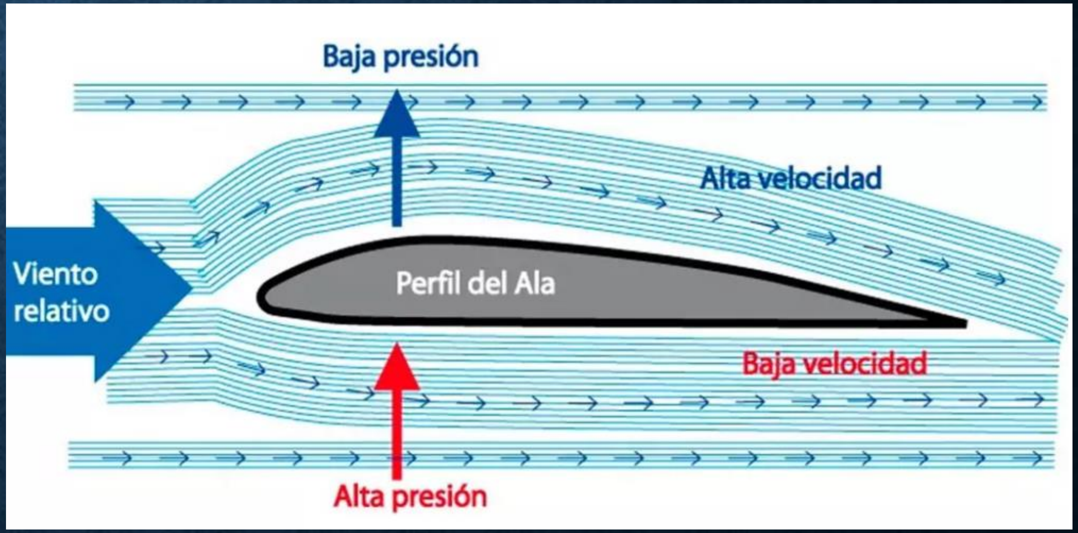
MECÁNICA DE LOS FLUIDOS Y MÁQUINAS

UNIDAD N°3: Hidrodinámica

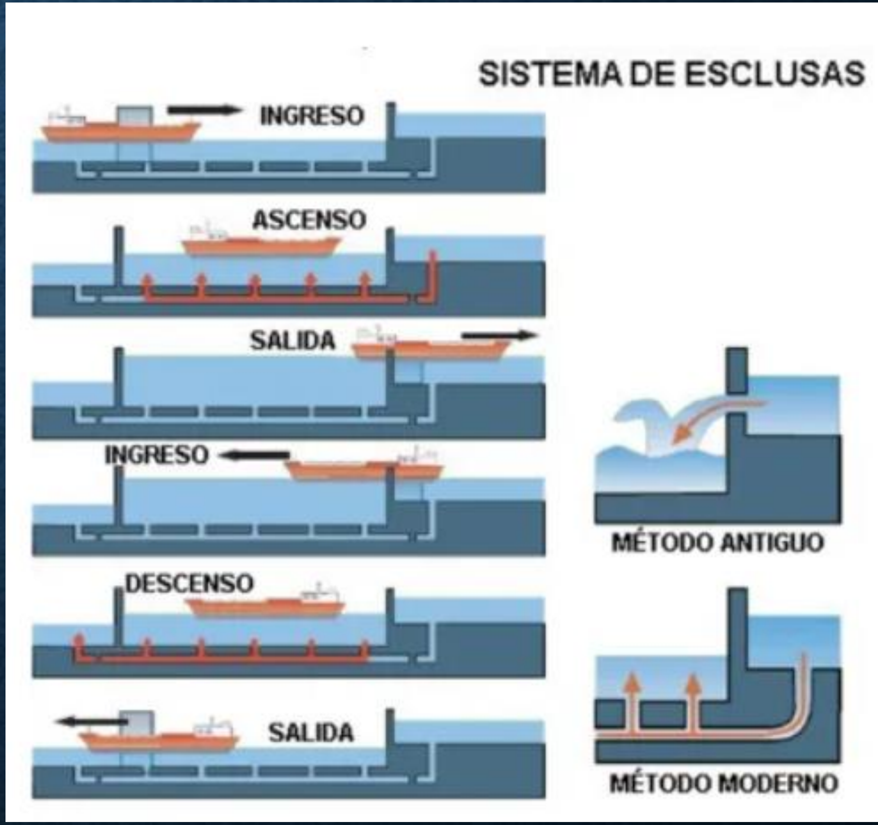
Docentes:

- Ing. RODRIGUEZ, Carlos
- Ing. CORREA, Gustavo
- Ing. POLISCZUK, Dario

INTRODUCCIÓN

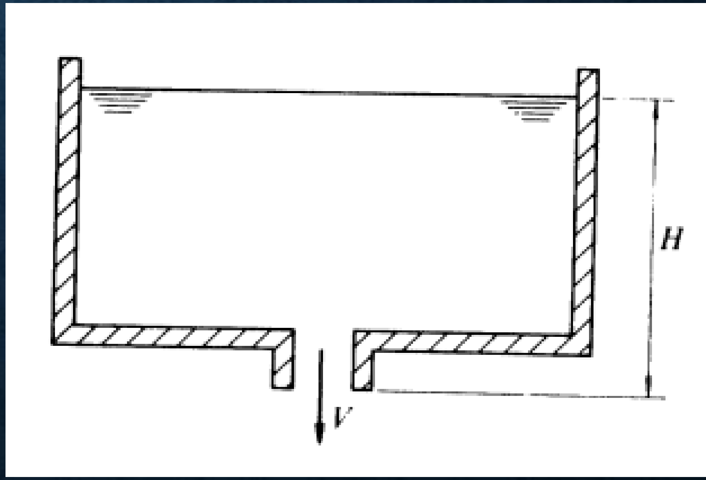


INTRODUCCIÓN



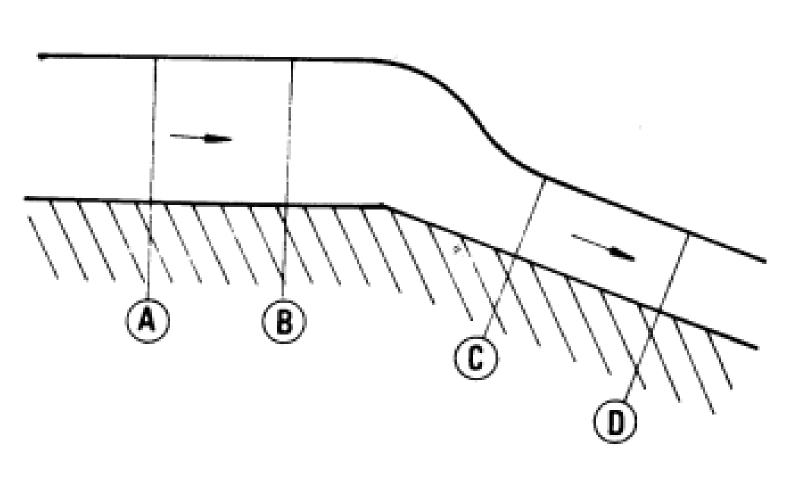
REGIMENES DE CORRIENTE

Regímenes de corriente	
Permanente	Si en cualquier punto del espacio por donde circula un fluido no varían con el tiempo las características de este (aunque varíen de un punto a otro). En particular su velocidad y presión. *Ejemplo: corriente de agua en un canal de hormigón de pendiente constante.*
Variable	Si sucede lo contrario. *Ejemplo: vaciado de un depósito por un orificio en el fondo.*



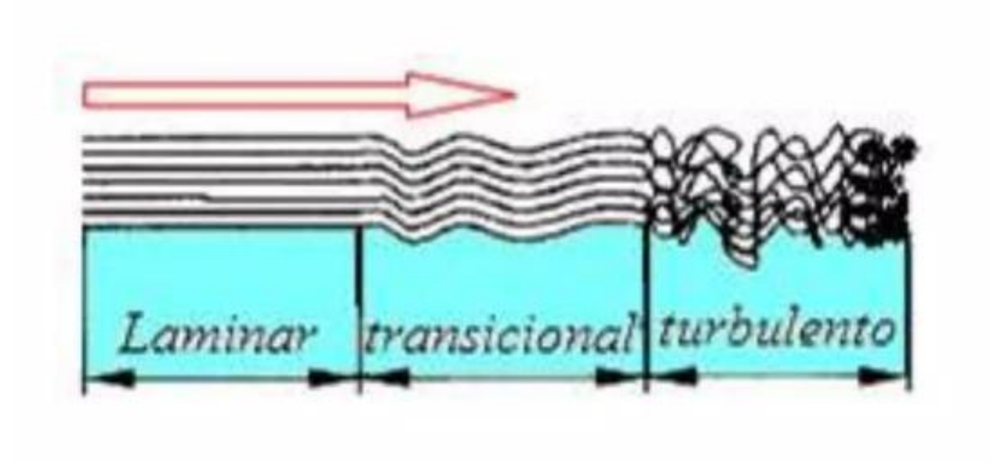
REGIMENES DE CORRIENTE

Regímenes de corriente	
Uniforme	Si en cualquier sección transversal a la corriente la velocidad en puntos homólogos es igual en magnitud y dirección, aunque dentro de una misma sección transversal varie de un punto a otro. *Ejemplo: flujo de un fluido en un tubo de diámetro constante (ver figuras Tramos AB y CD).*
No uniforme	Si sucede lo contrario. *Ejemplo: ver figura (Tramo BC).*



REGIMENES DE CORRIENTE

Regímenes de corriente	
Laminar	Si es perfectamente ordenada de manera que el fluido se mueve en láminas paralelas (si la corriente tiene lugar entre dos planos paralelos) o en capas cilíndricas coaxiales
Turbulenta	Si sucede lo contrario. Como el agua en un canal de gran pendiente. El que se de uno u otro régimen depende del influjo de la viscosidad (o del número de Reynolds "Re")



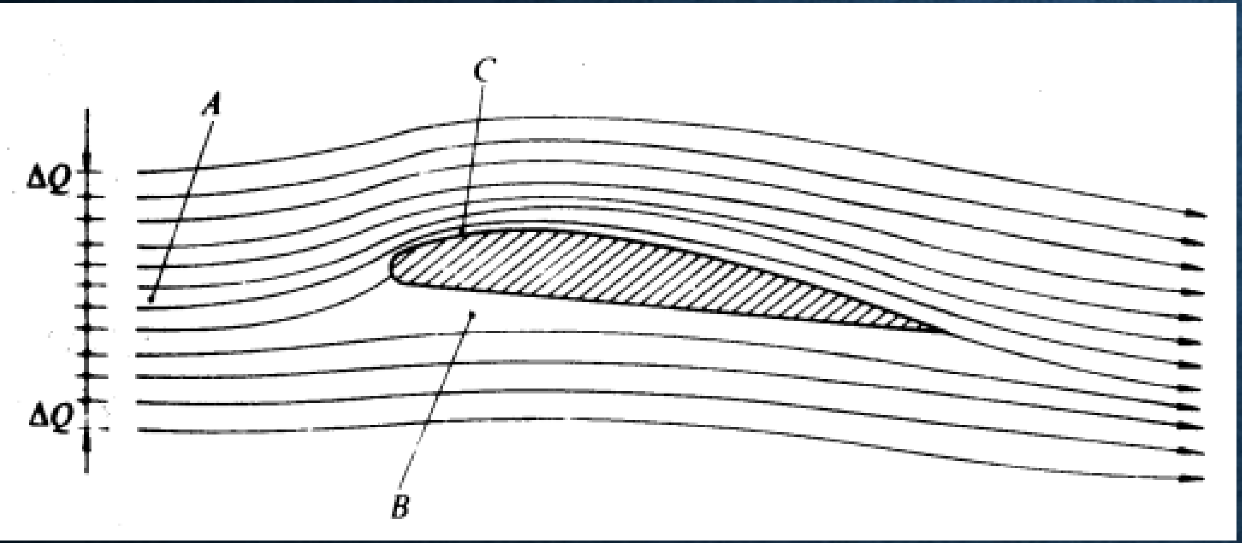
REGIMENES DE CORRIENTE

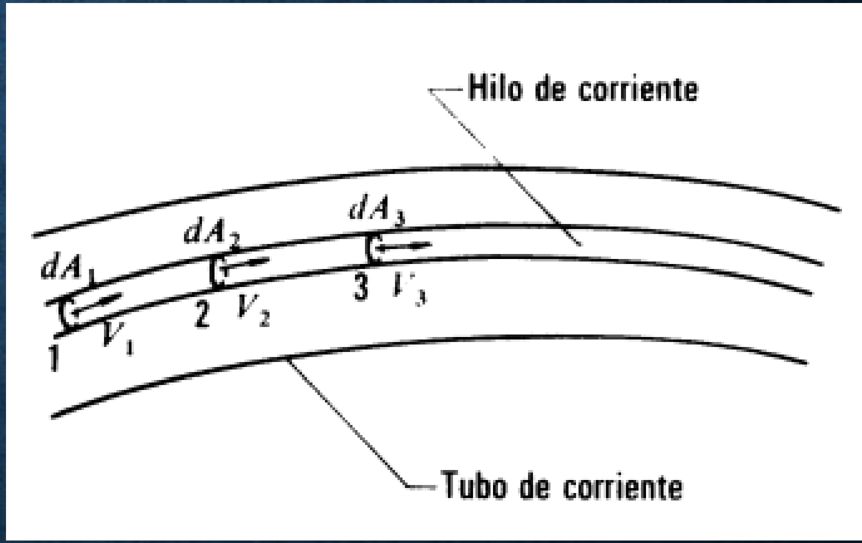
Laminar

Turbulento

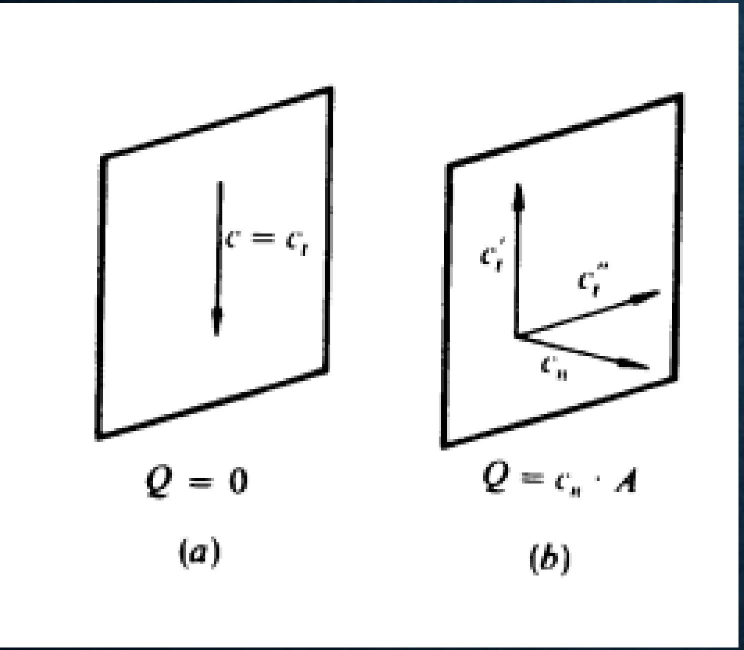
REGIMENES DE CORRIENTE

HILO Y TUBO DE CORRIENTE





DEFINICIÓN DE CAUDAL



$$dQ = c_n \cdot dA$$

$$Q = \int c_n \cdot dA$$

$$Si\ \vec{c}\ es\ la\ velocidad\ media\ a\ la\ sección\ \rightarrow\ Q = \vec{c} \cdot A$$

$$Si\ \vec{c}\ la\ velocidad\ media \rightarrow \vec{c} = \frac{\int c_n \cdot dA}{A} = \frac{Q}{A}$$

$$Para\ una\ tubería\ de\ diámetro\ D \rightarrow \vec{c} = \frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2} \left(\frac{m^3}{s}\right)$$

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

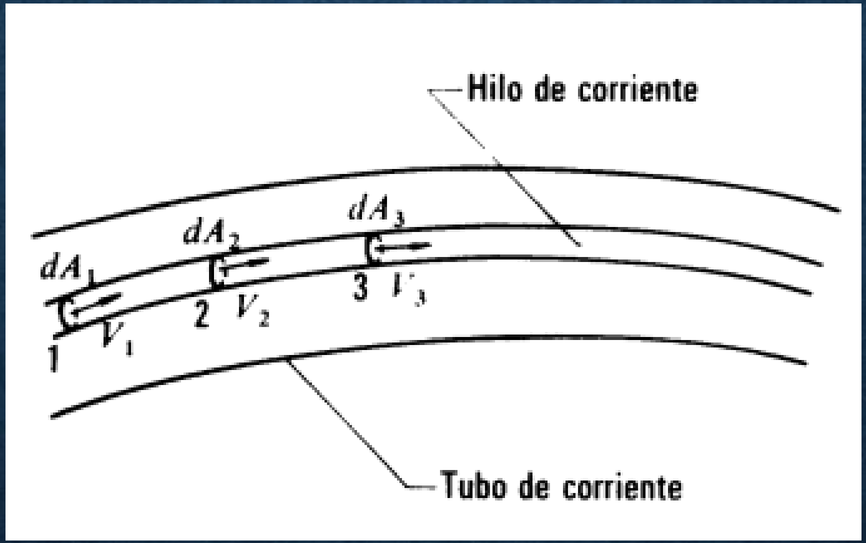
Solo será tratada para régimen permanente.

Ecuación de continuidad para un hilo de corriente:

- *No entra ni sale fluido lateralmente porque la velocidad es tangencial al hilo de corriente.*
- *En régimen permanente el hilo de corriente es estacionario.*
- *No se crea ni se destruye masa, ni puede haber concentración o dilución de masa en ninguna sección del mismo, porque ello supondría aumento o disminución de la densidad del fluido en dicha sección, lo que es imposible en régimen permanente.*

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

"La masa que entra es igual a la masa que sale de un tubo de corriente"



$$\rho_1 c_1 \, dA_1 = \rho_2 c_2 \, dA_2 = \rho_3 c_3 \, dA_3 = C$$

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

$$\rho_1 c_1 \, dA_1 = \rho_2 c_2 \, dA_2 = \rho_3 c_3 \, dA_3 = C$$

ECUACION DE CONTINUIDAD PARA FLUIDO COMPRESIBLE E INCOMPRESIBLE Y UN HILO DE CORRIENTE (1.ª FORMA)

$$\frac{c_1 \, dA_1}{v_1} = \frac{c_2 \, dA_2}{v_2} = \frac{c_3 \, dA_3}{v_3} = C \qquad (5\text{-}4)$$

(régimen permanente)

ECUACION DE CONTINUIDAD PARA UN FLUIDO INCOMPRESIBLE SOLAMENTE Y UN HILO DE CORRIENTE (1.ª FORMA)

$$c_1 \, dA_1 = c_2 \, dA_2 = c_3 \, dA_3 = C \qquad (5\text{-}5)$$

(régimen permanente: fluido incompresible solamente)

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

ECUACION DE CONTINUIDAD PARA FLUIDO COMPRESIBLE E INCOMPRESIBLE Y UN HILO DE CORRIENTE (2.ª FORMA)

$$dG = \frac{c\,dA}{v} = C \tag{5-6}$$

ECUACION DE CONTINUIDAD PARA UN FLUIDO INCOMPRESIBLE Y UN HILO DE CORRIENTE (2.ª FORMA)

$$dQ = c\,dA = C \tag{5-7}$$

Solo en fluido incompresible el caudal volumétrico que atraviesa una sección transversal cualquiera de un filamento de corriente es constante; pero en todo fluido compresible e incompresible el caudal másico es constante.

ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Ecuación de continuidad de un fluido incompresible para un tubo de corriente

FORMULA PRACTICA DE LA ECUACION DE CONTINUIDAD

$$\boxed{Q = A\bar{c} = C} \qquad (5\text{-}9)$$

donde Q — caudal volumétrico
A — área de una sección transversal del tubo
$\bar{c}$ — velocidad media normal a la sección considerada.

FUERZAS QUE ACTUAN SOBRE UN FLUIDO

Las fuerzas que pueden intervenir en un problema de mecánica de fluidos son:

Fuerzas externas:

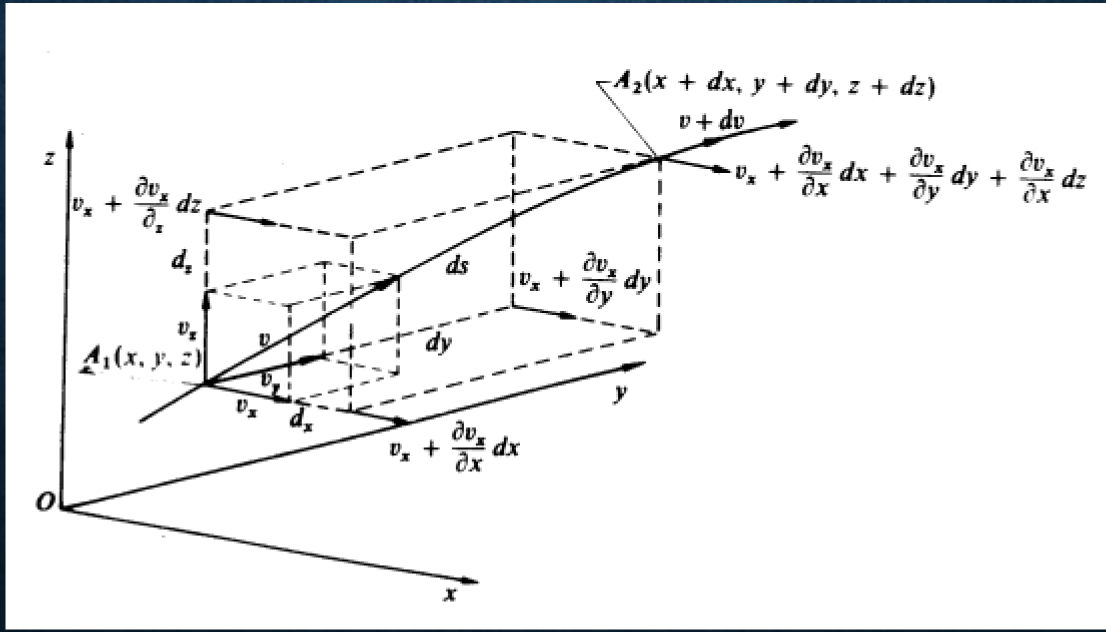
- La *fuerza de gravedad*.

Fuerzas internas:

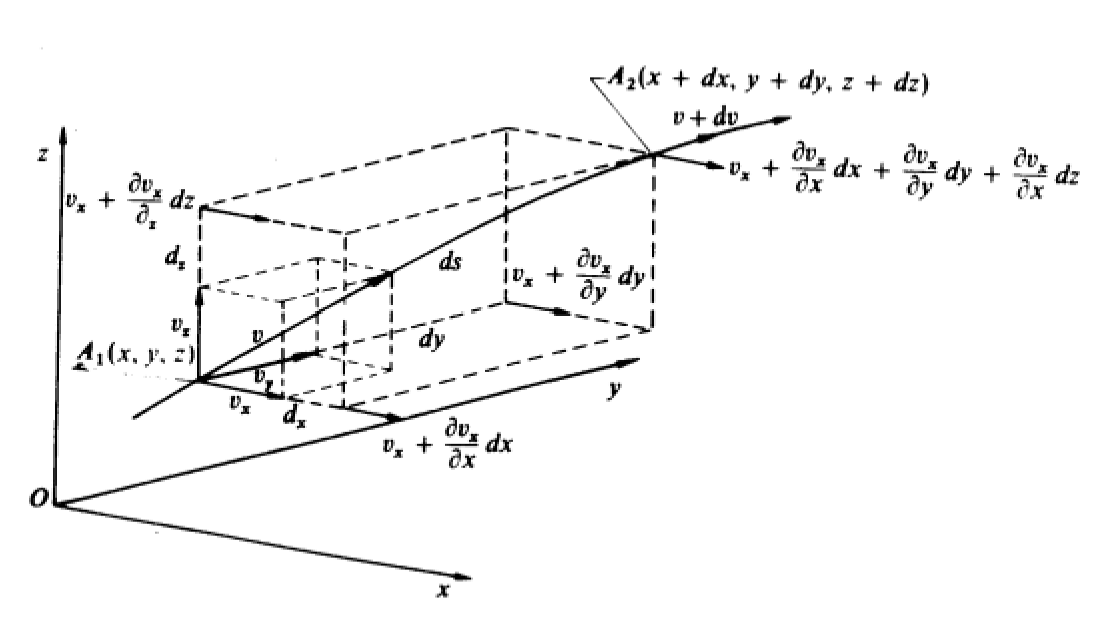
- La *fuerza causada por la diferencia de presiones*.
- La *fuerza de viscosidad* (es nula en un fluido ideal).
- La *fuerza de elasticidad* no entra en juego en un fluido incompresible.
- La *tensión superficial* que juega un papel poco importante.

ECUACIONES DIFERENCIALES DEL MOVIMIENTO DE UN FLUIDO IDEAL, O ECUACIONES DIFERENCIALES DE EULER

Consideraremos la hipótesis de un fluido ideal, sobre el que actúa como única fuerza externa la *gravedad* y que se mueve en régimen permanente. Por lo tanto en la deducción de estas ecuaciones solo intervendrán las fuerzas 1 y 2.



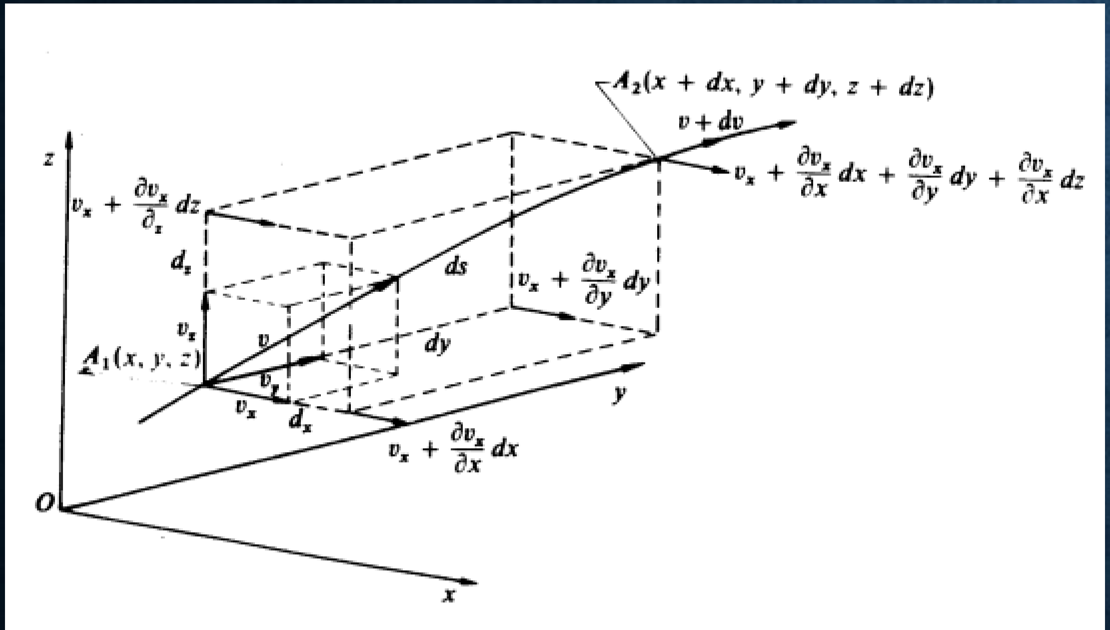
ECUACIONES DIFERENCIALES DEL MOVIMIENTO DE UN FLUIDO IDEAL, O ECUACIONES DIFERENCIALES DE EULER



$$
\begin{aligned}
v_x &= f_1(x,y,z,t)\\
v_y &= f_2(x,y,z,t)\\
v_z &= f_3(x,y,z,t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dv_x &= \frac{\partial v_x}{\partial t} dt + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz\\
dv_y &= \frac{\partial v_y}{\partial t} dt + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy + \frac{\partial v_y}{\partial z} dz\\
dv_z &= \frac{\partial v_z}{\partial t} dt + \frac{\partial v_z}{\partial x} dx + \frac{\partial v_z}{\partial y} dy + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz
\end{aligned}
$$

ECUACIONES DIFERENCIALES DEL MOVIMIENTO DE UN FLUIDO IDEAL, O ECUACIONES DIFERENCIALES DE EULER



Dividiendo ambos miemboros por dt

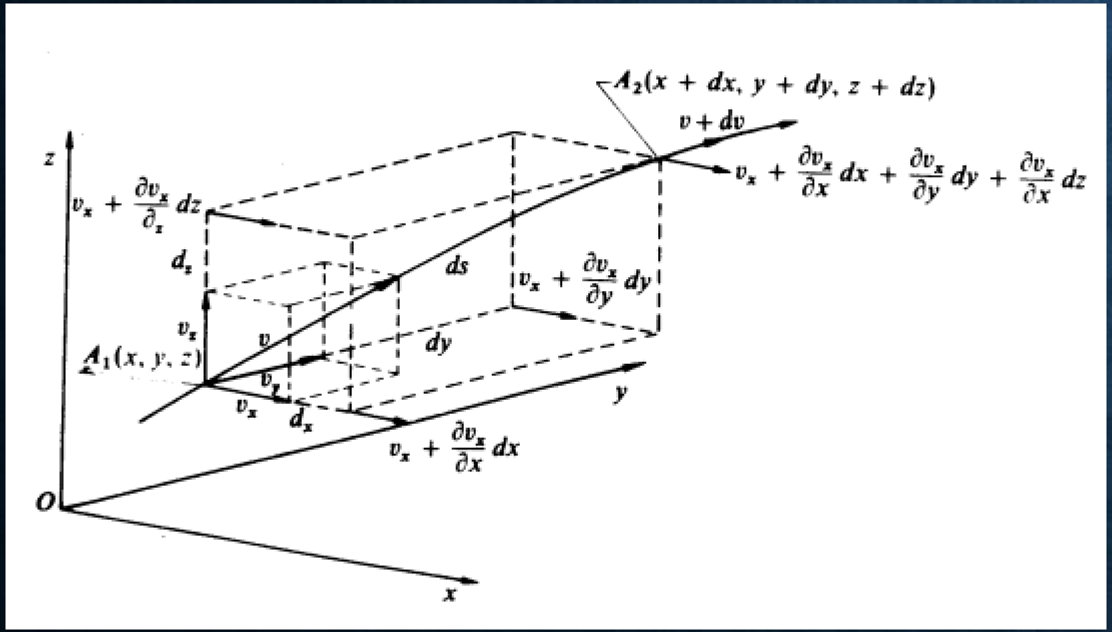
$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad \frac{dy}{dt} = v_y \quad \frac{dz}{dt} = v_z .$$

ECUACIONES DIFERENCIALES DEL MOVIMIENTO DE UN FLUIDO IDEAL, O ECUACIONES DIFERENCIALES DE EULER



$$\frac{dv_x}{dt} = \boxed{\frac{\partial v_x}{\partial t}} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

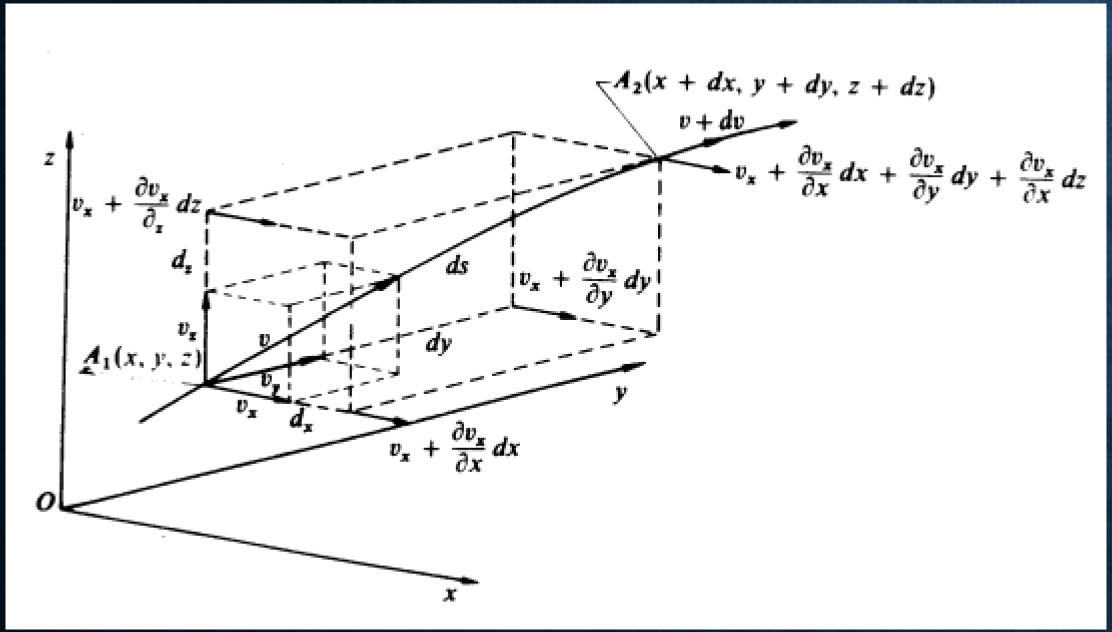
$$\frac{dv_y}{dt} = \boxed{\frac{\partial v_y}{\partial t}} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \boxed{\frac{\partial v_z}{\partial t}} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Si el movimiento es permanente, en un punto cualquiera del espacio la velocidad no varia con el tiempo, por tanto:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$$

ECUACIONES DIFERENCIALES DEL MOVIMIENTO DE UN FLUIDO IDEAL, O ECUACIONES DIFERENCIALES DE EULER



$$\frac{dv_x}{dt} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

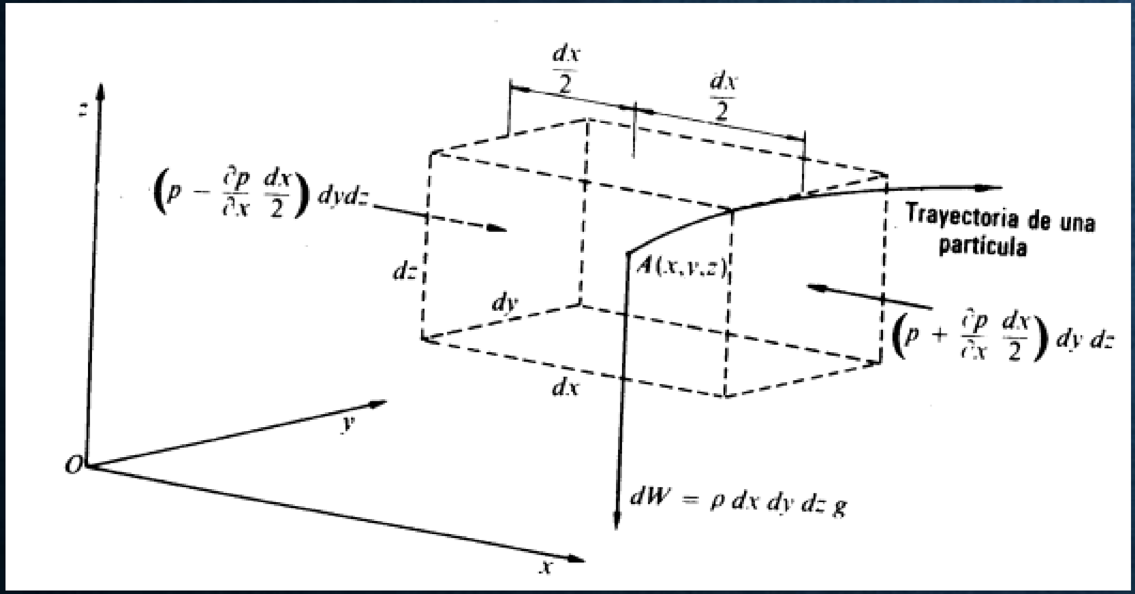
$$\frac{dv_y}{dt} = v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

(ecuaciones de la aceleración; régimen permanente)

ECUACIONES DE EULER

$Sea\ p = f(x, y, z)\ la\ presión\ en\ el\ punto\ A. La\ presión\ en\ la\ cara\ vertical\ izquierda, derecha\ y\ el\ peso\ serán:$



$$p + dp = p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}$$

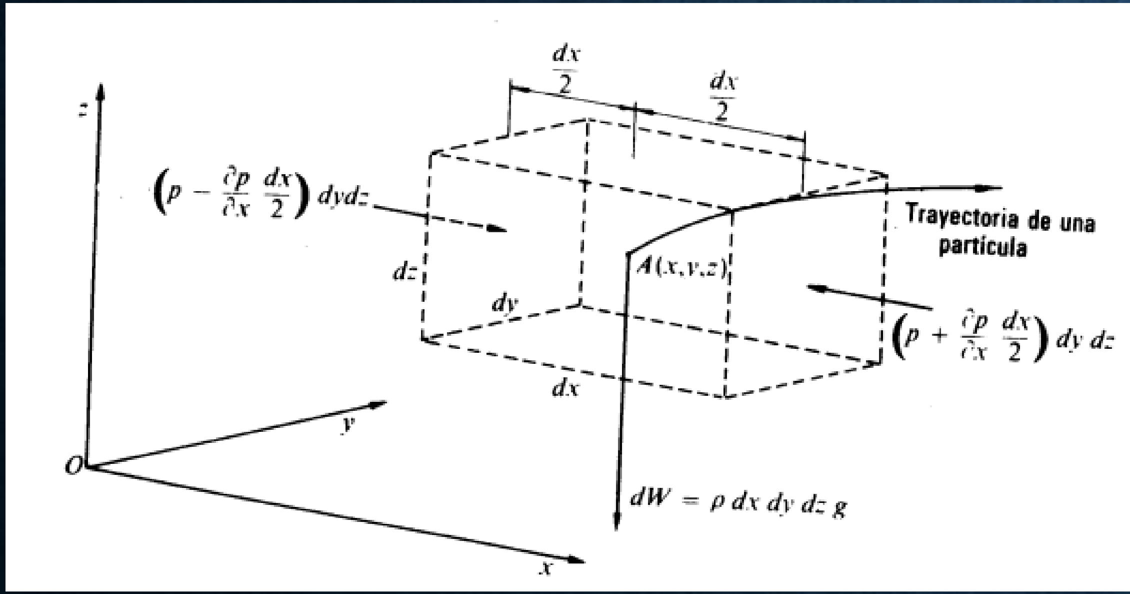
$$p + dp = p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}$$

$$dW = \rho\ dxdydz\ g$$

Sobre las 6 caras del paralelepípedo actúa la fuerza debido a la presión, se selecciono solo la correspondiente al eje x por claridad.

ECUACIONES DE EULER

$$debido\ a\ la\ segunda\ ley\ de\ Newton\ \vec{F} = m \cdot \vec{a} \rightarrow$$



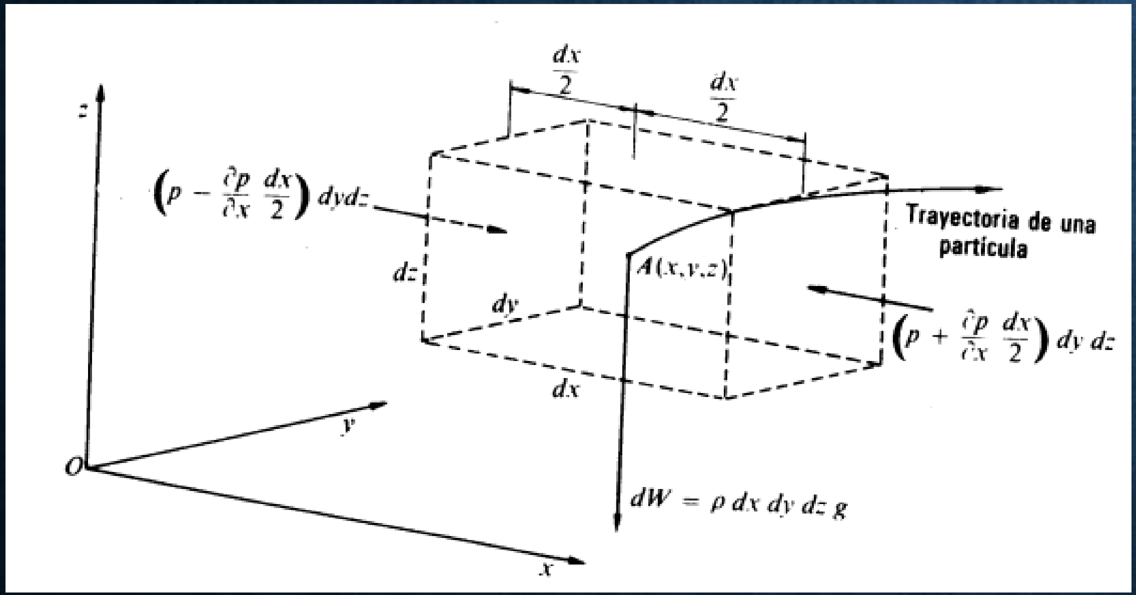
$$\rho\, dxdydz\, \frac{dv_x}{dt} = \left(p - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right) dy\, dz$$

$$dividiendo\ todo\ por\ \rho dxdydz \rightarrow$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

ECUACIONES DE EULER



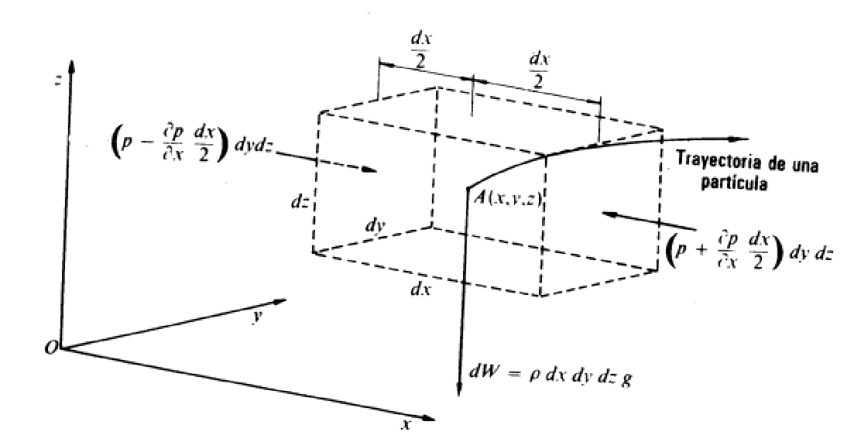
Por analogía →

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

ECUACIONES DE EULER



ECUACIONES DE EULER

$$\boxed{\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\rho y} \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}} \qquad (5\text{-}15)$$

(régimen permanente, fluido ideal e incompresible, fuerza de la gravedad única fuerza exterior)

TAREA I

Demostrar como a partir de las ecuaciones de Euler se puede definir la ecuación fundamental de la hidrostática.

ECUACIONES DE BERNOULLI PARA UN FLUIDO IDEAL

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\frac{dv_x}{dt}\,dx = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\,dx$$

$$\frac{dv_y}{dt}\,dy = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\,dy$$

$$\frac{dv_z}{dt}\,dz = -g\,dz - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\,dz$$

$$\frac{dv_x}{dt}\,dx + \frac{dv_y}{dt}\,dy + \frac{dv_z}{dt}\,dz$$

$$= -g\,dz - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\,dx + \frac{\partial p}{\partial y}\,dy + \frac{\partial p}{\partial z}\,dz\right)$$

ECUACIONES DE BERNOULLI PARA UN FLUIDO IDEAL

$$\frac{dv_x}{dt}dx + \frac{dv_y}{dt}dy + \frac{dv_z}{dt}dz$$
$$= -g\,dz - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right)$$

Sabiendo que $\rightarrow$

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad , \quad \frac{dy}{dt} = v_y \quad \text{y} \quad \frac{dz}{dt} = v_z \; ,$$

$$v_x\,dv_x + v_y\,dv_y + v_z\,dv_z = \frac{1}{2}d(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2}d(v^2)$$

ECUACIONES DE BERNOULLI PARA UN FLUIDO IDEAL

Además en régimen permanente p no es función del tiempo y su diferencial total se transforma en →

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

$$\frac{dp}{\rho} + g\,dz + \frac{d(v^2)}{2} = 0$$

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} = C$$

"Para un fluido ideal e incompresible que se mueve en régimen permanente"

ECUACIONES DE BERNOULLI PARA UN FLUIDO IDEAL

Altura total, H, a la constante C de la ecuación de Bernoulli en la forma (5-35), o sea

$$H = \frac{p}{\rho g} + z + \frac{v^2}{2g}$$

La altura total es la suma de las alturas de presión, geodésica y cinética, y es constante en el fluido ideal e incompresible.

Altura piezométrica, h (véase pág. 46)

$$\boxed{h = \frac{p}{\rho g} + z}$$

La altura piezométrica en un fluido real pero incompresible en reposo es constante.

ECUACIONES DE BERNOULLI PARA UN FLUIDO IDEAL

TAREA II

Definir la ecuación de Bernoulli para un hilo de corriente en régimen permanente.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE MOVIMIENTO DE UN FLUIDO REAL, O ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 v_x$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v_y$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 v_z$$

donde ∇^2 — operador de Laplace, cuya expresión es:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ν — viscosidad cinemática.

ECUACIÓN DE BERNOULLI PARA EL FLUIDO REAL

ECUACION DE BERNOULLI CON PERDIDAS

$$\frac{p_1}{\rho} + z_1 g + \frac{v_1^2}{2} - y_{r1-2} = \frac{p_2}{\rho} + z_2 g + \frac{v_2^2}{2}$$

(fluido real — viscoso pero incompresible — $v_1 v_2$ velocidades medias en las secciones 1 y 2)

$$\boxed{\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} - \boxed{H_{r1-2}} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}} \qquad (5\text{-}37)$$

(fluido real — viscoso e incompresible — v_1, v_2 velocidades medias en las secciones 1 y 2)

El término H_{r1-2} altura pérdida entre el punto 1 y el punto 2 $(g \cdot H_{r1-2} = y_{r1-2})$

ECUACIÓN DE BERNOULLI GENERALIZADA

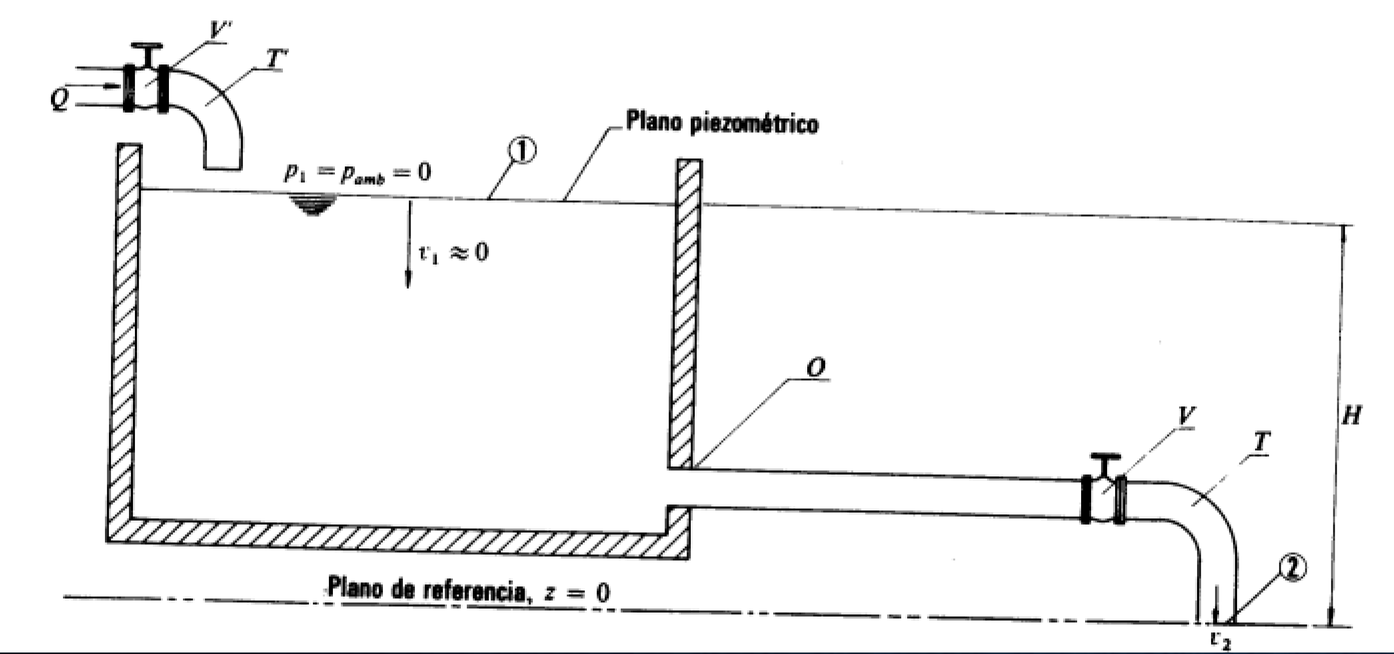
ECUACION DE BERNOULLI GENERALIZADA

$$\boxed{\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} - \Sigma H_{r1-2} + \Sigma H_b - \Sigma H_t = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g}}$$

(Ecuación del circuito hidráulico en serie)

- $p_1/\rho g$, $p_2/\rho g$ — alturas de presión
- z_1, z_2 — alturas geodésicas
- $v_1^2/2g$, $v_2^2/2g$ — alturas de velocidad
- ΣH_{r1-2} — suma de todas las pérdidas hidráulicas entre 1 y 2
- ΣH_b — suma de los incrementos de altura proporcionados por las bombas instaladas entre 1 y 2
- ΣH_t — suma de los incrementos de altura absorbida por los motores (turbinas) instalados entre 1 y 2.

APLICACIONES: SALIDA DE UN TUBO POR UN ORIFICIO "ECUACIÓN DE TORRICELLI"



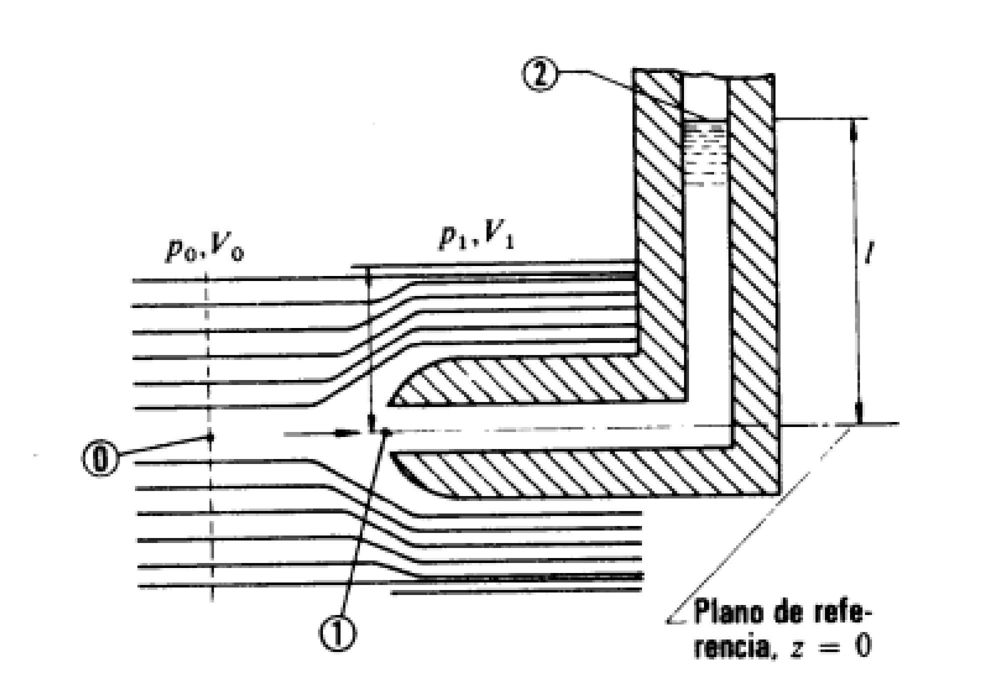
$$p_1/\rho g + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = p_2/\rho g + z_2 + \frac{v_2^2}{2g},$$

$$O + H + O = O + O + v_2^2/2g,$$

$$v_2 = \sqrt{2g\ H}$$

(salida a la atmósfera, pérdidas nulas)

APLICACIONES: TUBO DE PITOT



$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_t}{\rho g} = \frac{p_o}{\rho g} + \frac{v_o^2}{2g}$$

p_t — presión total o presión de estancamiento o de remanso
p_o, v_o — presión y velocidad de la corriente imperturbada (teóricamente en el infinito)

$$\frac{p_t}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + v_2^2/2g + z_2;$$

$$p_t = \rho g \cdot l$$

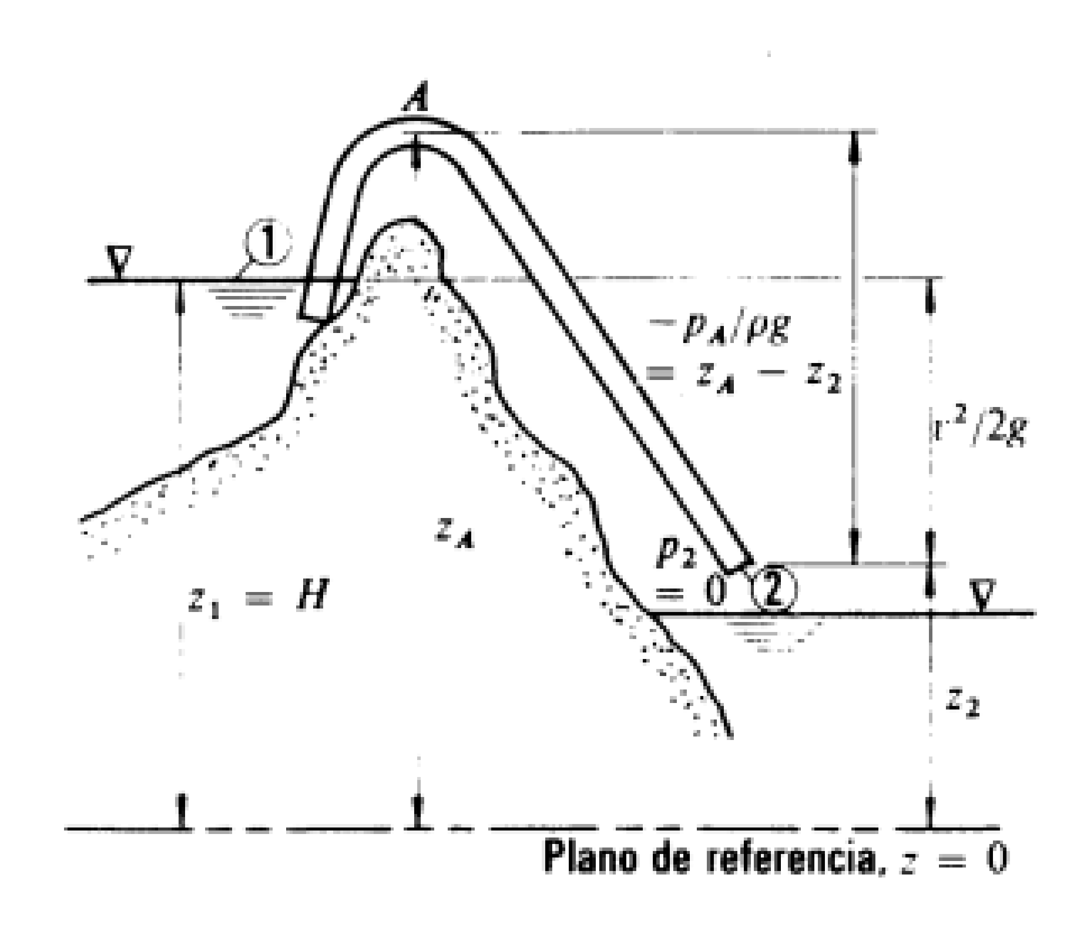
(presión total o de estancamiento, tubo de Pitot)

APLICACIONES

TAREA III

Realizar el análisis teórico del Tubo de Prandtl.

APLICACIONES: EL SIFÓN



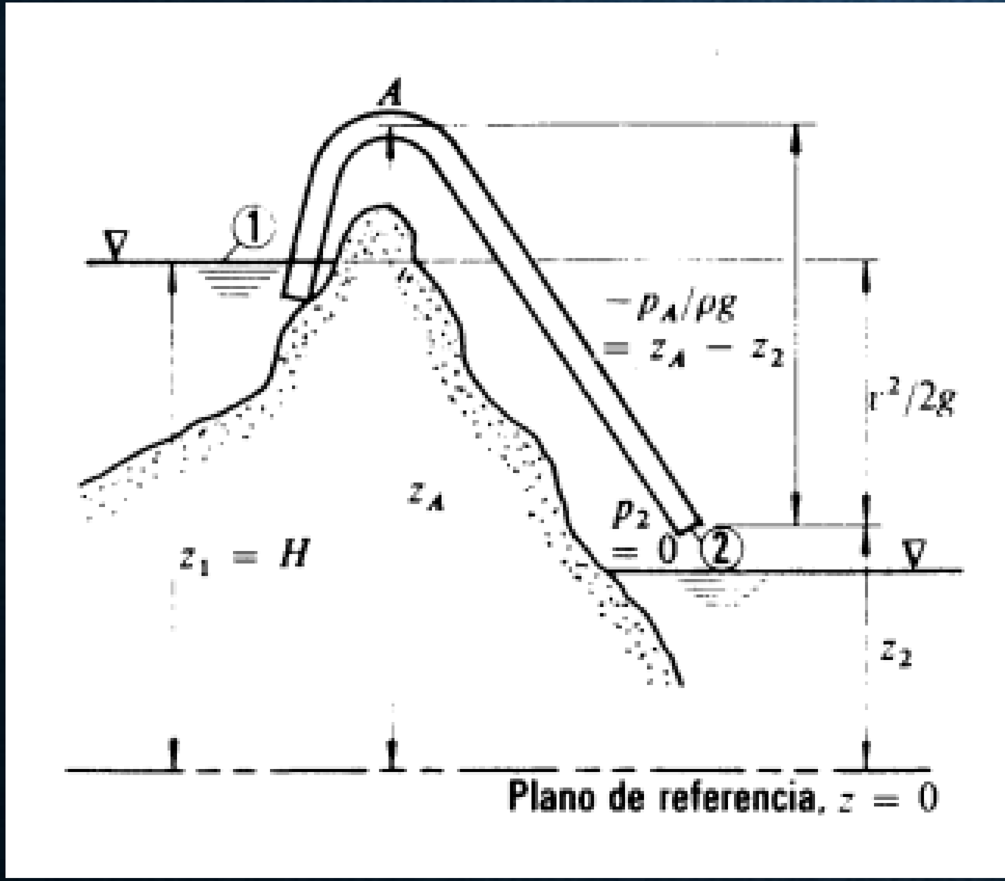
$$H = p_1/\rho g + z_1 + v_1^2/2g$$

$$\frac{p_1}{\rho g} = 0, \qquad v_1 \simeq 0;$$

$$O + z_1 + O = H$$

$$H = z_1$$

APLICACIONES: EL SIFÓN



$$H = p_2/\rho g + z_2 + v_2^2/2g$$

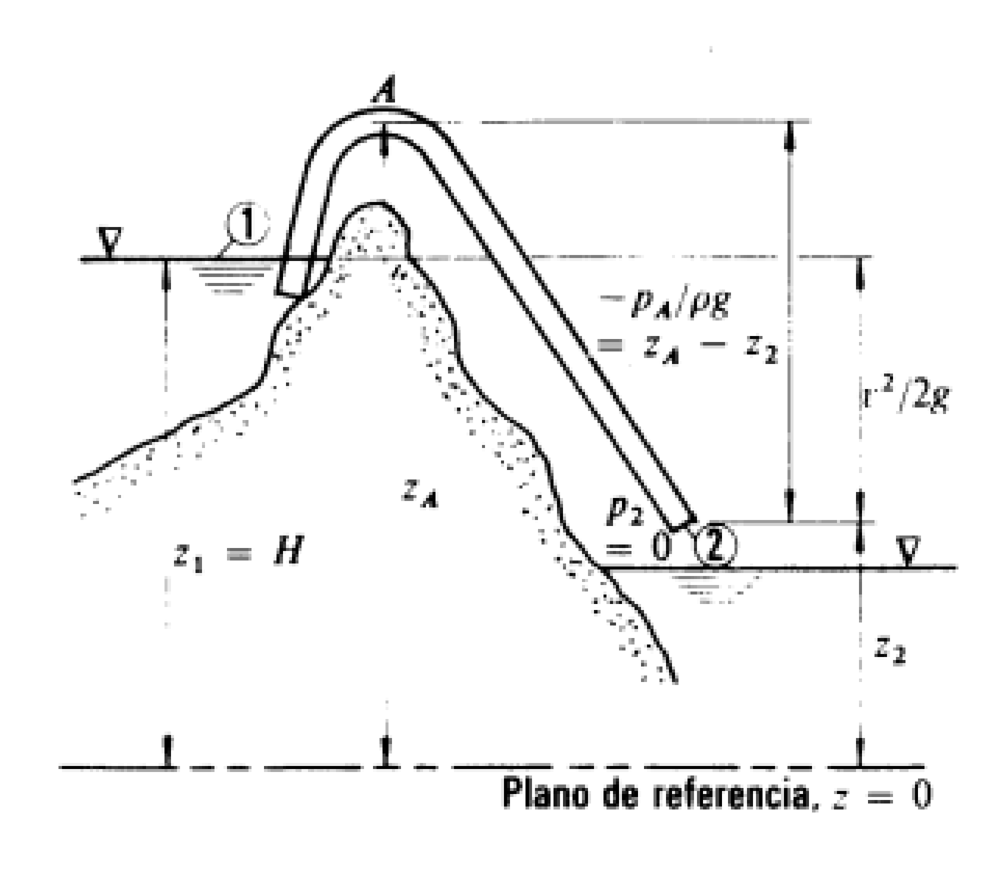
$$\frac{p_2}{\rho g} = 0;$$

$$O + z_2 + v_2^2/2g = H$$

$$v_2^2/2g = H - z_2$$

$$v = \sqrt{2g(H - z_2)}$$

APLICACIONES: EL SIFÓN



$$\frac{p_A}{\rho g} + z_A + \frac{v^2}{2g} = H$$

$$\frac{p_A}{\rho g} = H - z_A - \frac{v^2}{2g}$$

$$\frac{p_A}{\rho g} = H - z_A - H + z_2 = -(z_A - z_2) < 0.$$