SEÑALES Y SISTEMAS

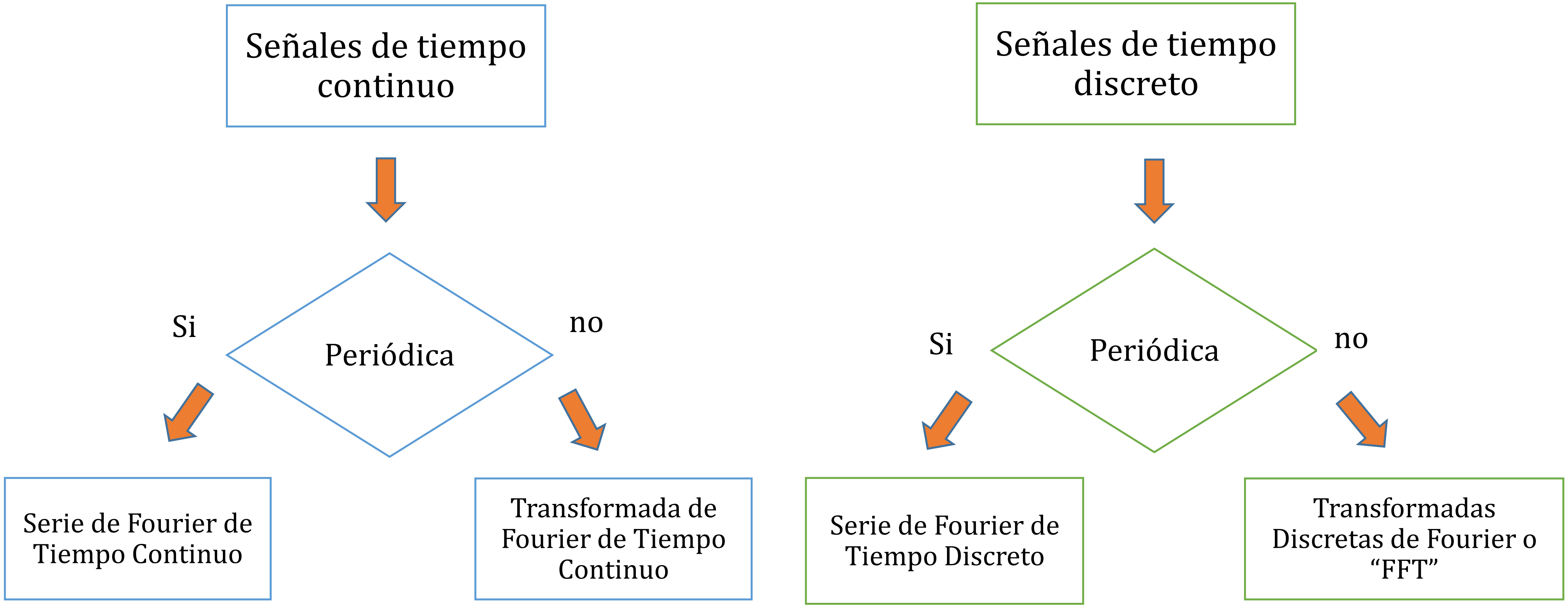
Ingeniería en Computación

UNIDAD 5

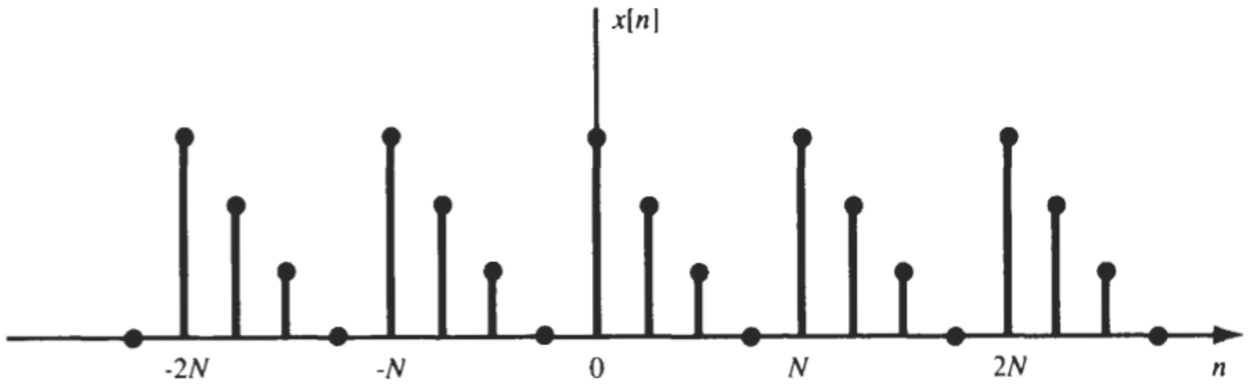
ANÁLISIS ESPECTRAL DE SEÑALES PERIÓDICAS DE TIEMPO DISCRETO

SERIE DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO

SERIE DE FOURIER DE TIEMPO DISCRETO



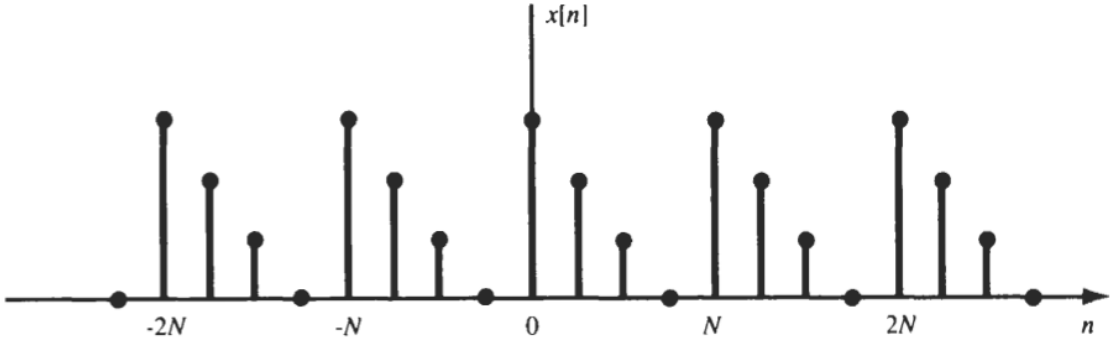
Una señal de tiempo discreto puede ser descompuesta en serie de Fourier siempre y cuando sea periódica



Donde la condición para determinar si la señal es periódica estaba dada por:

$$x[n] = x[n + N]$$

Donde "N" es un valor entero positivo que cumple la anterior condición. Si "N", además es el entero positivo más chico, se denomina periodo fundamental "N_0"



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

Una señal discreta periódica, con periodo fundamental N_0 puede ser representada por la Serie de Fourier de Tiempo Discreto (SFTD) mediante las siguientes expresiones:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k \, e^{jk\Omega_0 n} \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

Ecuación de síntesis

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] \, e^{-jk\Omega_0 n}$$

Ecuación de Análisis

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k \, e^{jk\Omega_0 n} \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] \, e^{-jk\Omega_0 n}$$

$$c_0 = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x[n]$$

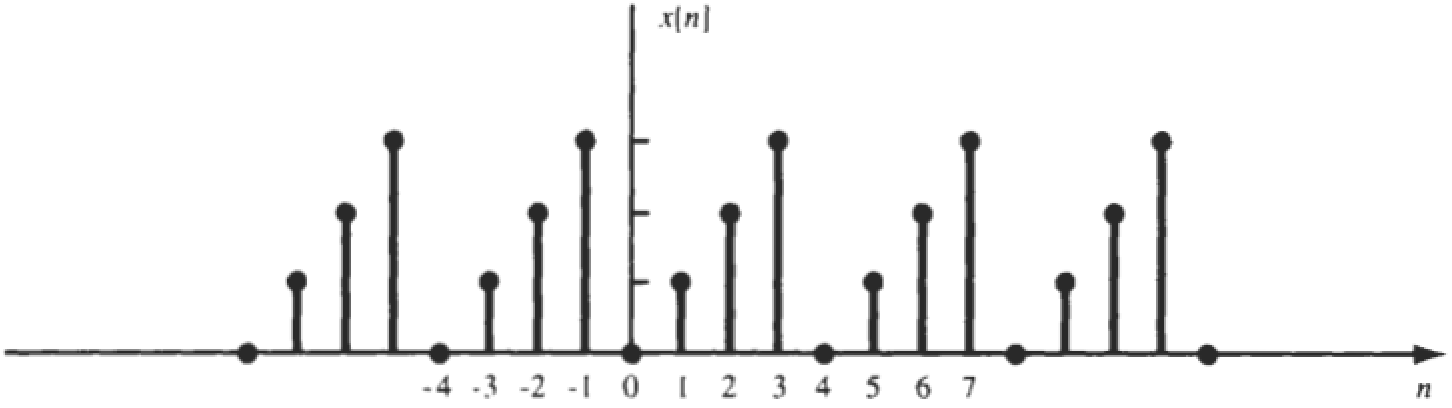
Los coeficientes C_k de la SFTD representan el mismo concepto físico que en la serie para señales continuas.

Se los conoce como Coeficientes Espectrales y **representan la energía de la señal en dicha frecuencia.**

El espectro graficado mediante los Coeficientes Espectrales **es periódico**.

Ejemplo Serie de Fourier de Tiempo Discreto

Calcular los coeficientes de la SFTD de la siguiente señal:



$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]\, e^{-jk\Omega_0 n}$$

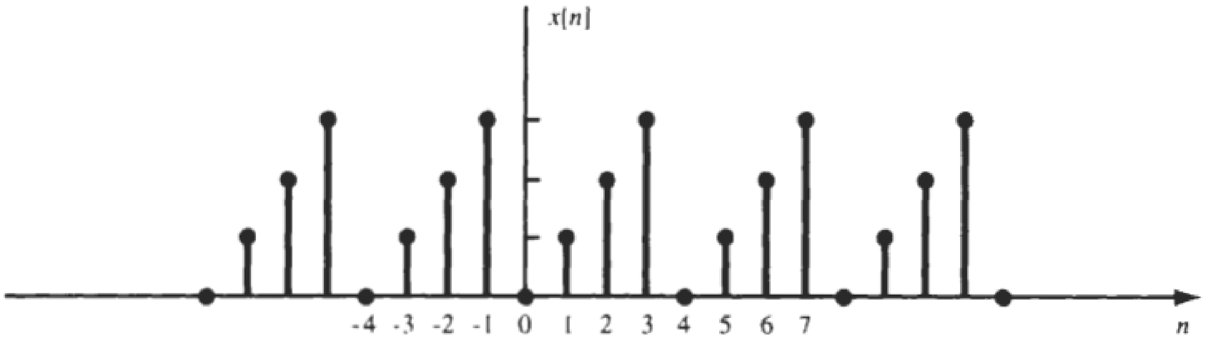
$$c_0 = \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x[n]$$

La señal se observa periódica y con un periodo fundamental N=4 por lo que:

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{4}$$

$$e^{-j\Omega_0} = e^{-j2\pi/4} = e^{-j\pi/2} = -j$$

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]\, e^{-jk\Omega_0 n}$$



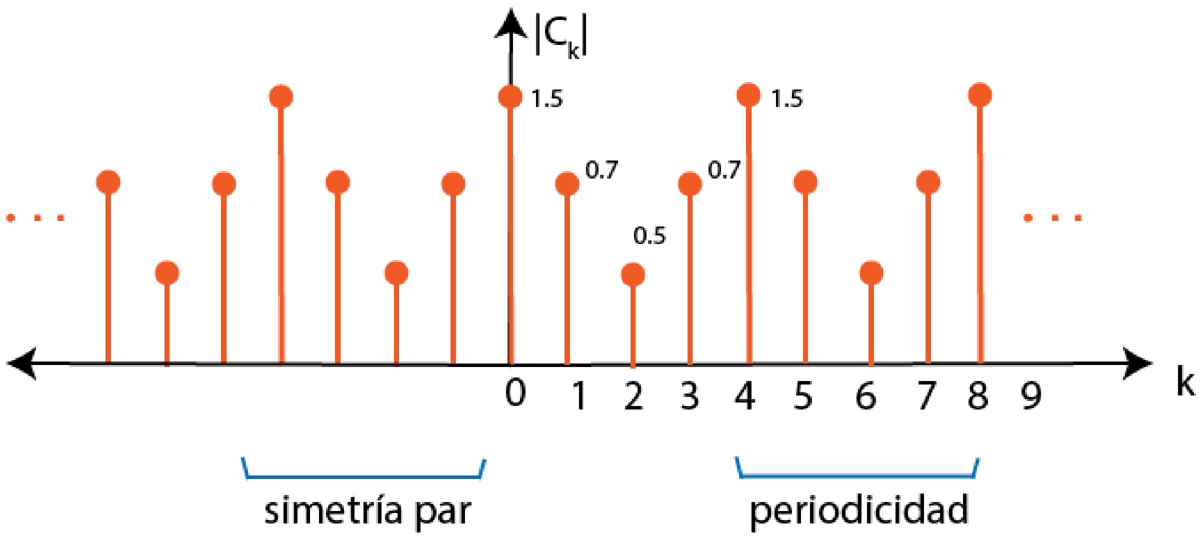
$$C_0 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{n=3} x[n] = \frac{1}{4}(0+1+2+3) = \frac{3}{2}$$

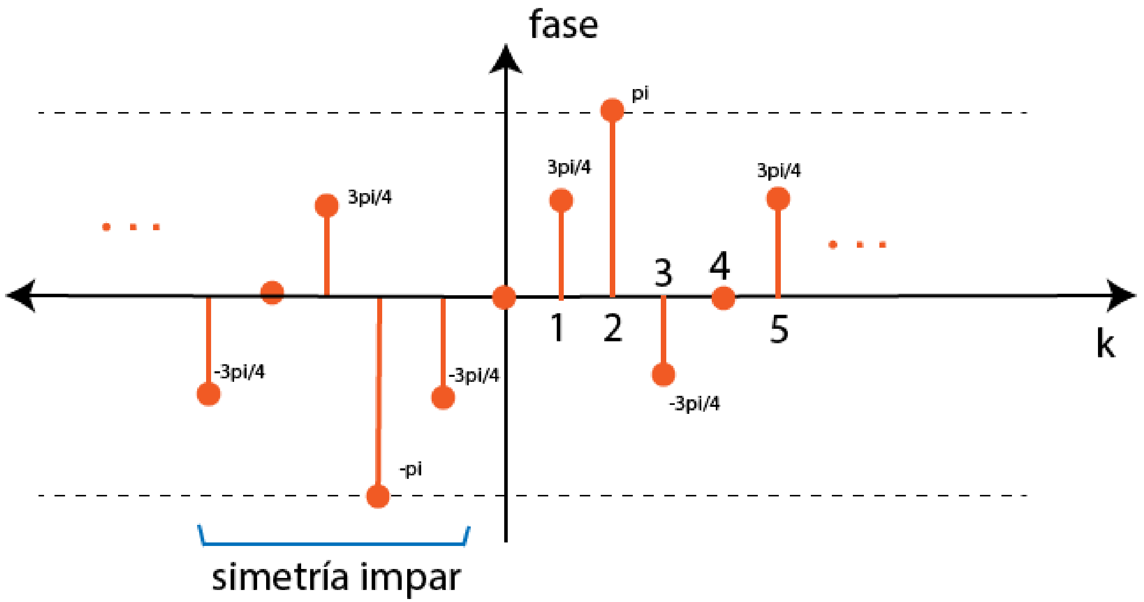
$$C_1 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{n=3} x[n]e^{-j\frac{\pi}{2}n} = \frac{1}{4}(0-j-2+3j) = -\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}$$

$$C_2 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{n=3} x[n]e^{-j\pi n} = \frac{1}{4}(0-1+2-3) = -\frac{1}{2}$$

$$C_3 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{n=3} x[n]e^{-j\frac{3\pi}{2}n} = \frac{1}{4}(0+j-2-3j) = -\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}$$

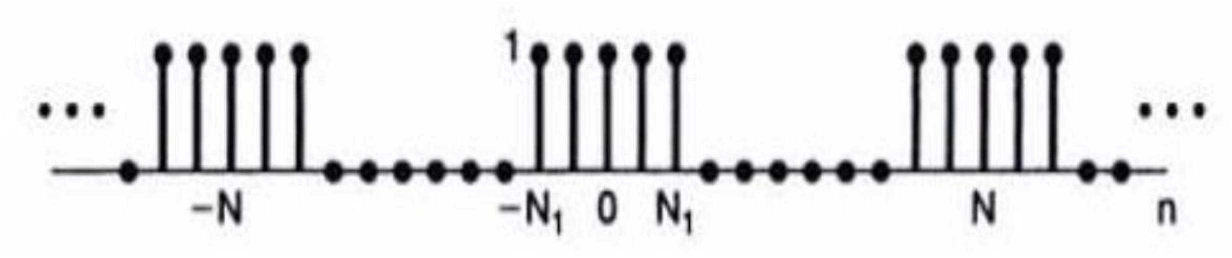
Graficas de módulo y fase de los coeficientes:





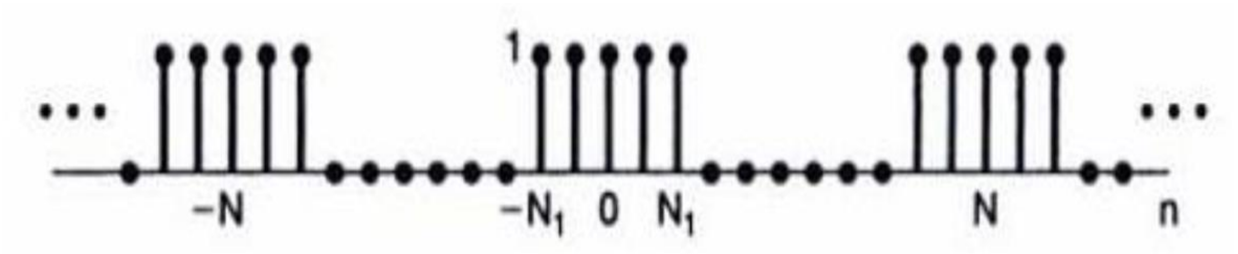
Ejemplo onda cuadrada periódica:

Suponga una señal cuadrada de periodo “N”. Obtenga los coeficientes de la SFTD y grafique su espectro:



$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N}\frac{e^{jk(2\pi/N)N_1} - e^{-jk(2\pi/N)(N_1+1)}}{1-e^{-jk(2\pi/N)}}$$

Donde se utilizó la relación: $\displaystyle\sum_{k=No}^{N2} \alpha^k = \frac{\alpha^{No} - \alpha^{N2+1}}{1-\alpha}$

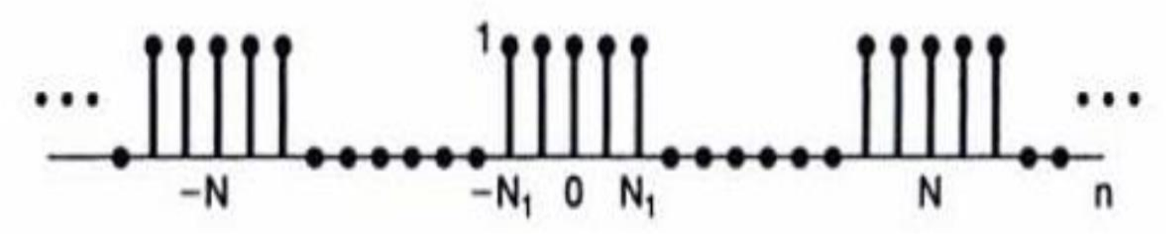


$$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N}\frac{e^{jk(2\pi/N)N_1}-e^{-jk(2\pi/N)(N_1+1)}}{1-e^{-jk(2\pi/N)}}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\frac{e^{jk(2\pi/N)N_1}-e^{-jk(2\pi/N)(N_1+1)}}{1-e^{-jk(2\pi/N)}}\,\frac{e^{j\frac{1}{2}k(2\pi/N)}}{e^{j\frac{1}{2}k(2\pi/N)}} = \frac{1}{N}\frac{e^{jk(2\pi/N)(N_1+\frac{1}{2})}-e^{-jk(2\pi/N)(N_1+\frac{1}{2})}}{e^{jk\frac{1}{2}(2\pi/N)}-e^{-jk\frac{1}{2}(2\pi/N)}}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\frac{e^{jk(2\pi/N)(N_1+\frac{1}{2})}-e^{-jk(2\pi/N)(N_1+\frac{1}{2})}}{e^{jk\frac{1}{2}(2\pi/N)}-e^{-jk\frac{1}{2}(2\pi/N)}} = \frac{1}{N}\frac{sen\left[k(2\pi/N)(N_1+\frac{1}{2})\right]}{sen\left(k\pi/N\right)}$$

$$\frac{1}{N}\,\frac{sen\left[k(2\pi/N)(N_1+\frac{1}{2})\right]}{sen\left(k\pi/N\right)}$$



N=10

N=20

Propiedad de Periodicidad:

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n]\, e^{-jk\Omega_0 n}$$

Quizá la principal diferencia del espectro de señales discretas respecto al espectro de señales continuas radica en que en el caso discreto, **el espectro es periódico.**

$$\boxed{c_{k+N_0} = c_k}$$

Esta condición de periodicidad espectral ocurre debido al muestreo (tren de impulsos) y por lo tanto, es común en todos los espectros de señales periódicas.

Propiedad de Simetría:

Cuando la señal $x[n]$ es real, sus coeficientes cumplen la siguiente condición:

$$\begin{cases} C_k = C^*_{-k} \\ Re\{C_k\} = Re\{C_{-k}\} \\ Im\{C_k\} = -Im\{C_{-k}\} \\ |C_k| = |C_{-k}| \\ C_k = C_{k+N} \end{cases}$$

$$c_0 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n] = \frac{1}{4}(0+1+2+3) = \frac{3}{2}$$

$$c_1 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n](-j)^n = \frac{1}{4}(0-j1-2+j3) = -\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}$$

$$c_2 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n](-j)^{2n} = \frac{1}{4}(0-1+2-3) = -\frac{1}{2}$$

$$c_3 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n](-j)^{3n} = \frac{1}{4}(0+j1-2-j3) = -\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}$$

Propiedad de Corrimiento en el tiempo:

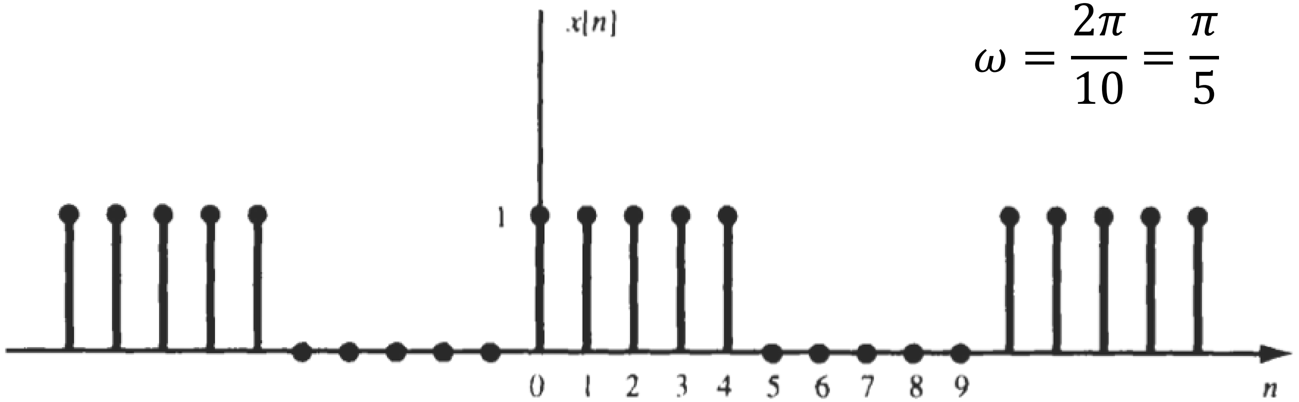
Al igual que en los casos anteriores, corrimientos en el tiempo implican aportes de fase en la frecuencia.

$$\boxed{x[n-n_0] \leftrightarrow C_k e^{-jk\left(2\pi/_N\right)n_0}}$$

Veamos con un ejemplo:

$$N = 10$$

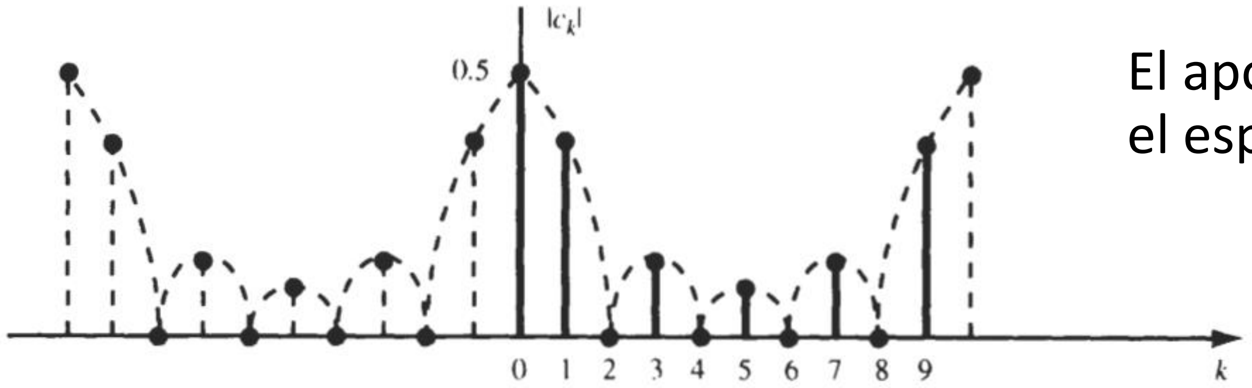
$$\omega = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$$



$$c_k = \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{4} e^{-jk(\pi/5)n} = \frac{1}{10}\,\frac{1-e^{-jk\pi}}{1-e^{-jk(\pi/5)}}$$

$$= \frac{1}{10}\,\frac{e^{-jk\pi/2}\left(e^{jk\pi/2}-e^{-jk\pi/2}\right)}{e^{-jk\pi/10}\left(e^{jk\pi/10}-e^{-jk\pi/10}\right)}$$

$$= \frac{1}{10} e^{-jk(2\pi/5)} \frac{\sin(k\pi/2)}{\sin(k\pi/10)}$$



El aporte de fase no modifica el espectro de módulo.

TEOREMA DE PARSEVAL

Nuevamente, y al igual que en las otras técnicas de análisis espectral, la potencia en el tiempo y en la frecuencia se deben mantener iguales, por lo que:

$$\frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} |c_k|^2$$