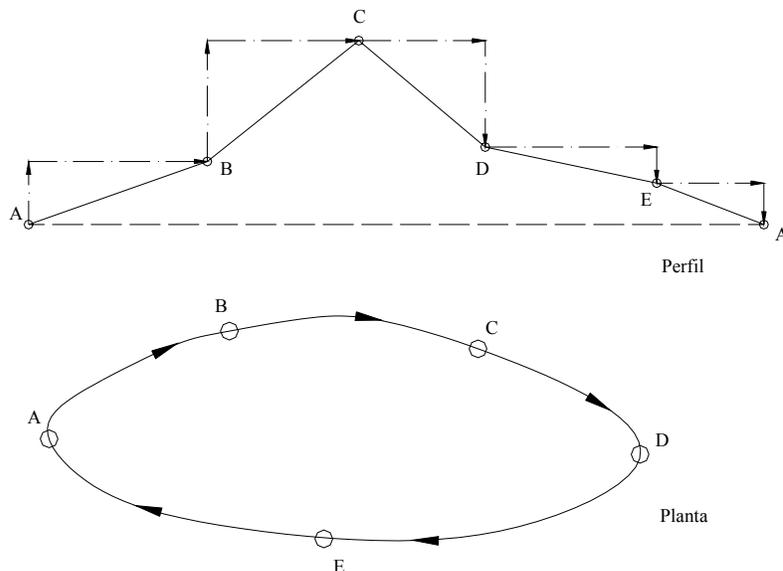
En una **nivelación cerrada**, en donde el punto de llegada es el mismo punto de partida, la cota del punto inicial debe ser igual a la cota del punto final, es decir: la suma de los desniveles debe ser igual a cero, tal y como se muestra en la figura 6.10.

La diferencia entre la cota final y la inicial nos proporciona el error de cierre de la nivelación

$$E_n = Q_f - Q_i \quad (6.17)$$

El error de cierre también puede ser calculado por medio del desnivel total como:

$$E_n = \sum L_{AT} - \sum L_{AD} \quad (6.18)$$



**Figura 6.10. Nivelación Cerrada**

La nivelación cerrada se puede realizar levantando los mismos puntos de ida y vuelta, o, preferiblemente, por caminos distintos, retornando siempre al punto inicial.

En una **nivelación de enlace** los puntos extremos forman parte de una red de nivelación de precisión, por lo que la cota o elevación de sus puntos son conocidas.

En este tipo de nivelación, representada en la figura 6.11, la diferencia entre el desnivel medido y el desnivel real nos proporciona el error de cierre.

El desnivel medido se calcula por la ecuación (6.14)

$$\Delta_{AB} = \Sigma L_{AT} - \Sigma L_{AD}$$

y el desnivel real reemplazando los valores de las cotas conocidas en la ecuación (6.1)  
Luego el error de cierre será

$$E_n = (\Sigma L_{AT} - \Sigma L_{AD}) - (Q_B - Q_A) \quad (6.19)$$

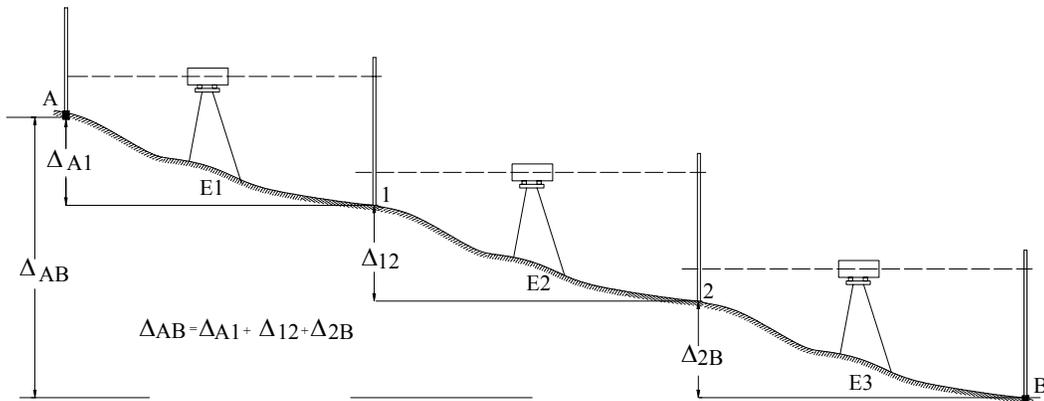


Figura 6.11 Nivelación de enlace

### 6.7.2. Tolerancia del Error de Cierre

La tolerancia del error de cierre depende de la importancia del trabajo, de la precisión de los instrumentos a utilizar y de las normativas existentes.

Las nivelaciones se pueden clasificar en nivelaciones de primer, segundo y tercer orden, siendo las de tercer orden las de uso común en los trabajos de ingeniería.

La tolerancia de cierre generalmente se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$T_n = m\sqrt{K} \quad (6.20)$$

en donde:

$T_n$  = Tolerancia para el error de cierre en mm

$m$  = Valor dependiente de los instrumentos, método y tipo de nivelación requerida

$K$  = Longitud total de la nivelación en Km

Para nivelaciones de tercer orden se recomienda un valor de  $m$  entre 12 y 15 mm.

### 6.7.3. Compensación de Nivelaciones

Si al comparar el error de cierre con la tolerancia resulta que este es mayor que la tolerancia, se hace necesario repetir la nivelación. En caso de verificarse que el error es menor que la tolerancia se procede a la compensación de la misma siguiendo uno de los métodos de compensación que se describen a continuación:

#### 6.7.3.1. Compensación proporcional a la distancia nivelada

Observando la ecuación (6.20) vemos que la tolerancia está en función de la distancia nivelada, razón por la cual uno de los métodos de ajuste de nivelaciones distribuye el error en forma proporcional a las distancias. El procedimiento de cálculo de compensación de nivelaciones por el método proporcional se explica en detalle en el ejemplo E6-9.

#### Ejemplo 6.9

Calcule las cotas compensadas de la nivelación cerrada mostrada en la figura E6-9.

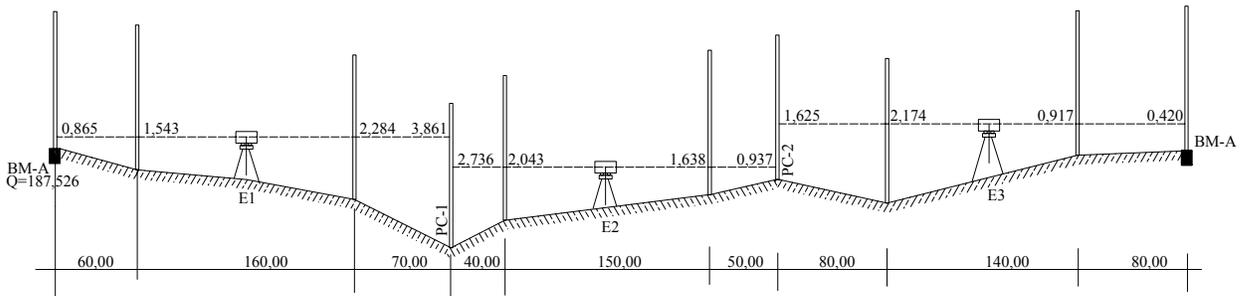


Figura E6-9

#### Solución

Por tratarse de una nivelación cerrada, el error de nivelación  $E_n = \Sigma L_{AT} - \Sigma L_{AD}$

En nuestro ejemplo (ver tabla TE6.9.1):

$$E_n = 5,226 - 5,218 = 0,008 \text{ m} = 8 \text{ mm}$$

$$T_n = 15\sqrt{0,830} = 10,9\text{mm}$$

Siendo  $T_n > E_n$  procedemos a compensar el error proporcionalmente a la distancia nivelada sobre los puntos de cambio. Nótese que en este método de compensación proporcional a la distancia nivelada, el punto A debe ser considerado punto de cambio.

$$C_1 = -\frac{290}{830} \times 0,008 = -0,003$$

$$C_2 = -\frac{530}{830} \times 0,008 = -0,005$$

$$C_3 = -\frac{830}{830} \times 0,008 = -0,008$$

La tabla TE6.9. resume el proceso del cálculo de compensación de las cotas de la nivelación.

*Tabla TE6.9.*

Est.	PV	Dist. P	Dist. Ac	L <sub>AT</sub>	L <sub>INT</sub>	L <sub>AD</sub>	Horiz	Cotas Calculadas	Comp	Cotas comp.
E1	A	--	0,00	0,865	1,543		188,391	<b>187,526</b>	--	<b>187,526</b>
	1	60,00	60,00					186,848	--	186,848
	2	160,00	120,00					186,107	--	186,107
	PC <sub>1</sub>	70,00	290,00					184,530	-0,003	184,527
E2	PC <sub>1</sub>	--	--	2,736	2,043		187,266	184,530	-0,003	184,527
	3	40,00	330,00					185,223	-0,003	185,220
	4	150,00	480,00					185,628	-0,003	185,625
	PC <sub>2</sub>	50,00	530,00					186,329	-0,005	186,324
E3	PC <sub>2</sub>	--	--	1,625	2,174		187,954	186,329	-0,005	186,324
	5	80,00	610,00					185,780	-0,005	185,775
	6	140,00	750,00					187,037	-0,005	187,032
	A	80,00	830,00					187,534	-0,008	<b>187,526</b>
				Σ	5,226	5,218		<b>187,526</b>		
				Dif.		+ 0,008	Dif.	+ 0,008		

En este procedimiento se asume que los errores se cometen en las lecturas adelante o puntos de cambio, afectando la cota del horizonte de las estaciones, por lo que las correcciones a los puntos intermedios se mantienen constantes hasta el siguiente punto de cambio.

### 6.7.3.2. Compensación sobre los puntos de cambio

Este método, más sencillo que el anterior, supone que el error se comete sobre los puntos de cambio y que es independiente de la distancia nivelada, por lo que la corrección será:

$$C = -\frac{E_n}{N} \quad (6.21)$$

Siendo N el número de puntos de cambio

**Ejemplo 6.10**

Resolver el ejemplo E6-9 por el método de los puntos de cambio.

*Solución*

El error y la tolerancia son los mismos del ejemplo anterior. La corrección se calcula según la ecuación 6.21.

$$C = -\frac{0,008}{2} = -0,004 \text{ m por punto de cambio}$$

En la tabla TE6.10 se resume el proceso de cálculo de compensación de las cotas de la nivelación.

**Tabla TE6.10**

Est.	PV	Dist. P	Dist. Ac	L <sub>AT</sub>	L <sub>INT</sub>	L <sub>AD</sub>	Comp.	horiz.	Cotas comp.
E1	A	--	0,00	0,865	1,543			188,391	<b>187,526</b>
	1	60,00	60,00						186,848
	2	160,00	120,00						186,107
	PC <sub>1</sub>	70,00	290,00						184,526
E2	PC <sub>1</sub>	--	--	2,736	2,043			187,262	184,526
	3	40,00	330,00						185,219
	4	150,00	480,00						185,624
	PC <sub>2</sub>	50,00	530,00						186,321
E3	PC <sub>2</sub>	--	--	1,625	2,174			187,946	186,321
	5	80,00	610,00						185,772
	6	140,00	750,00						187,029
	A	80,00	830,00						187,526
Σ				5,226		5,218	-0,008		
				Dif.	+ 0,008				

**Ejemplo 6.11**

La tabla TE6.11.1 corresponde a la libreta de campo de una nivelación de enlace entre dos puntos de cota conocida. Calcule el error de cierre y las cotas compensadas de los puntos intermedios de la nivelación por cada uno de los métodos descritos.

*Solución*

Como es lo usual y recomendable, resolveremos el problema directamente sobre la libreta de campo.

Tabla E6.11

Datos de campo							Método proporcional				Método de los puntos de cambio		
Est	PV	Dist. P.	Dist. Ac.	L <sub>AT</sub>	L <sub>INT</sub>	L <sub>AD</sub>	Horiz	Cotas Calc.	Corr.	Cotas comp.	Corr.	Horiz.	Cotas
E1	A	0,00	0,00	2,125			285,837	<b>283,712</b>		<b>283,712</b>		285,837	<b>283,712</b>
	1	120,00	120,00			1,476		284,361	-0,002	284,359	-0,004		284,357
E2	1			0,520			284,881	284,361	-0,002	284,359		284,877	284,357
	2	60,00	180,00		1,563			283,318	-0,002	283,316			283,314
	3	42,00	222,00		2,042			282,839	-0,002	282,837			282,835
	4	65,00	287,00			2,953		281,928	-0,004	281,924	-0,004		281,920
E3	4	--	--	3,162			285,090	281,928	-0,004	281,924		285,082	281,920
	5	80,00	367,00		2,850			282,240	-0,004	282,236			282,232
	6	95,00	462,00		1,644			283,446	-0,004	283,442			283,438
	7	98,00	560,00			0,761		284,329	-0,007	284,322	-0,004		284,317
E4	7	--	--	1,746			286,075	284,329	-0,007	284,322		286,063	284,317
	8	100,00	660,00		0,879			285,196	-0,007	285,189			285,184
	9	120,00	780,00		1,463			284,612	-0,007	284,605			284,600
	B	120,00	900,00			2,432		283,643	-0,012	<b>283,631</b>			<b>283,631</b>
				Σ	7,553		Q <sub>B</sub>	<b>283,631</b>		Σ	-0,012		
				Dif.		-0,069	Dif.		+0,012				

$$E_n = (\Sigma L_{AT} - \Sigma L_{AD}) - (Q_B - Q_A)$$

$$\Sigma L_{AT} - \Sigma L_{AD} = -0,069$$

$$\Delta_{AB} = 283,631 - 283,712 = -0,081$$

$$E_n = -0,069 - (-0,081) = +0,012$$

$$T_n = 15\sqrt{0,900} = 14,23mm$$

$$E_n < T_n$$

$$C_1 = -\frac{120}{900}x(0,012) = -0,002$$

$$C_3 = -\frac{560}{900}x(0,012) = -0,007$$

$$C_2 = -\frac{287}{900}x(0,012) = -0,004$$

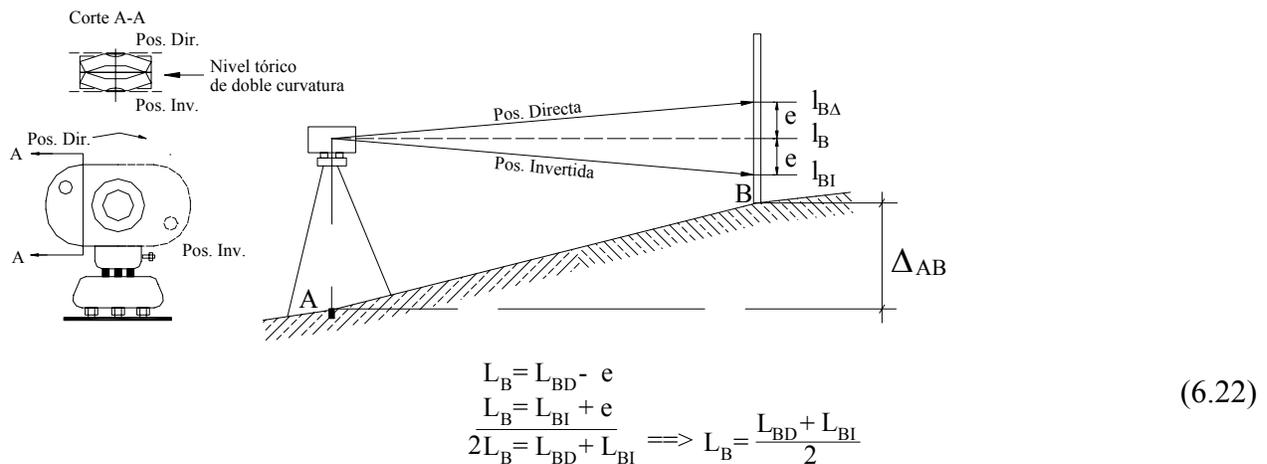
$$C_4 = -\frac{900}{900}x(0,012) = -0,012$$

$$C = -\frac{E_n}{N} = -\frac{0,012}{3} = -0,004$$

## 6.8. Cálculo y Ajuste del Error de Inclinación

En nivelaciones compuestas, con puntos intermedios, no es posible establecer la equidistancia a todos los puntos de mira, por lo que en caso de una eventual inclinación del eje de colimación, la mayoría de las lecturas a la mira quedarían afectadas de error.

A pesar de que algunos niveles vienen equipados con nivel tórico de doble curvatura, siendo posible efectuar lecturas a la mira en dos posiciones conjugadas, anulando el error de lectura de inclinación del eje de colimación, como se demuestra en la figura 6.12, este procedimiento se hace impráctico, ya que duplica el número de lecturas necesarias.



**Figura 6.12 Nivelación con nivel tórico de doble curvatura**

La ecuación 6.22 nos indica que el promedio de las lecturas a la mira efectuadas con nivel tórico de doble curvatura en las dos posiciones del nivel elimina el error por inclinación del eje de colimación proporcionando la lectura correcta a la mira.

Lo dicho anteriormente nos indica la conveniencia de establecer algún método para determinar y ajustar el error por inclinación.

De los diferentes métodos propuestos, se considera al **método de la doble distancia con nivelación desde el medio** el método más práctico y preciso, por lo que será el método cuyo proceso describiremos a continuación con el auxilio de la figura 6.13

- Establecemos un alineamiento ABC, de manera que la distancia  $AB = BC = D$  (figura 6.13).
- Estacionando el nivel en un punto medio entre BC ( $D/2$ ), determinamos el desnivel exacto entre BC por nivelación desde el medio.
- Estacionando el nivel en A tomamos lecturas a miras colocadas en B y C.

- d. Si el nivel está afectado por inclinación del eje de colimación, digamos un ángulo  $\alpha$  con respecto a la horizontal (figura 6.13.b), las lecturas a la mira estarán afectadas por el error de inclinación como se muestra en la figura 6.13.b, siendo:

$$\begin{aligned}L_B &= L'_B - e \\L_C &= L'_C - 2e\end{aligned}$$

- e. Con las lecturas obtenidas y aplicando la ecuación 6.12 determinamos el  $\Delta_{BC}$

$$\Delta_{BC} = L_B - L_C = (L'_B - e) - (L'_C - 2e)$$

Simplificando y despejando e nos queda:

$$e = \Delta_{BC} - (L'_B - L'_C) \quad (6.23)$$

- f. Con el valor de e se calcula la lectura correcta  $L_B = L'_B - e$  y actuando sobre el tornillo basculante del nivel (figura 2.29.a) imponemos la lectura corregida.
- g. Como en el paso anterior la burbuja queda descorregida, calamos nuevamente la burbuja con el tornillo de corrección [C] (figura 2.26).

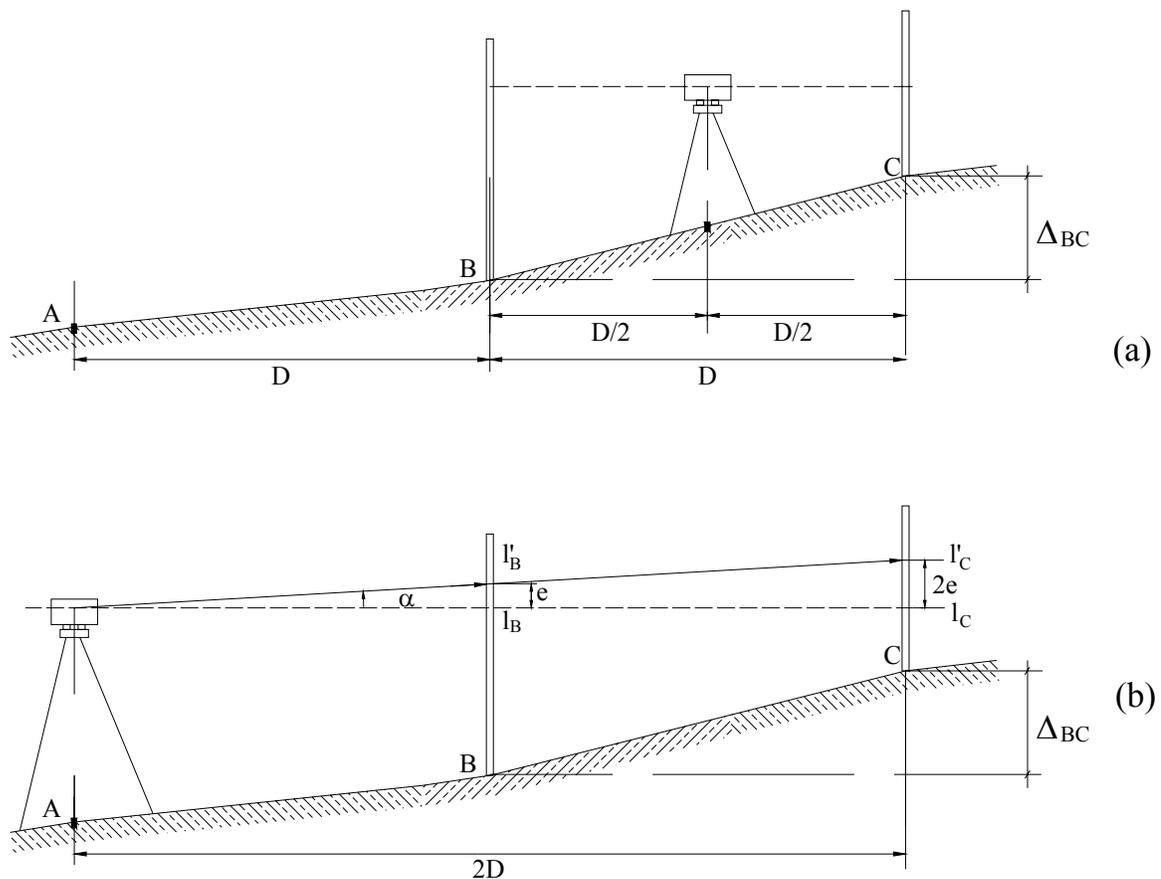


Figura 6.13 Cálculo del error por inclinación

### Problemas Propuestos

- 6.1. Con los datos de la figura P6-1 calcule el desnivel entre los puntos A y B y la cota del punto B.

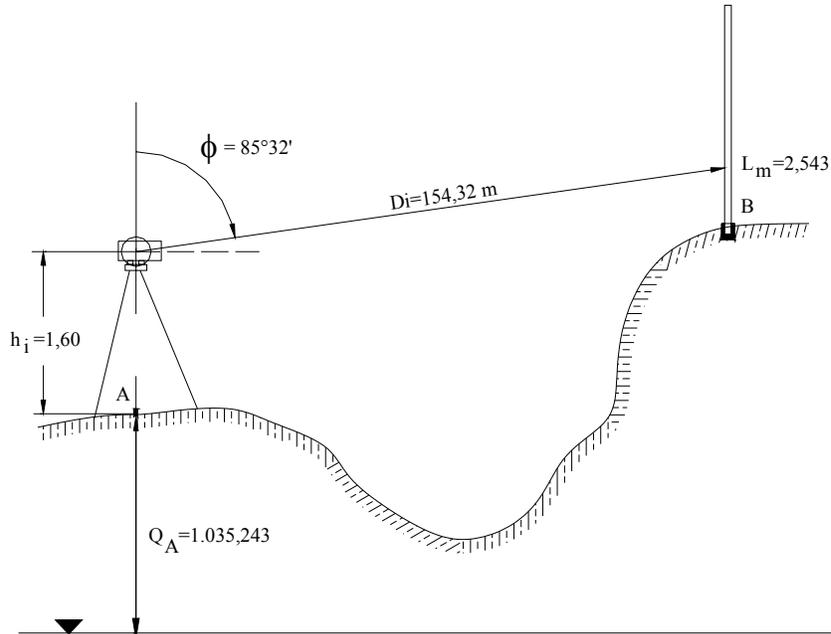


Figura P6-1

- 6.2. En el proceso de nivelación de los vértices de una triangulación se requiere calcular el desnivel entre dos puntos separados una distancia de 1.230,436 m, por lo que se hace necesario calcular el error por curvatura y refracción ( $e_{cr}$ ).  
Con los datos de la figura P6-2 calcule la cota del punto B libre del  $e_{cr}$ .

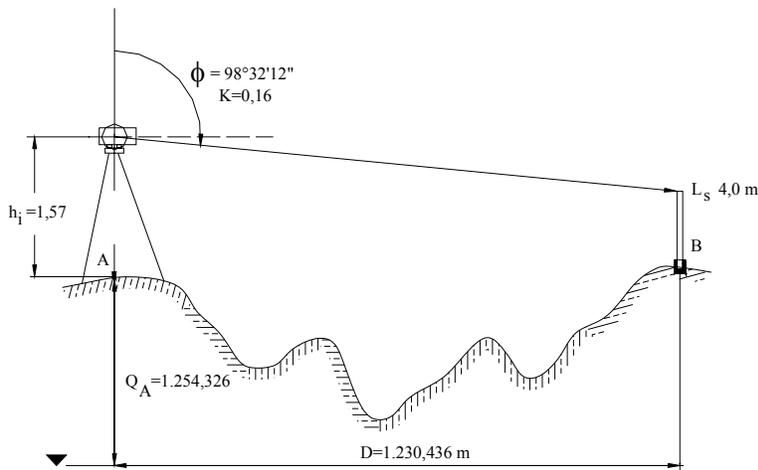


Figura P6-2

6.3. Calcule el desnivel y la distancia entre los puntos A y B mostrados en la figura P6-3.

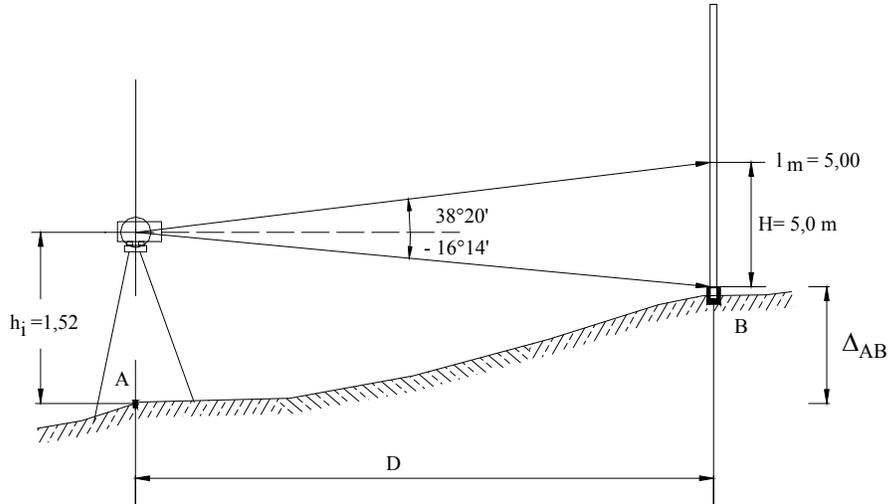


Figura P6-3

6.4. Los datos de la tabla anexa corresponden a una nivelación por taquimetría realizada con un teodolito que mide ángulos cenitales. Si la cota del punto de estación es 1.570,431 y la altura del instrumento es 1,545, calcule las cotas de los puntos visados.

Est.	PV	$\angle H$	$\angle V$	$L_s$	$L_m$	$L_i$	Obs
A $h = 1,545$ $Q = 1.570,431$	1		$87^{\circ}06'$	1,565		0,523	
	2		$91^{\circ}02'$	2,496		1,875	
	3		$95^{\circ}16'$	3,256		2,431	
	4		$79^{\circ}21'$	2,341		1,582	
	B		$86^{\circ}45'$	2,676		1,876	
B $h = 1,600$	A		$93^{\circ}15'$	1,243		0,443	
	5		$91^{\circ}42'$	1,635		1,000	
	6		$82^{\circ}16'$	2,042		1,000	
	7		$89^{\circ}54'$	3,581		2,000	



- 6.7. Calcule el error de cierre  $E_n$  y las cotas compensadas de la nivelación de la tabla anexa. Utilice los métodos de compensación estudiados.

Est.	PV	Dist. P.	Dist. Ac.	$L_{AT}$	$L_{INT}$	$L_{AD}$	Horiz	Cotas
	BM-1		0,00	2,851				<b>175,321</b>
E1	2	20,00			2,435			
	3	40,00				2,104		
E2	3			0,852				
	4	40,00			1,053			
	5	65,00			1,425			
	6	55,00				1,573		
E3	6			1,943				
	7	80,00			1,510			
	8	80,00				1,073		
E4	8			2,124				
	9	60,00			1,872			
	10	60,00			1,541			
	BM-2	80,00				1,270		<b>177,079</b>

- 6.8. En la nivelación de un perfil que pasa por debajo de una estructura existente, se localizó un punto de referencia en el borde inferior de una viga, tal y como se muestra en la figura P6-8. Calcule las cotas de los puntos 1, 2 3.

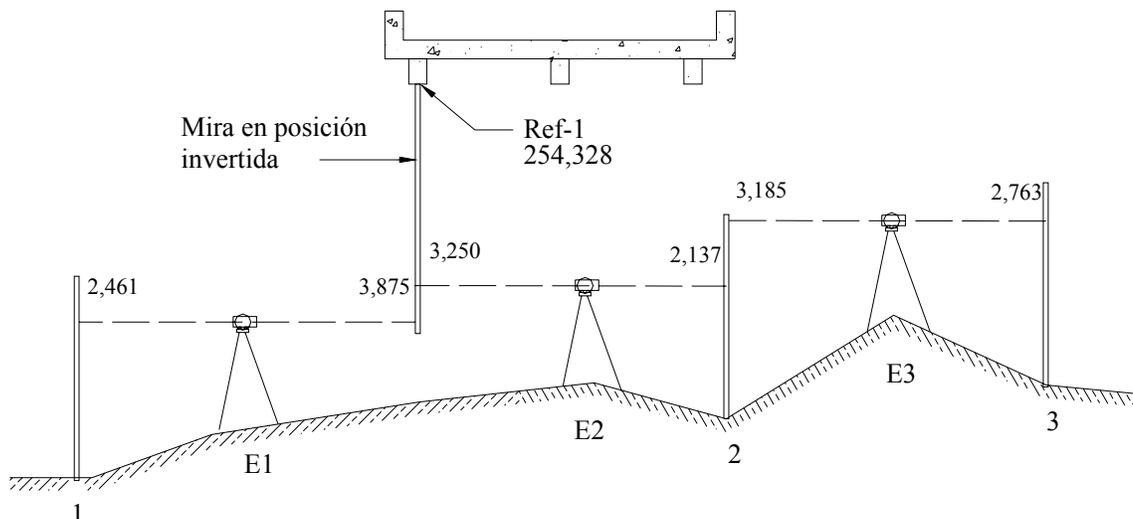


Figura P6-8

