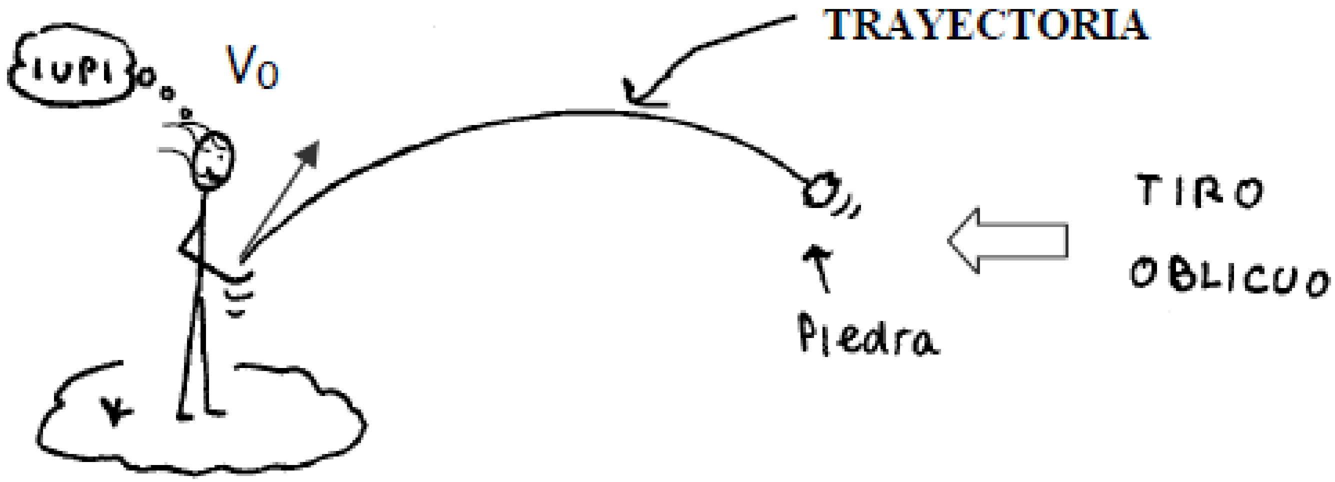
Facultad de Ingeniería
OBERA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES

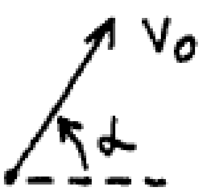
FÍSICA MECÁNICA

UNIDAD 5

Movimiento en el plano: Tiro Oblícuo
(Movimiento de Proyectiles)



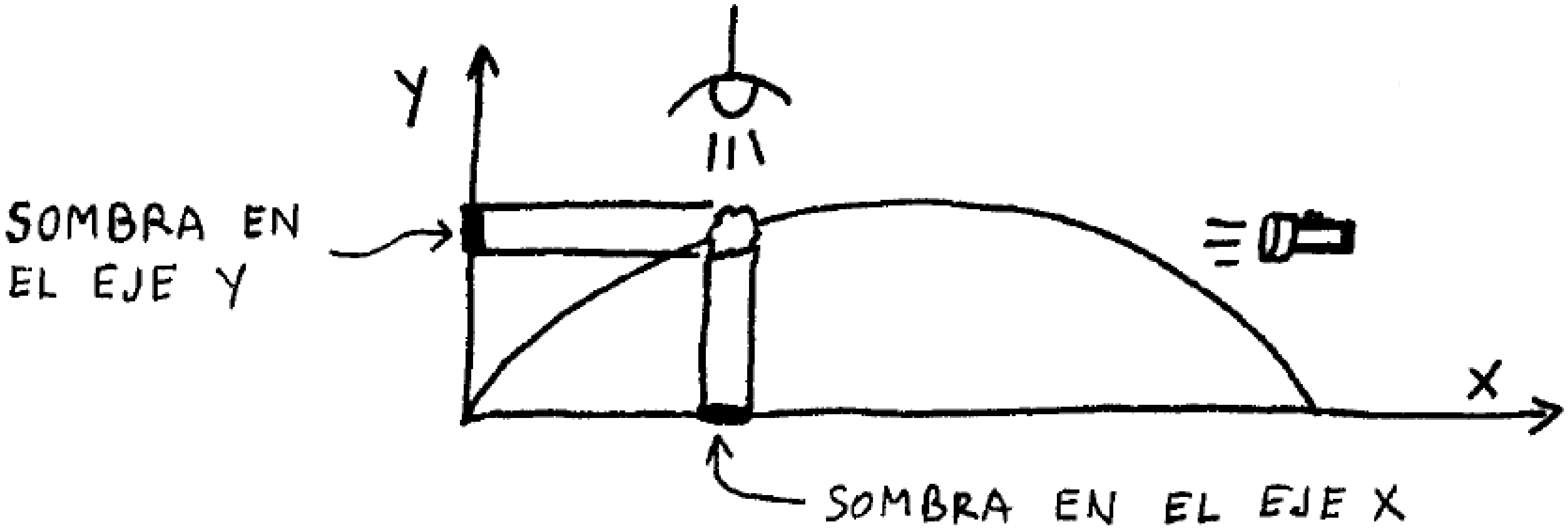
el vector velocidad inicial iba así ↑ y ahora va inclinado así ↗



EL VECTOR V_0 AHORA ESTA INCLINADO.

Funciones trigonométricas

Principio de independencia de los movimientos

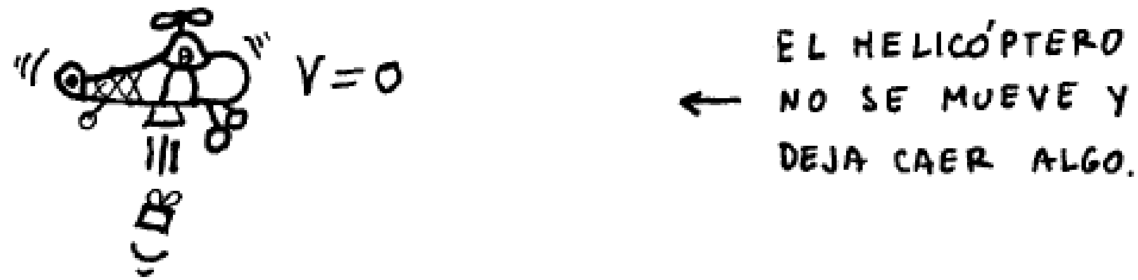


CADA MOVIMIENTO ACTÚA SIN ENTERARSE DE LO QUE ESTÁ HACIENDO EL OTRO MOVIMIENTO

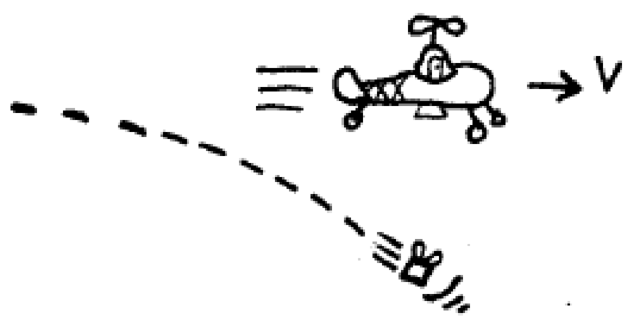
Cada movimiento es independiente del otro

Ejemplo de la independencia de los movimientos

Imaginate un helicóptero que está quieto a una determinada altura y deja caer una cosa. Supongamos que la cosa tarda 20 segundos en caer (por ejemplo).



Supongamos ahora que el tipo empieza a avanzar en forma horizontal moviéndose a 50 km por hora en dirección equis. Te pregunto...
¿ Qué pasa si ahora deja caer el objeto ? ¿ Va a tardar más o menos en tocar el piso ?

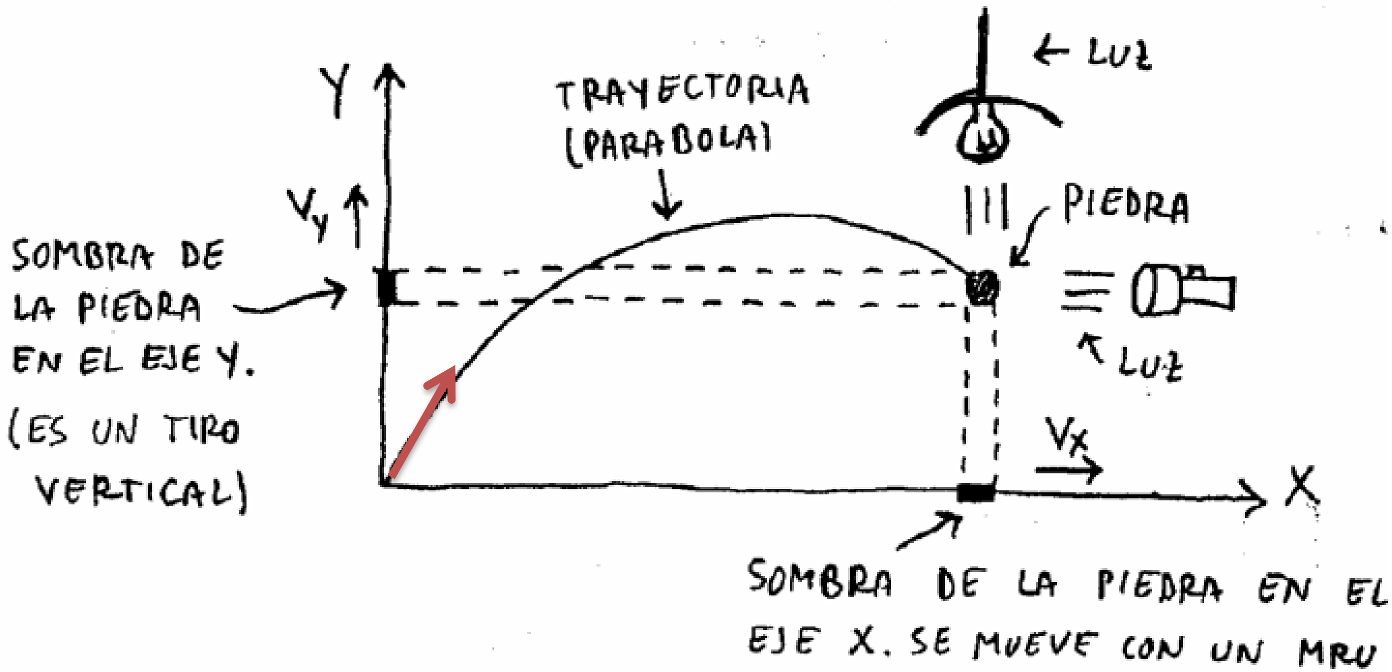


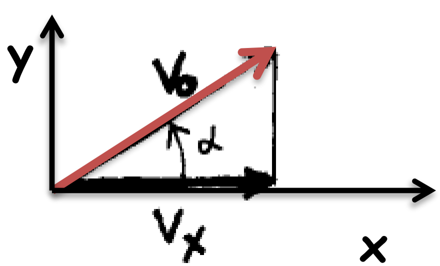
¡¡¡Va a tardar lo mismo!!!

¿Por qué pasa esto?

- El tiempo de caída es el mismo para ambos ejes

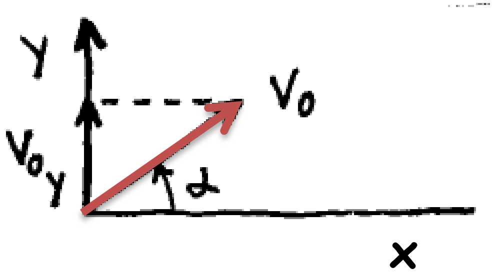
- Lo que pasa en el eje y (Caída libre: **MRUV**) no le importa al eje x (**MRU**)





LA PROYECCIÓN DE LA VELOCIDAD INICIAL SOBRE EL EJE HORIZONTAL ES V_x

$$V_x = V_0 \cdot \cos \alpha \, .$$



LA PROYECCIÓN DE V_0 EN $\underline{Y}$ DA V_{0y}.

$$V_{0y} = V_0 \cdot \text{sen}\, \alpha$$

CARACTERISTICAS

Todos los vectores posición tienen dos componentes medidas en unidades de longitud.

Los vectores velocidad SIEMPRE son tangentes a la trayectoria medidas en unidades de velocidad

El movimiento parabólico se genera con la superposición de dos movimientos simultáneos

Componente horizontal ⇨ **MRU**

Componente vertical ⇨ **MRUV** (con aceleración $g=9{,}8 m/s^2$)

Vector posición

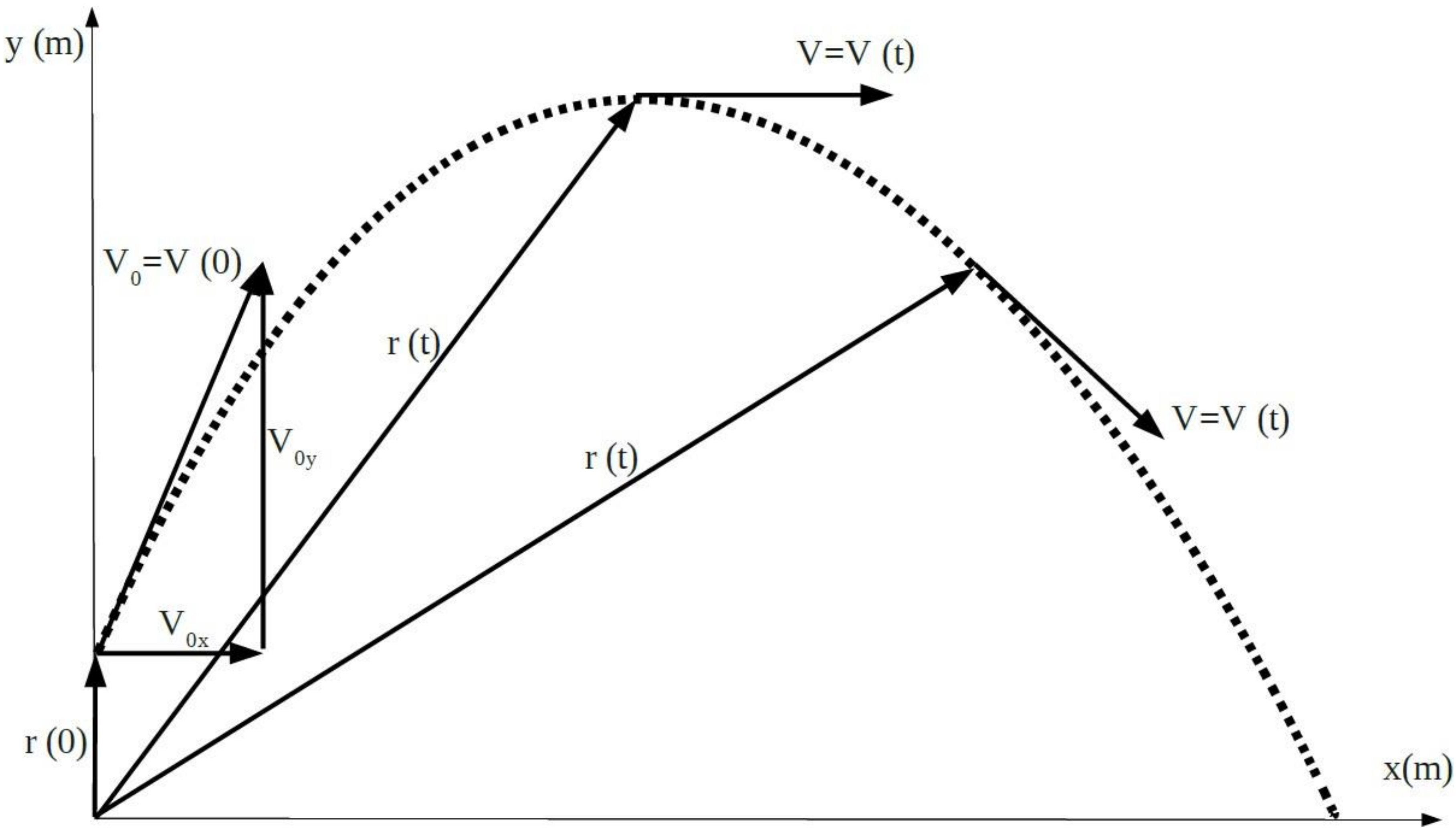
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + v_{0x}.t \\ y_0 + v_{0y}.t - \frac{1}{2}.g.t^2 \end{pmatrix}$$

Considerando
$t_0=0$

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + v_{0x}.\Delta t \\ y_0 + v_{0y}.\Delta t - \frac{1}{2}.g.(\Delta t)^2 \end{pmatrix}$$

Considerando
$t_0 \neq 0$

Representamos gráficamente



Vector velocidad

Se define cómo:

$$\vec{V}(t)=\begin{pmatrix} V_x(t) \\ V_y(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} V_{0x} \\ V_{0y}-g.t \end{pmatrix}$$

Movimiento horizontal MRU

Movimiento vertical MRUV

En el instante t=0 el vector velocidad será

$$\vec{v}(0)=\begin{pmatrix} v_{0x} \\ y_{0y} \end{pmatrix}$$

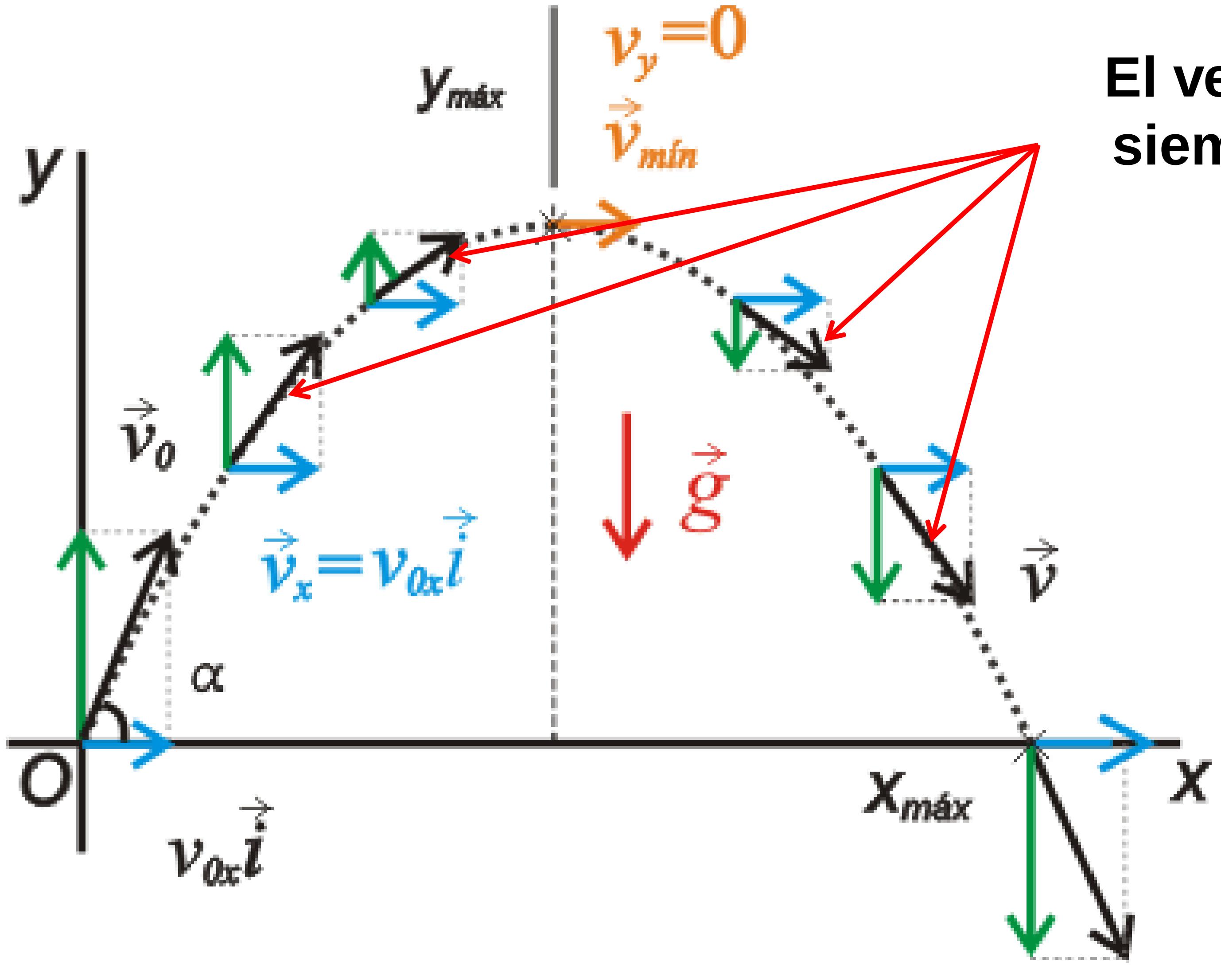
La rapidez instantánea será:

$$|\vec{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$$

La orientación respecto al eje horizontal será:

$$tg\,\alpha=\frac{v_y}{v_x} \rightarrow \alpha=arctg\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$$

Vector velocidad



El vector velocidad es siempre tangente a la trayectoria

Análisis del gráfico

$$V_{0x} = |\vec{V}_0| . \cos\alpha$$

Para las velocidades iniciales:

$$V_{0y} = |\vec{V}_0| . sen\,\alpha$$

A medida que el proyectil asciende la velocidad en ***y*** disminuye hasta anularse y comenzar a crecer de nuevo

Vector aceleración

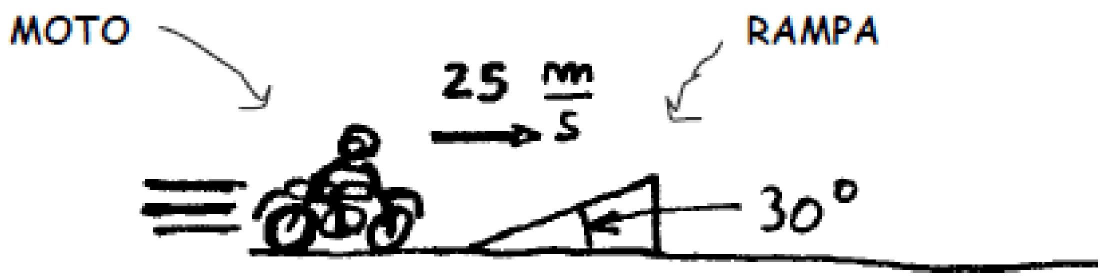
$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Ejemplos

Un tipo que viene en moto a 90 por hora (25 m/s) sube una rampa inclinada 30°. Suponiendo que la rampa es muy corta y no influye en disminuir su velocidad, Calcular:

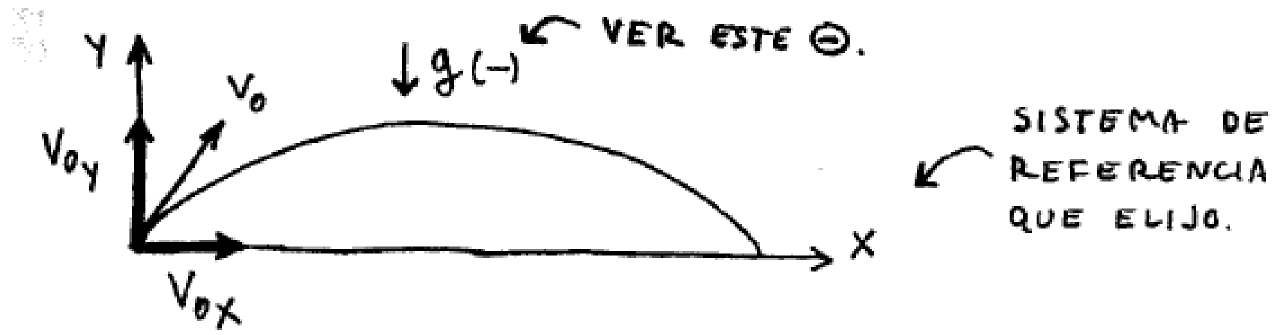
a) - A qué altura máxima llega.
b) - Cuánto tiempo está en el aire.
c) - A qué distancia de la rampa cae.

He aquí un típico problema de tiro oblicuo. Hagamos un dibujito aclarador :

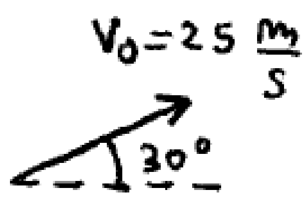


Para resolverlo sigo los pasos para resolver los problemas de Tiro Oblicuo:

1 - Elijo el sistema de referencia. Marco en el dibujo todas las velocidades, la aceleración de la gravedad y todo eso.



A la velocidad V_0 la descompongo en las componentes horizontal y vertical.



⇦ Descompongo la Vo en Vo_x Y en Vo_y.

Me queda :

$$V_{0x} = V_0 \times \cos\ \alpha = 25\ \frac{m}{s} \times \cos 30° = 21{,}65\ \frac{m}{s}$$

$$V_{0y} = V_0 \times \operatorname{sen}\ \alpha = 25\ \frac{m}{s} \times \operatorname{sen} 30° = 12{,}5\ \frac{m}{s}$$

En el eje **X** la sombra de la moto tiene un MRU. La velocidad de este movimiento es constante y vale V_{0x} = 21,65 m/s. En el eje **y** la sombra de la moto se mueve haciendo un tiro vertical de V_{0y} = 12,5 m/s. Las ecuaciones horarias quedan así:

Eje x
$$\begin{cases} x = 0 + 21,65\,\dfrac{m}{s}\cdot t \\ v_x = v_{0x} = 21,65\,\dfrac{m}{s} \\ a_x = 0 \end{cases}$$
$\leftarrow$

Ecuaciones para el eje horizontal (MRU).

Para trabajar en el eje **y** voy a suponer g = 9,8 m/s^2. En el eje vertical las cosas quedan de esta manera:

Eje y
(MRUV)
$$\begin{cases} y = 0 + 12,5\,\dfrac{m}{s}\cdot t + \frac{1}{2}\left(-9,8\,\dfrac{m}{s^2}\right)\cdot t^2 \\ V_{fy} = 12,5\,\dfrac{m}{s} + \left(-9,8\,\dfrac{m}{s^2}\right)\cdot t \\ a_y = -9,8\,\dfrac{m}{s^2} = cte \end{cases}$$
$\Leftarrow$

ECUACIONES PARA EL EJE VERTICAL

Todos los tiros oblicuos se resuelven usando solamente las primeras 2 ecuaciones en **Y** y la 1ª ecuación en **X**. (Tres en total). Las otras 3 ecuaciones igual las puedo poner porque son importantes conceptualmente. Lo que quiero decir es que:

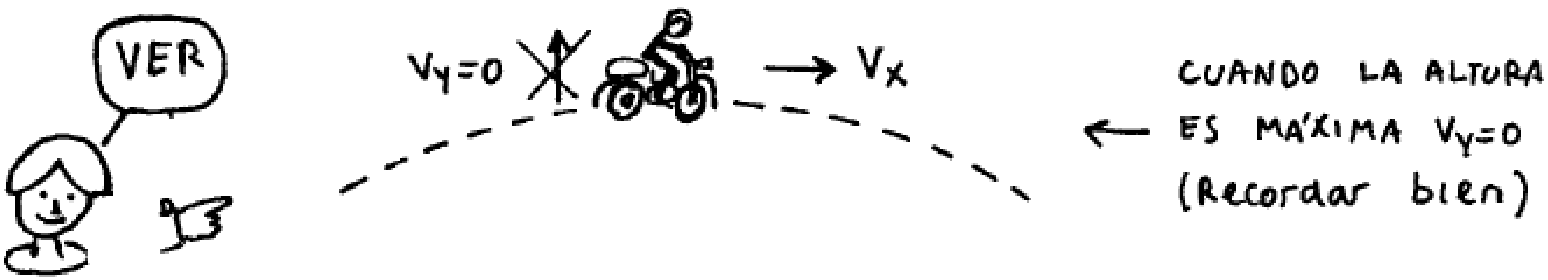
$$\begin{cases} x = 21{,}65\,\dfrac{m}{s}\cdot t \\ y = 12{,}5\,\dfrac{m}{s}\cdot t - 4{,}9\,\dfrac{m}{s^2}\cdot t^2 \\ v_{fy} = 12{,}5\,\dfrac{m}{s} - 9{,}8\,\dfrac{m}{s^2}\cdot t \end{cases}$$

← Sólo estas ecuaciones se usan.

ANOTAR ESTAS ECUACIONES

a) - Hallar la altura máxima

Cuando el tipo llega a la altura máxima, la sombra sobre el eje **y** ya no sigue subiendo más. (Tratá de imaginártelo). Exactamente en ese momento la velocidad en <u>y</u> tiene que ser <u>cero</u>. (cero). Atento, la que es **<u>CERO</u>** es la velocidad **<u>EN Y</u>** . En x el objeto sigue teniendo velocidad que vale V_x . (= 21,65 m/s).



Entonces reemplazando la velocidad final en **y** por cero :

$$V_y = 0 \longrightarrow 0 = 12{,}5\frac{m}{s} - 9{,}8\frac{m}{s^2}\cdot t$$

$$\Rightarrow\ 9{,}8\frac{m}{s^2}\cdot t = 12{,}5\frac{m}{s} \qquad \Rightarrow\ t = \frac{12{,}5\ m/s}{9{,}8\ m/s^2}$$

$$\boxed{t_{max} = 1{,}275 seg} \leftarrow$$

Tiempo que tarda la moto en llegar a la altura máxima.

b) - ¿ Cuánto tiempo está la moto en el aire ?

Todo lo que sube tiene que bajar. Si el tipo tardó 1,275 seg para subir, también va a tardar 1,275 seg para bajar. Es decir, el tiempo total que el tipo está en el aire va a ser 2 veces el t de subida. Atención, esto vale en este caso porque la moto sale del piso y llega al piso.

$$t_{tot} = 2 \times t_{max} \qquad \Rightarrow \qquad t_{tot} = 2 \times 1{,}275 seg$$

$$\underline{t_{tot} = 2{,}55 seg} \qquad \Leftarrow \qquad \boxed{\text{TIEMPO TOTAL QUE LA MOTO ESTA EN EL AIRE}}$$

Esto mismo lo podés comprobar de otra manera. Cuando el tipo toca el suelo la posición de la sombra sobre el eje y es y = 0. Entonces, si reemplazo y por cero en :
Y = 12,5 m/s . t - 4,9 m/s^2.t ^{2} , me queda :

$$12{,}5 \frac{m}{s} \times t - 4{,}9 \frac{m}{s^2} \times t^2 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad 4{,}9 \frac{m}{s^2} \times t^2 = 12{,}5 \frac{m}{s} \times t$$

$$\Rightarrow \qquad t = \frac{12{,}5 \text{ m/s}}{4{,}9 \text{ m/s}^2} = 2{,}55 \text{ seg} \qquad (\text{ verifica }).$$

c) - Calcular a qué distancia de la rampa cae el tipo con la moto.

El tiempo total que el tipo tardaba en caer era 2,55 s. Para calcular en qué lugar cae, lo que me tengo que fijar es qué distancia recorrió la sombra sobre el eje **x** en ese tiempo. Veamos.

La ecuación de la posición de la sombra en equis era $X = 21{,}65\ m/s\ .t$, entonces reemplazo por 2,55 segundos y me queda:

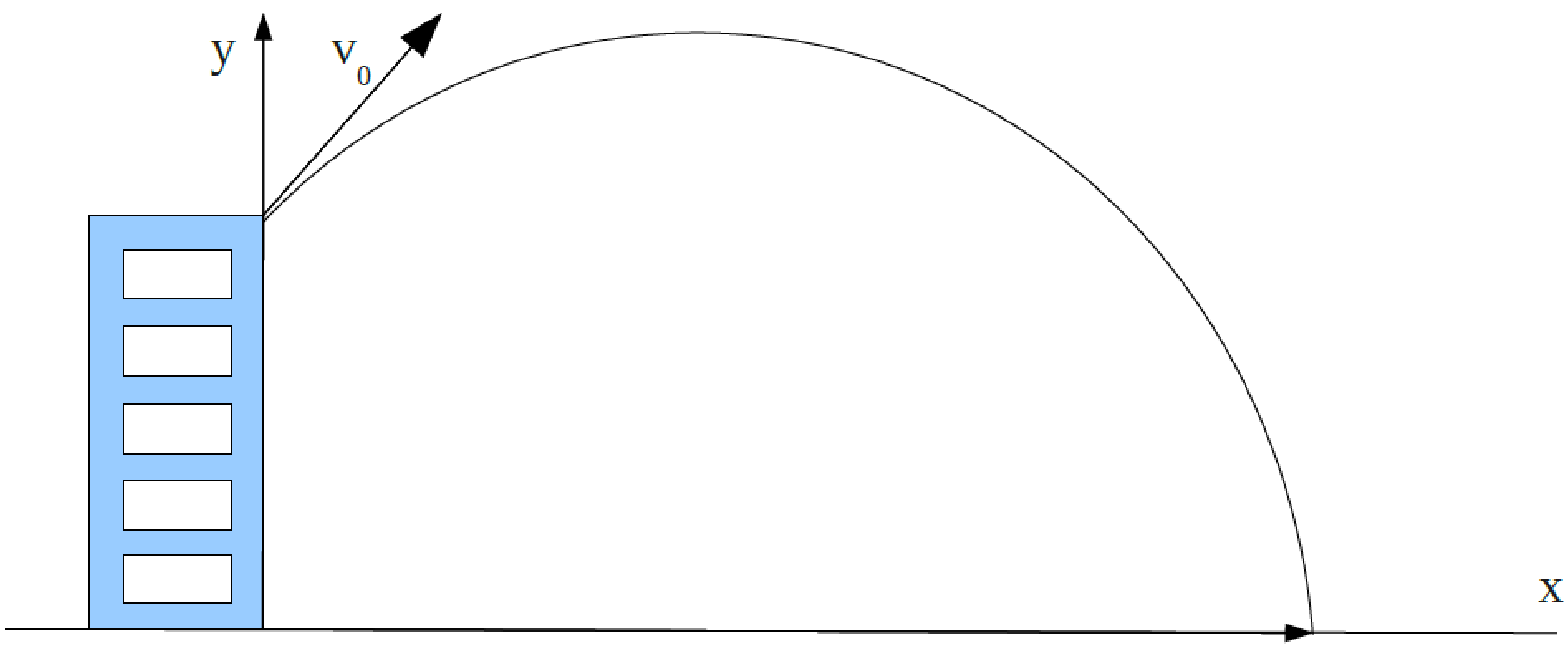
$$X_{caída} = 21{,}65 \frac{m}{s} \times 2{,}55 seg$$

$$\Rightarrow \quad \underline{X_{caída} = 55{,}2\ m} \quad \Leftarrow$$

DISTANCIA A LA QUE CAE LA MOTO

Ejemplo

Se dispara un proyectil con una velocidad inicial v_0 de 10 m/s desde la terraza de un edificio de 40 m de altura y con un ángulo de 30°respecto a la horizontal ¿a que distancia de la base del edificio el proyectil impactará en el suelo?



El vector posición será:

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} x_0+v_{0x}.t \\ y_0+v_{0y}.t-\frac{1}{2}.g.t^2 \\ z_0+v_{0z}.t \end{pmatrix}$$

Reemplazando:

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} 0+10.\cos 30°.t \\ 40+10\, sen\, 30°.t-\frac{1}{2}.g.t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puntos característicos

Cuando el proyectil toque el piso el vector

$$\vec{r}(t_{final}) = \begin{pmatrix} 0+10.\cos 30°.t_{final} \\ 40+10\, sen\, 30°.t_{final} - \frac{1}{2}.g.t_{final}^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+10.\cos 30°.t_{final} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De la segunda componente obtengo el tiempo:

$$40+10\, sen\, 30°.t_{final} - \frac{1}{2}.g.t_{final}^2 = 0$$

Resuelvo cuadrática:

$$t_{(1-2)} = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2+784}}{-9{,}8}$$

$$t_{(1)} = -2{,}4\, s$$
$$t_{(2)} = 3{,}4\, s$$

Puntos característicos

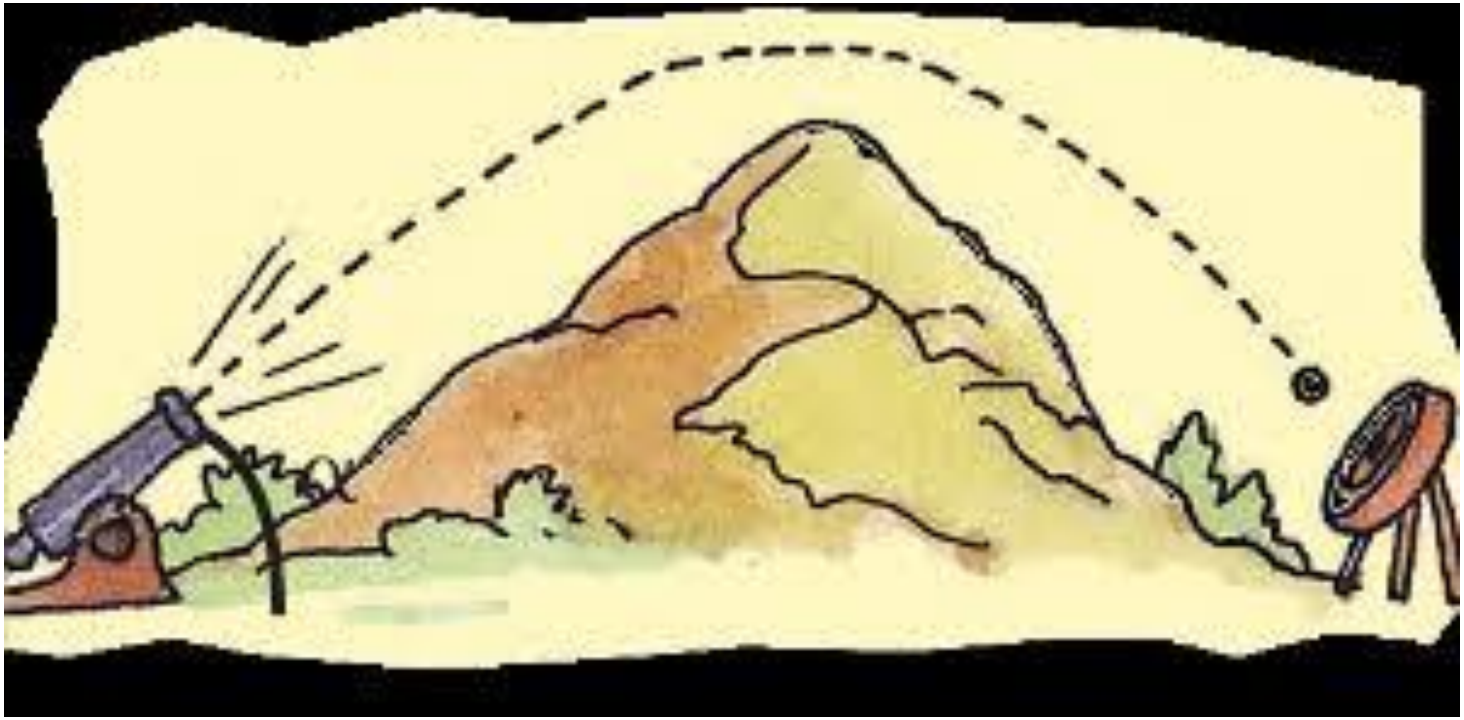
Una vez que tengo el tiempo reemplazo en la ecuación de r(t):

$$\vec{r}\,(t_{final})=\begin{pmatrix}0+10.\cos 30°.3,4\\0\\0\end{pmatrix}m$$

$$\vec{r}\,(t_{final})=\begin{pmatrix}29,4\\0\\0\end{pmatrix}m$$

Finalmente el objeto impacta el suelo a **29.4 m** de la base del edificio

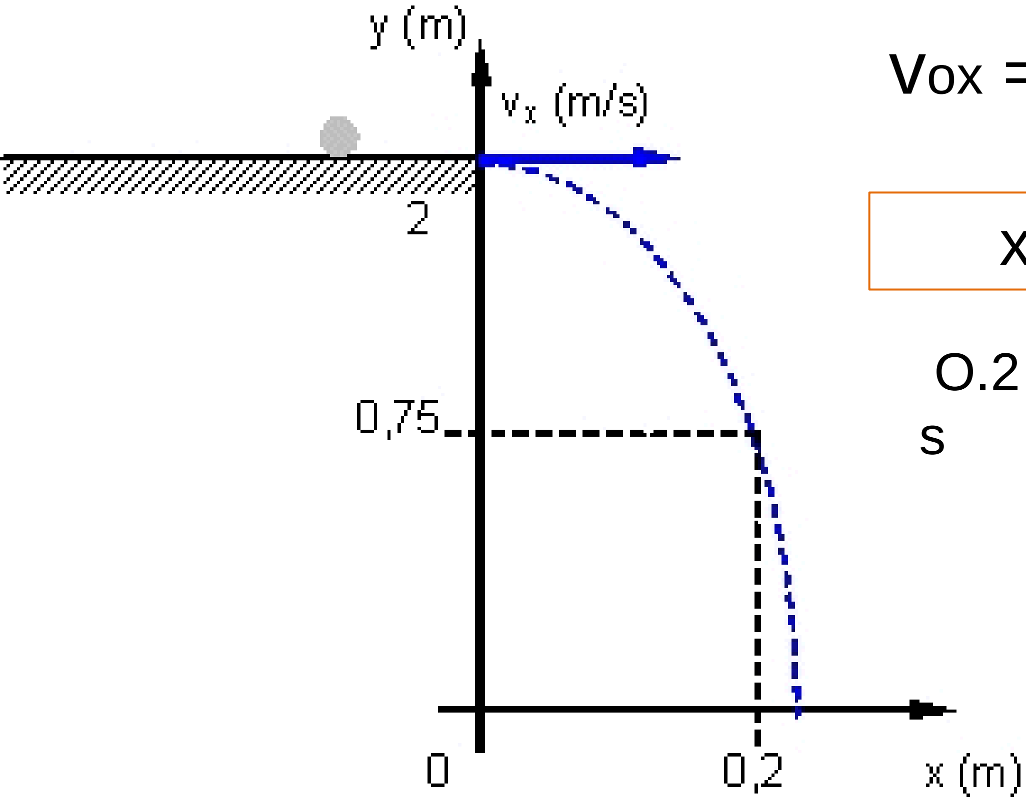
Vamos a la práctica



EJERCICIO N° 5

Una pelota está rodando con velocidad constante sobre una mesa horizontal de 2 m de altura respecto del suelo. A los 0,5 s de haberse caído de la mesa está a una distancia de **x**(t) = 0,2 **i** (m) de la misma. Representar gráficamente el movimiento de la pelota en un plano (x, y) y fijar un sistema de referencia. Utilizando las ecuaciones vectoriales del movimiento en el plano calcular:

1) la velocidad que traía al instante de caer,
2) el vector posición **r** (t) respecto del borde de la mesa al llegar al suelo.
3) Teniendo en cuenta las ecuaciones vectoriales de velocidad y aceleración del movimiento en el plano, explicar qué tipo de movimiento es el que describe la pelota respecto del eje "x" y que tipo de movimiento respecto del eje "y".

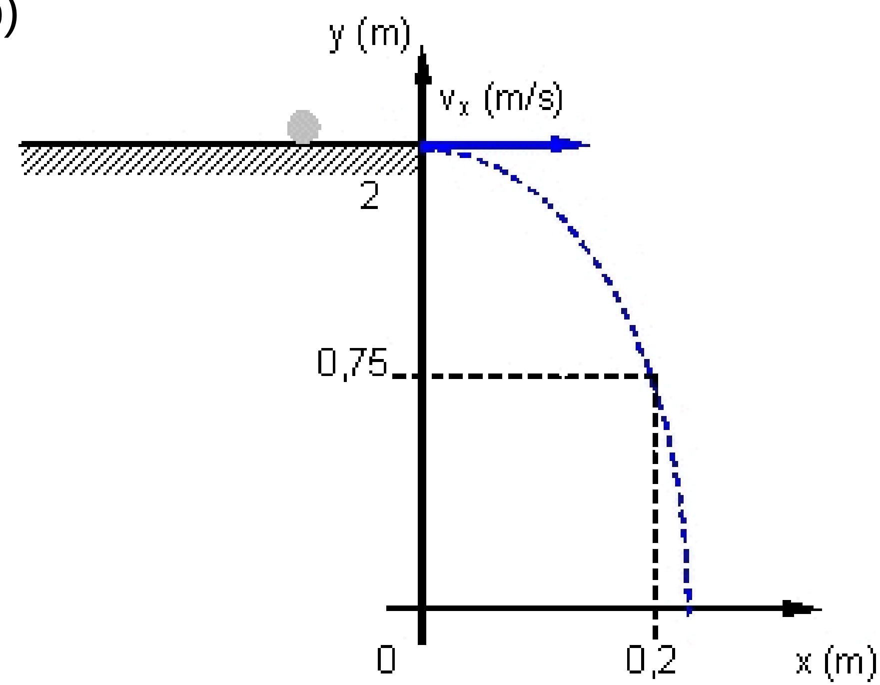


$v_{ox} = v_x = ¿?$ $v_{oy} = 0$

$$\boxed{x = x_0 + vo_x\,.t}$$

O.2 m = 0 + vox . 0.5 s → Vox

b)



$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + v_{0x}.t \\ y_0 + v_{0y}.t - \frac{1}{2}.g.t^2 \\ -v_{0z}.t \end{pmatrix}$$

Para obtener el vector posición necesito tiempo de caída de la pelota, se ocupa el ecuación de posición de y

$y = -\frac{1}{2}\, g\, t^2$ $\Rightarrow$ t

c)

MRU $\Rightarrow$ movimiento en el eje x

MRUV $\Rightarrow$ movimiento en el eje y

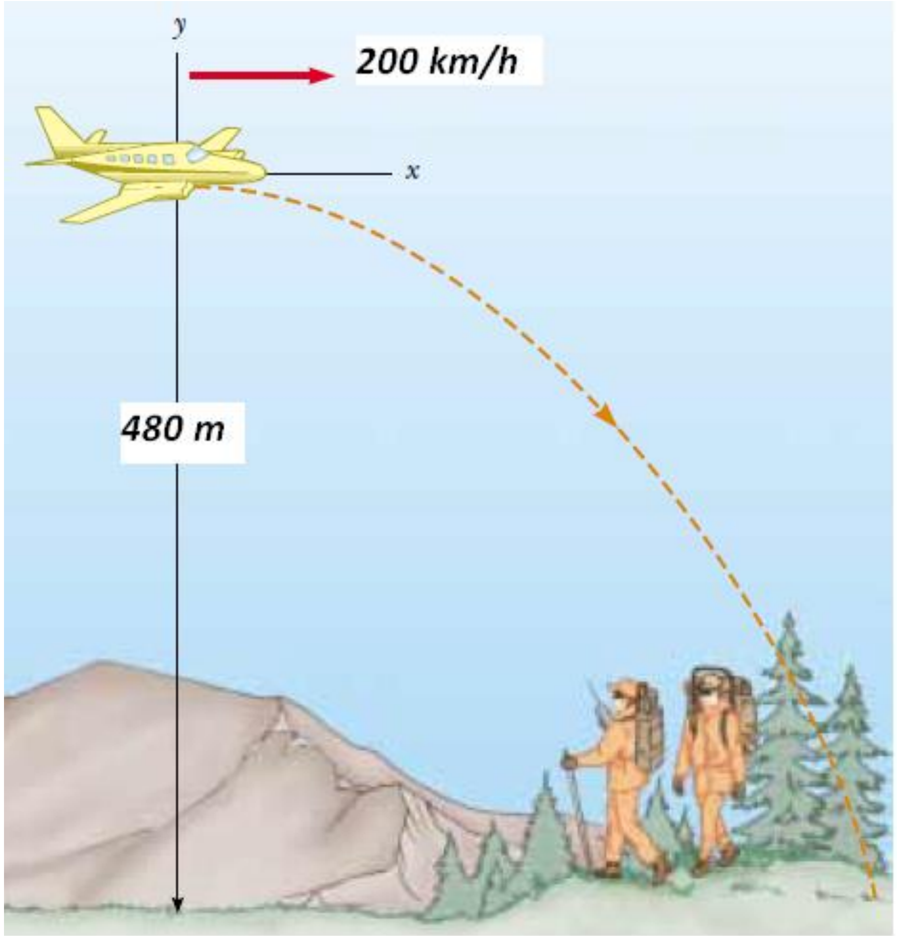
EJERCICIO N° 6

Se deja caer un objeto desde un aeroplano que vuela horizontalmente a una altura de 480 m con una velocidad de 200 km/h. Representar gráficamente el movimiento del objeto en un plano (x, y) fijando un sistema de referencia y determinar:

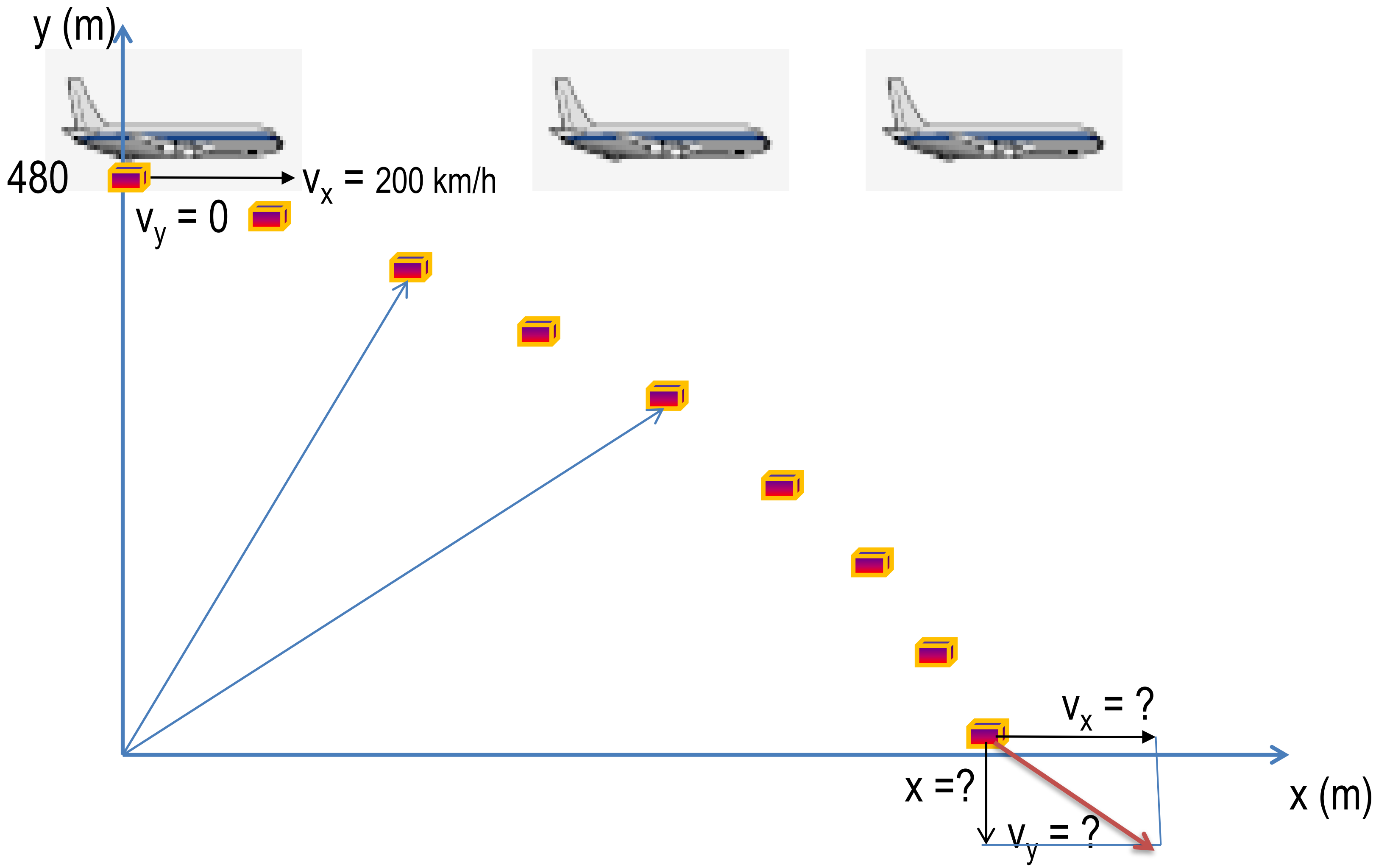
1)cuanto avanzará el objeto en sentido horizontal antes de llegar a la tierra,

2)las componentes x e y de la velocidad precisamente antes que choque contra el suelo,

3)el valor y dirección de la velocidad en el momento del impacto.



EJERCICIO N° 6



a) $x = x_0 + vo_x .t$

$X_0 = 0$

Necesito saber el tiempo que tarda el objeto en llegar tocar el suelo; para eso necesito otra ecuación (la posición en el eje y)

$y = y_0 - v_{0y} .t - 1/2 . g . t^2$

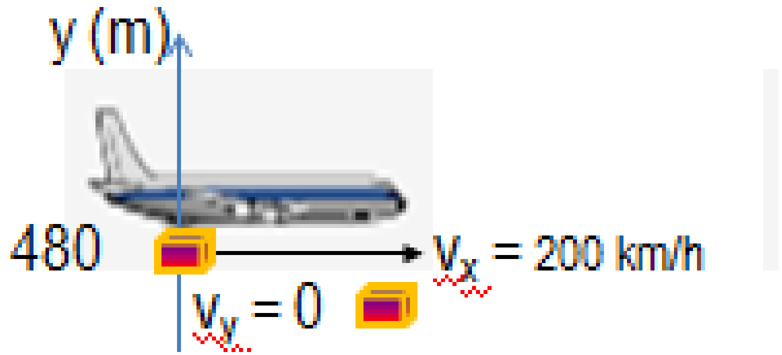
t

480 m

9,8 m/s²

Voy= o

x= cuando avanzara el objeto en sentido horizontal

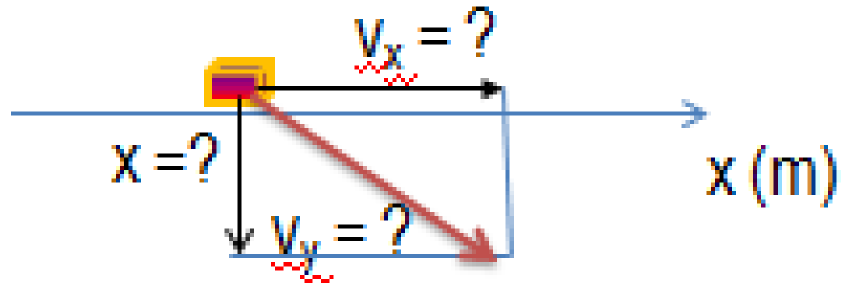


b)

$$\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} V_x(t) \\ V_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{0x} \\ V_{0y} - g.t \end{pmatrix}$$

$$V_x = V_{ox}$$

0



$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$tg\,\alpha = \frac{v_y}{v_x} \quad \Rightarrow \quad \alpha = arctg\left(\frac{v_y}{v_x}\right)$$