

SEÑALES Y SISTEMAS

UNIDAD 5

ANÁLISIS ESPECTRAL DE SEÑALES PERIÓDICAS DE TIEMPO DISCRETO

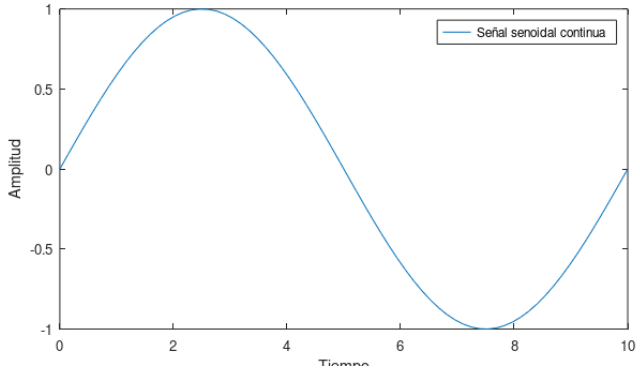
MUESTREO

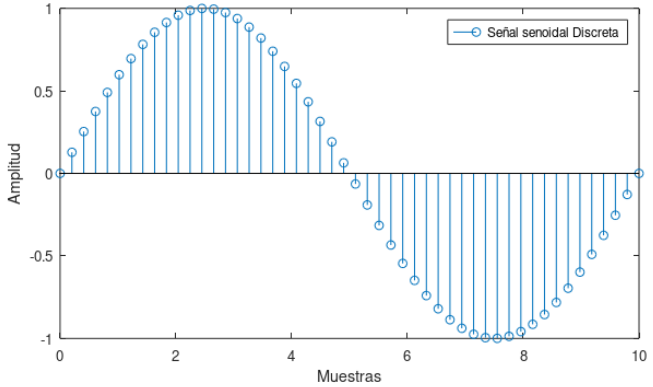


MUESTREO DE SEÑALES

Antes de trabajar con las herramientas de tiempo discreto, hay que conocer como se discretiza una señal continua

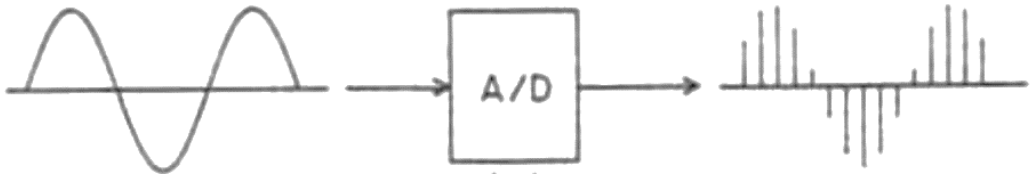
$x(t)$ → MUESTREO → $y[n]$

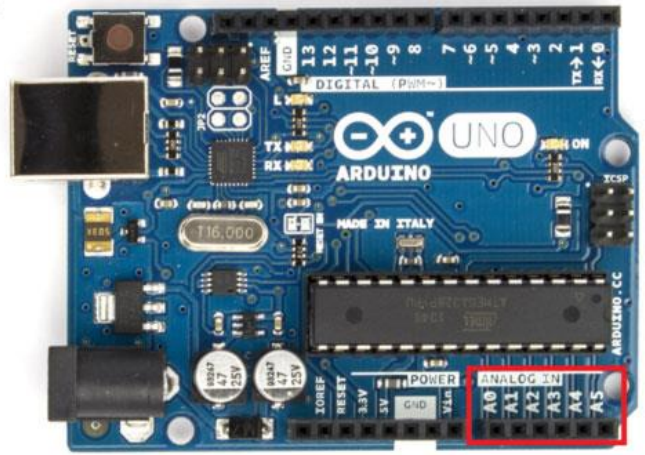






En la práctica, el proceso de muestreo, independientemente del método utilizado, se lo resume como “conversión Analógica-Digital” y se conoce como “Conversor A/D”.





¡Este proceso permite que sistemas digitales puedan trabajar con señales analógicas!

Tener en cuenta que un conversor A/D posee más procesos que solamente el muestreo.



Muestreo por tren de impulsos

Una señal muestreada puede ser resultado del producto de una señal analógica por un tren de impulsos con periodo “T”:

$$x_m(t) = x(t)\,p(t)$$

Donde: $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$

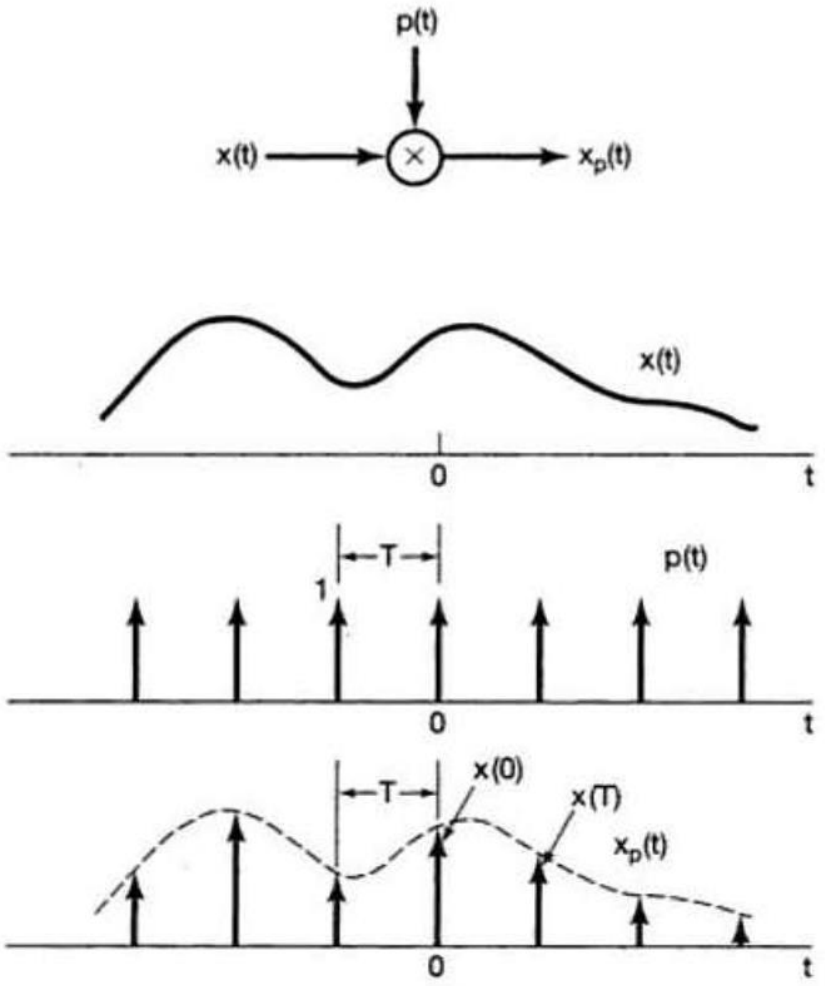
Es decir, la señal $x_m(t)$ es un tren de impulsos cuya amplitud de cada pulso es una “muestra” de la señal $\mathrm{x}(t)$ espaciados un tiempo “T”.

$$x_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

Donde se usó la propiedad de muestreo del impulso: $f(t)\delta(t - T) = f(T)$

Muestreo por tren de impulsos

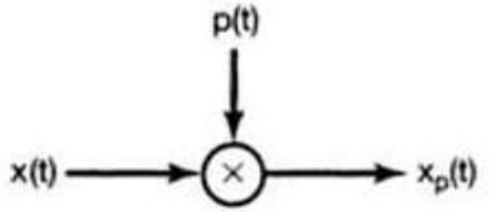






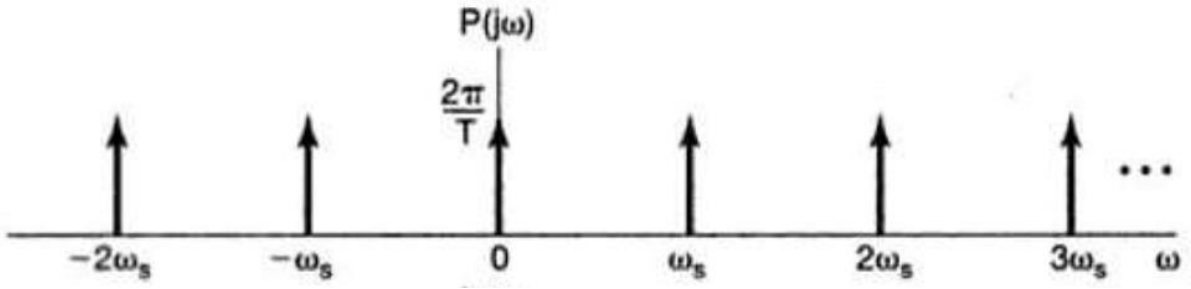
Analizando lo anterior, pero desde el punto de vista de la frecuencia, y recordando la propiedad de producto de la Transformada de Fourier de Tiempo Continuo:

$$X_m(j\omega) = \frac{1}{2\pi}[X(j\omega) * P(j\omega)]$$



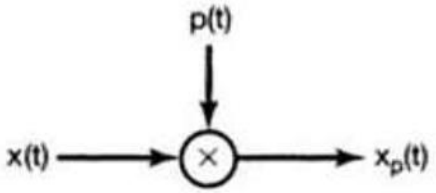
Donde $P(j\omega)$ es la TFTC de un tren de impulsos, la cual es también un tren de impulsos.

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\omega_s)$$

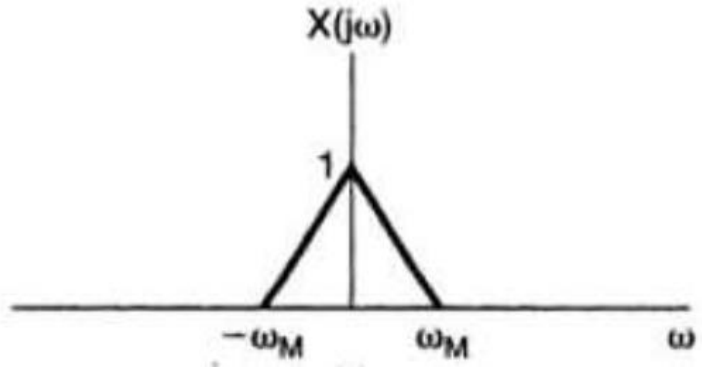




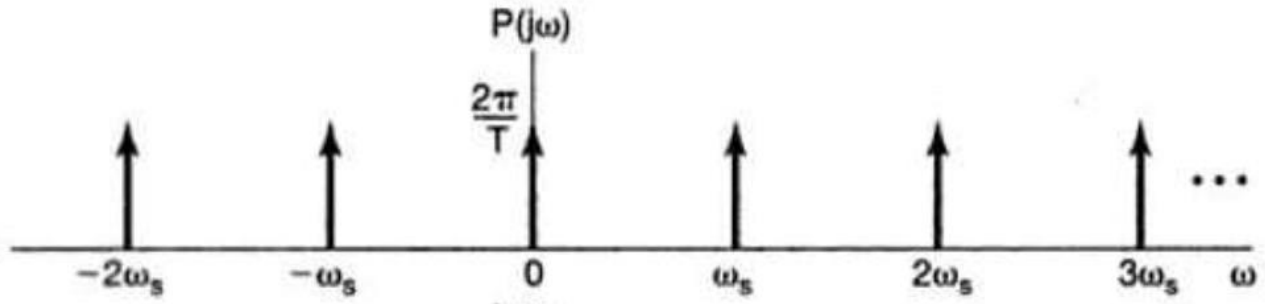
Entonces, y recordando que la convolución de una señal con un impulso desplazado nos da la misma señal, desplazada, tenemos:



$$X(j\omega) * \delta(\omega - \omega_0) = X[j(\omega - \omega_0]$$

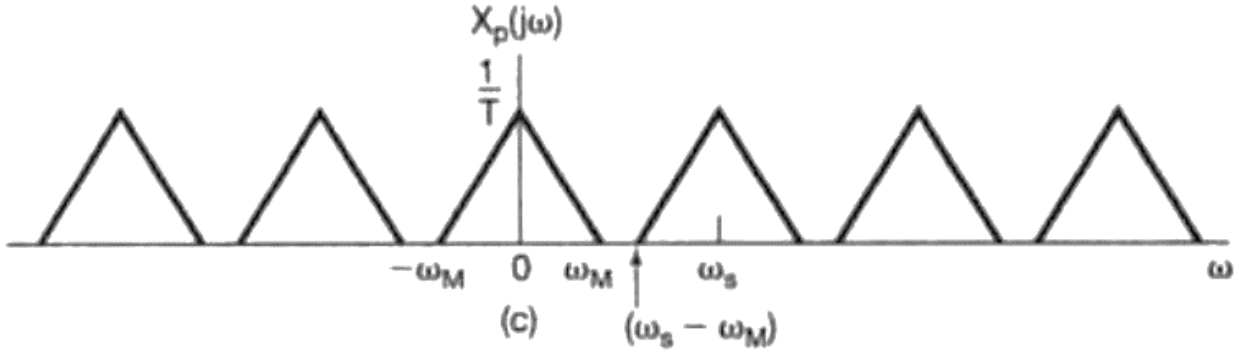


¿Cómo es el resultado de la convolución de ambos espectros?



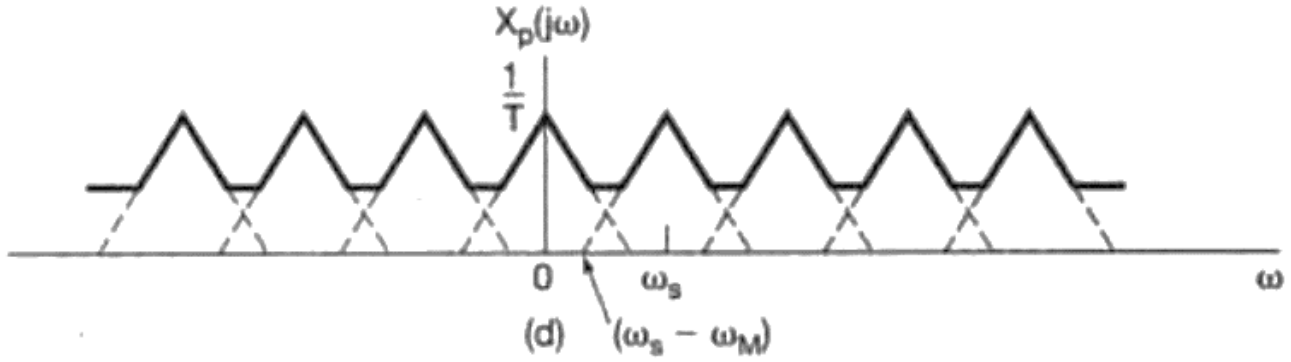


Teniendo en cuenta el ancho de banda de señal x(t), podemos tener dos situaciones como resultado del muestreo:



$$\omega_s - \omega_m > \omega_m$$

$$Frecuencia\ de\ muestreo:\ \omega_S = \frac{2\pi}{T}$$

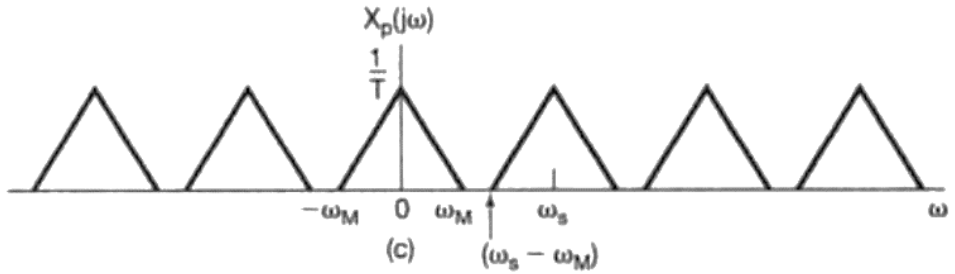


$$\omega_s - \omega_m < \omega_m$$



TEOREMA DE MUESTREO

Permite definir la frecuencia de muestreo óptima para muestrear una señal correctamente.



$$\omega_s - \omega_m > \omega_m$$

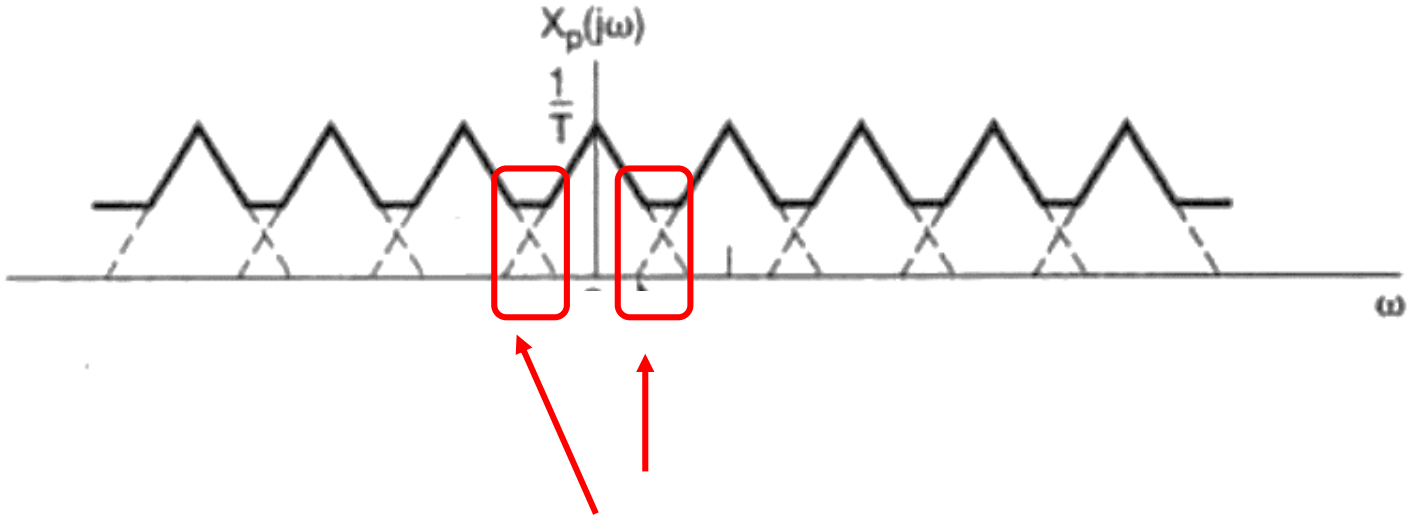
$$\omega_s > 2\omega_{max}$$

La frecuencia de muestreo debe ser, como mínimo, el doble de la frecuencia máxima de la señal a muestrear. Esto evitará el solapamiento de espectros y la señal será correctamente muestreada.



TEOREMA DE MUESTREO

El valor $2\omega_{max}$ se conoce como “Frecuencia de Nyquist” y no respetarlo lleva a solapar los espectros de la señal muestreada, haciendo imposible su posterior recuperación en el proceso de conversión digital-analógico.

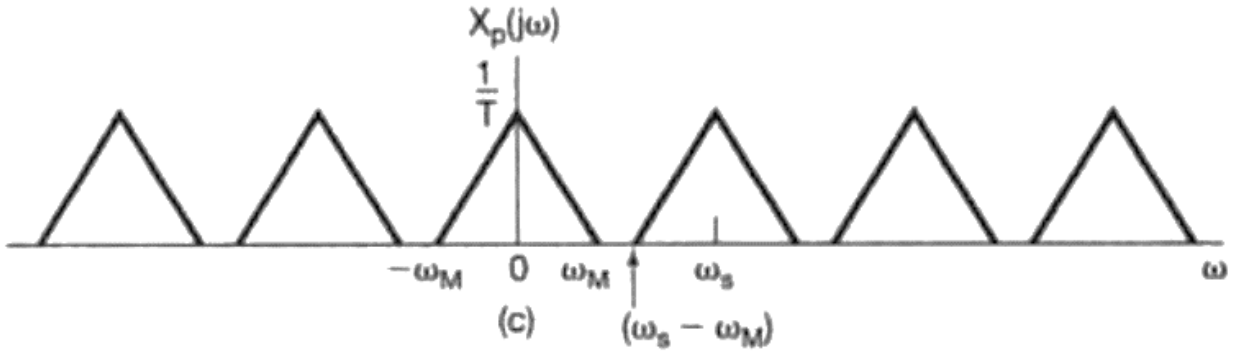


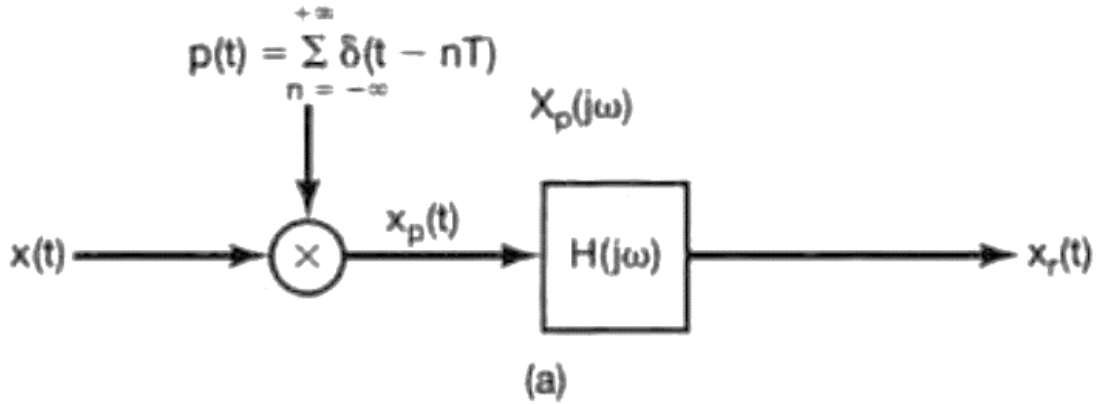
Solapamientos de espectros por no respetar la frecuencia de Nyquist



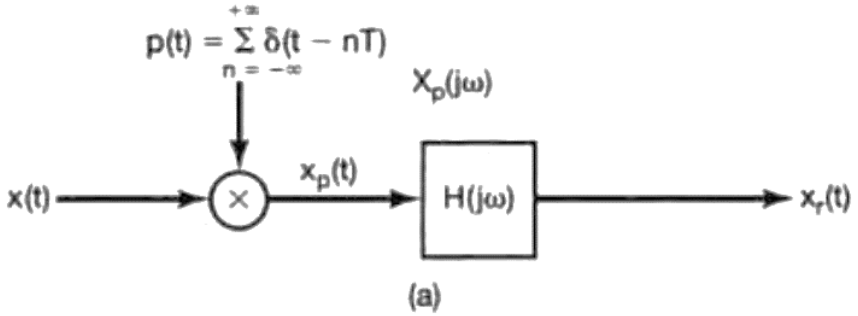
Recuperación de una señal muestreada:

¿Cómo recuperar una señal muestreada?

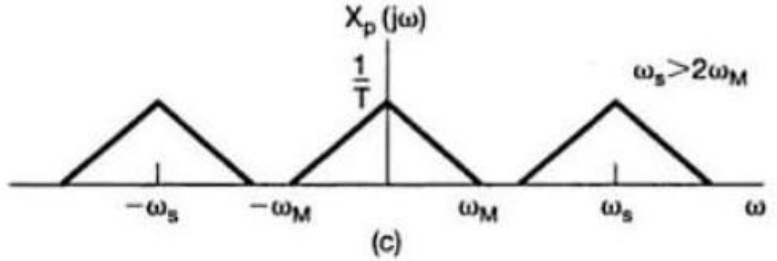


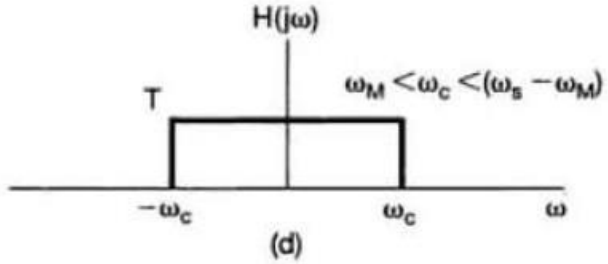


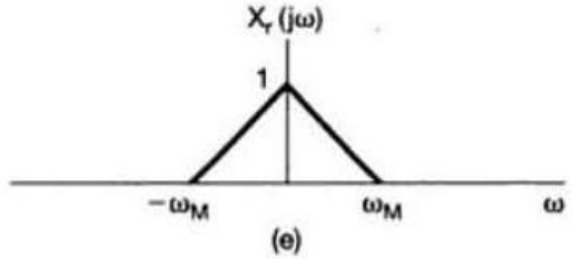




Debido a que en el muestreo el espectro de la señal se vuelve periódico (con periodo “T”), para recuperar la señal nuevamente debemos quedarnos solamente con el espectro original, y descartar las réplicas.



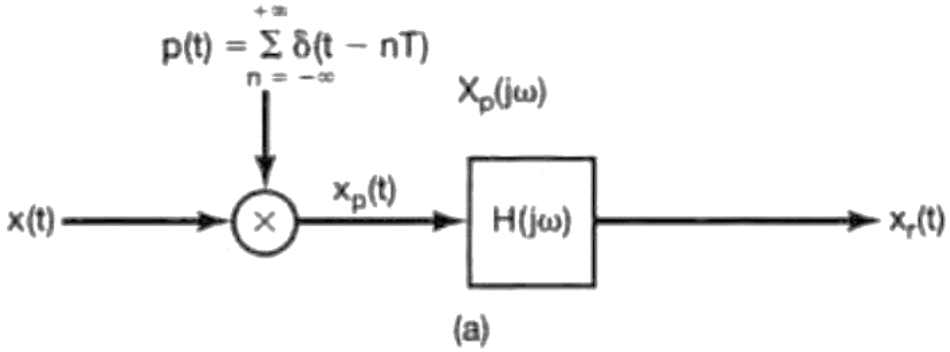


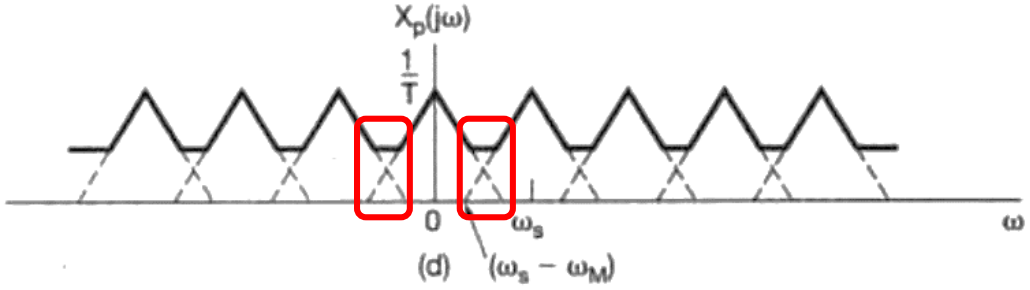




Efecto de Aliasing:

El Aliasing es un efecto que se manifiesta cuando no hemos limitado en banda la señal a muestrear, o bien, cuando no pudimos cumplir el teorema de muestreo (frecuencia de Nyquist)

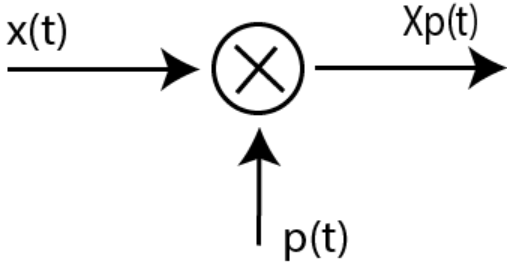


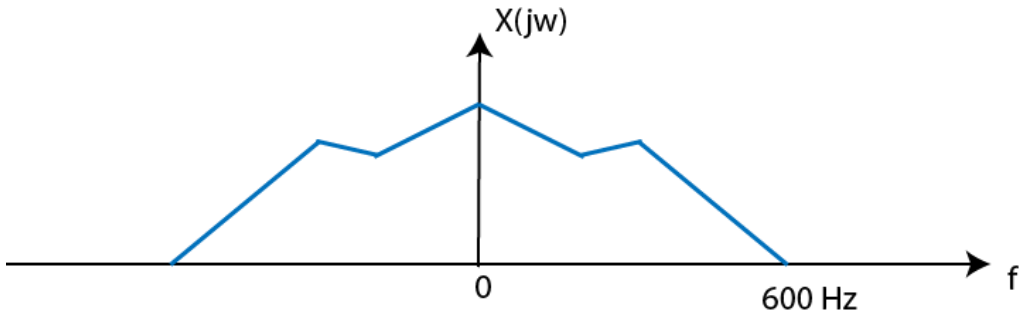




Ejemplo de Aliasing:

Supongamos una señal con frecuencia máxima (Fm) en torno a los 600 Hz, que debe ingresar a un sistema de muestreo como el de la figura, que toma muestras a una frecuencia de muestreo (FS) de 800Hz.





Responda:

a) ¿Ocurre o no ocurre aliasing?

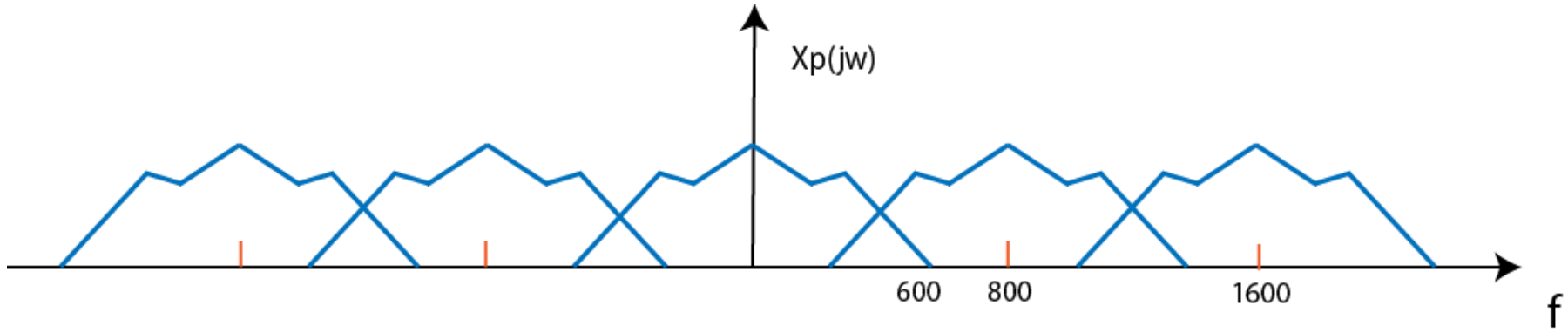
b) Grafique el espectro de la señal muestreada Xp(t)

c) Si es que hay aliasing ¿Qué propone para evitarlo?

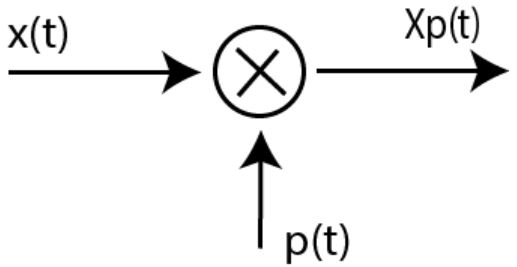


Ejemplo de Aliasing:

Al muestrear a una frecuencia de muestreo (FS) menor al doble de la frecuencia máxima de la señal, ocurre aliasing, y el espectro resultante de Xp(t) es:



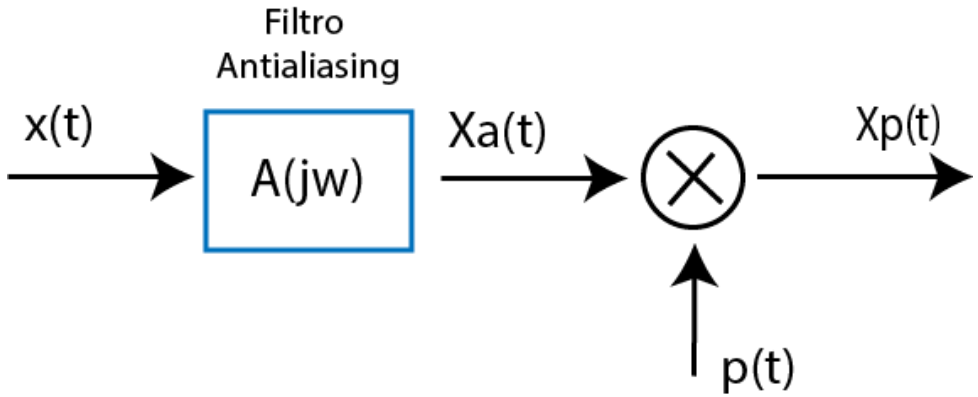
¿Qué propone para evitar el aliasing?

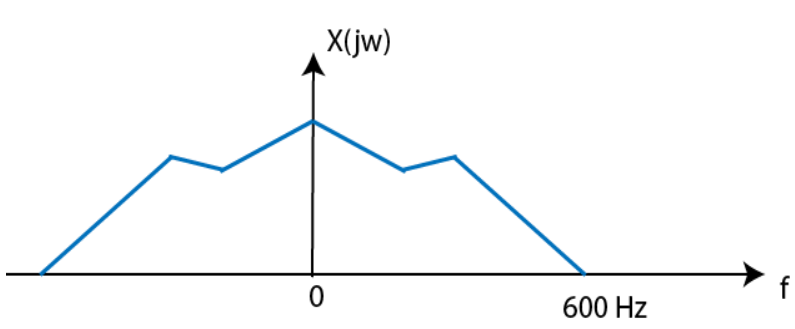


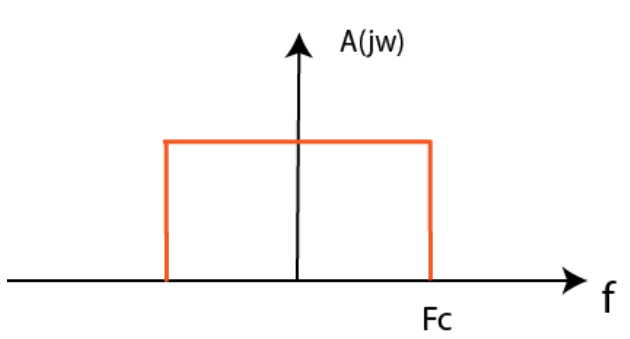


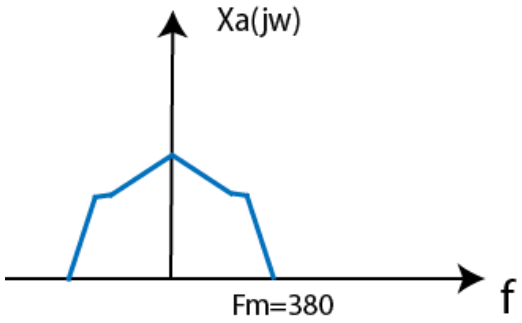
Ejemplo de Aliasing:

Para evitar el aliasing se utiliza un filtro pasa-bajos que limita en banda a la señal a muestrear. Este filtro recibe el nombre de “Filtro Antialiasing” y es obligatorio para todo proceso de muestreo.





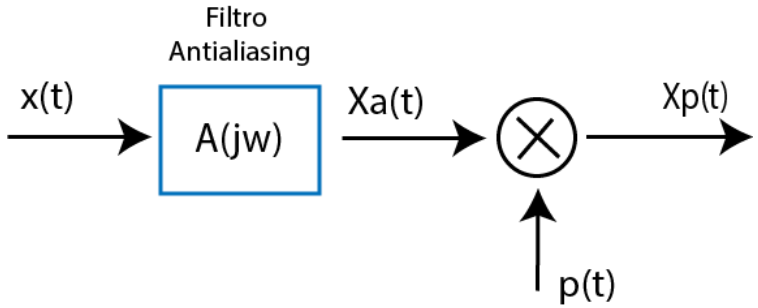


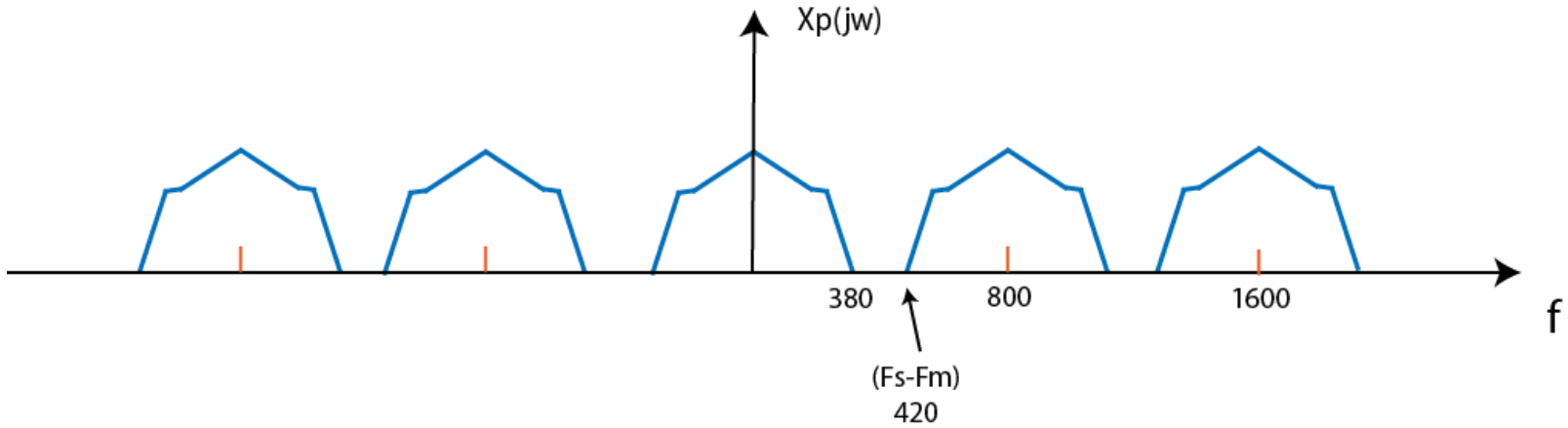




Ejemplo de Aliasing:

Este filtro debe tener una frecuencia de corte tal que evite el solapamiento:

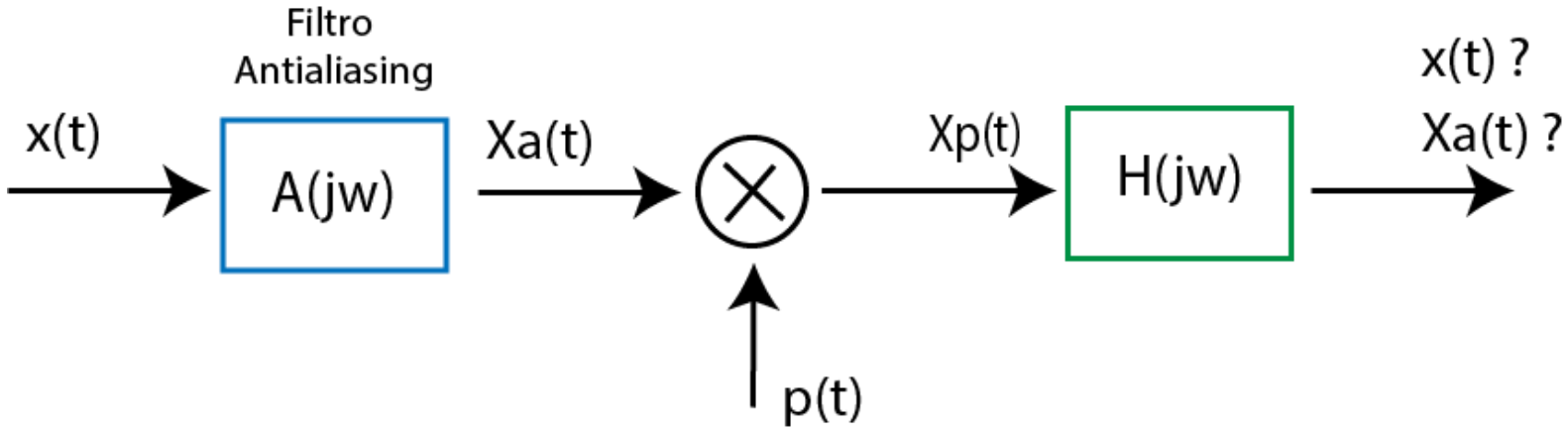






Ejemplo de Aliasing:

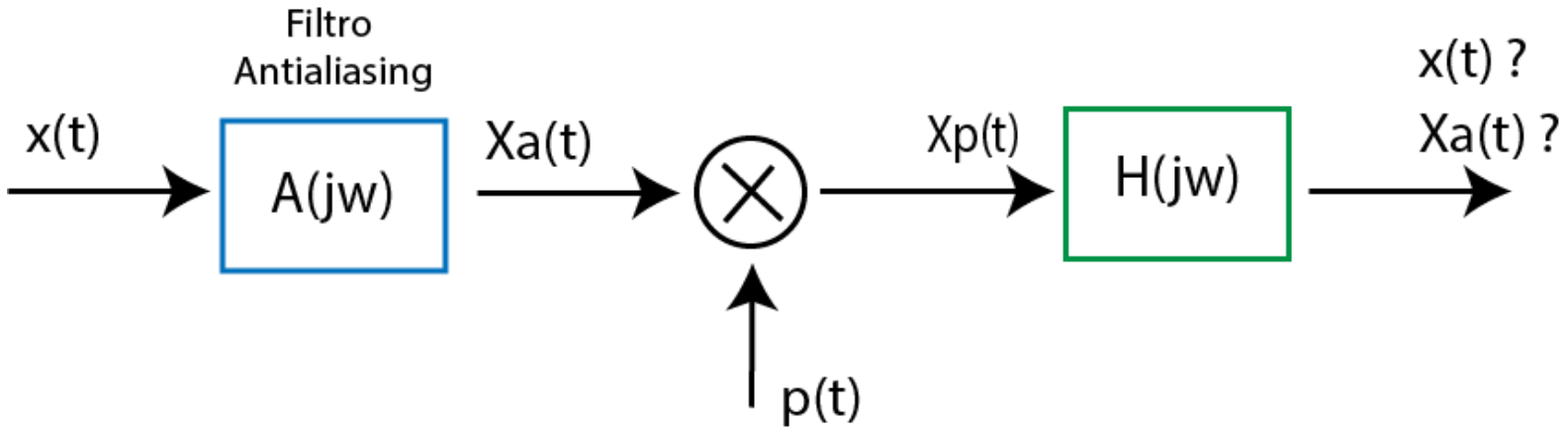
Finalmente, si deseamos recuperar la señal original, debemos eliminar las réplicas espectrales y quedarnos con el espectro original. Para eso usamos el filtro pasabajos H(jw) **con frecuencia de corte en Fs/2**





Ejemplo de Aliasing:

Finalmente, si deseamos recuperar la señal original, debemos eliminar las réplicas espectrales y quedarnos con el espectro original. Para eso usamos el filtro pasabajos H(jw) **con frecuencia de corte en Fs/2**

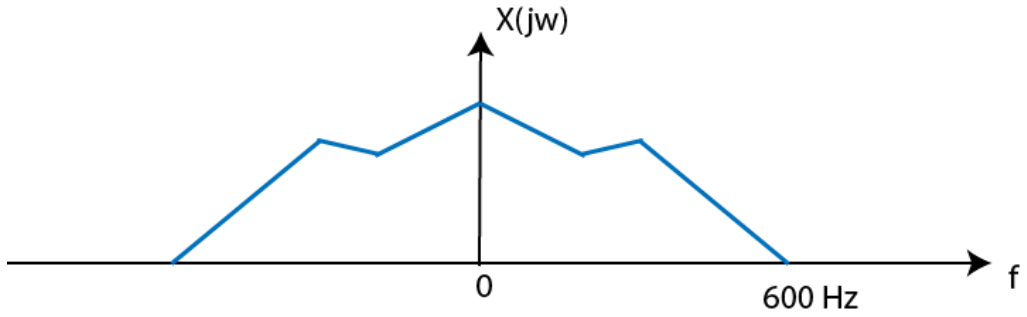


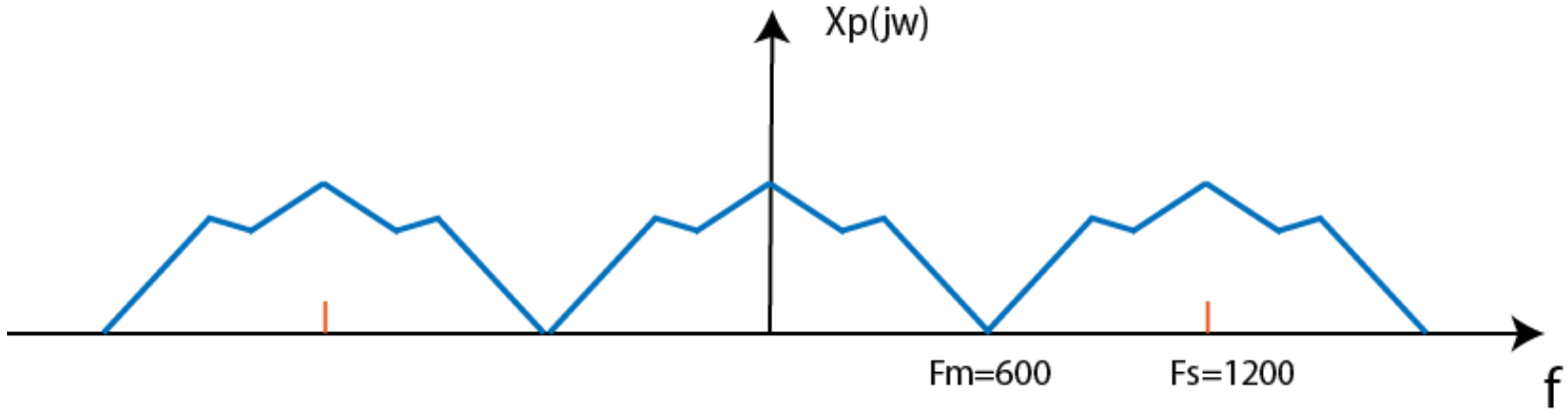
¿Qué deberíamos hacer si quisiéramos recuperar x(t), y no Xa(t)?



Ejemplo de Aliasing:

Solamente nos queda como alternativa aumentar la frecuencia de muestreo para cumplir el teorema de muestreo con una Fm=600Hz, es decir:

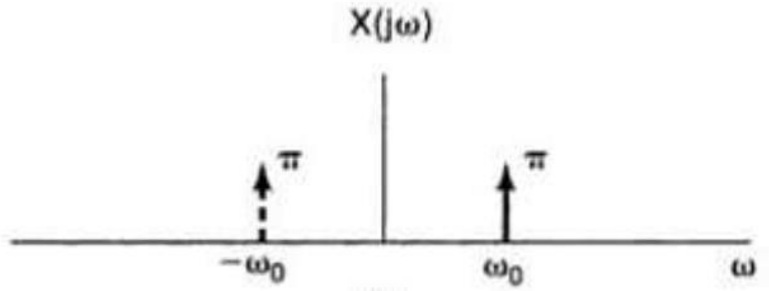




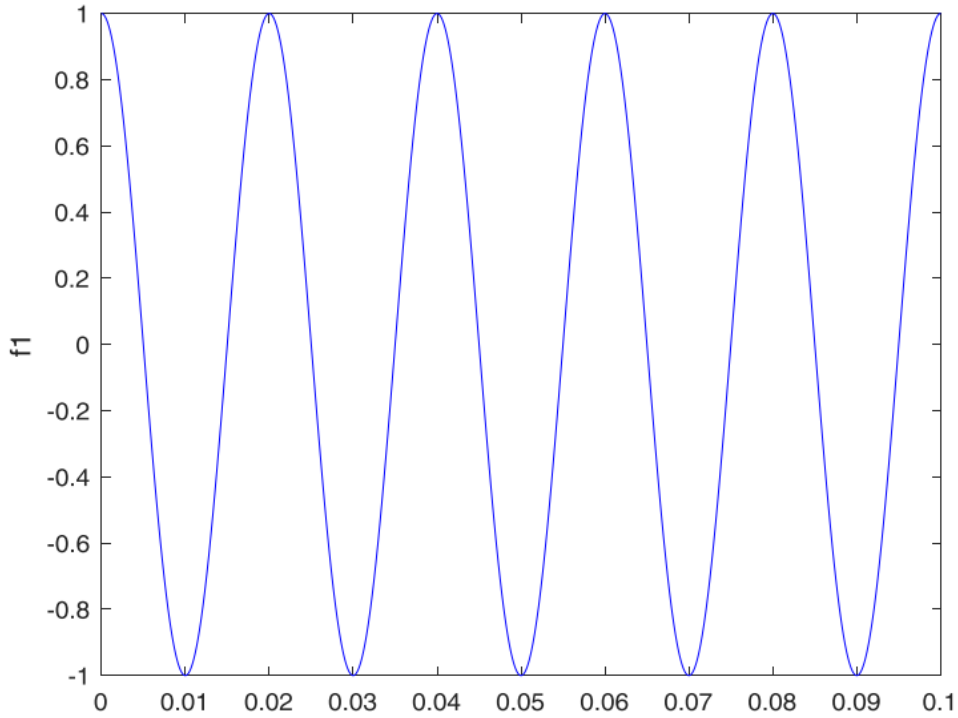


Ejemplo visual de Aliasing:

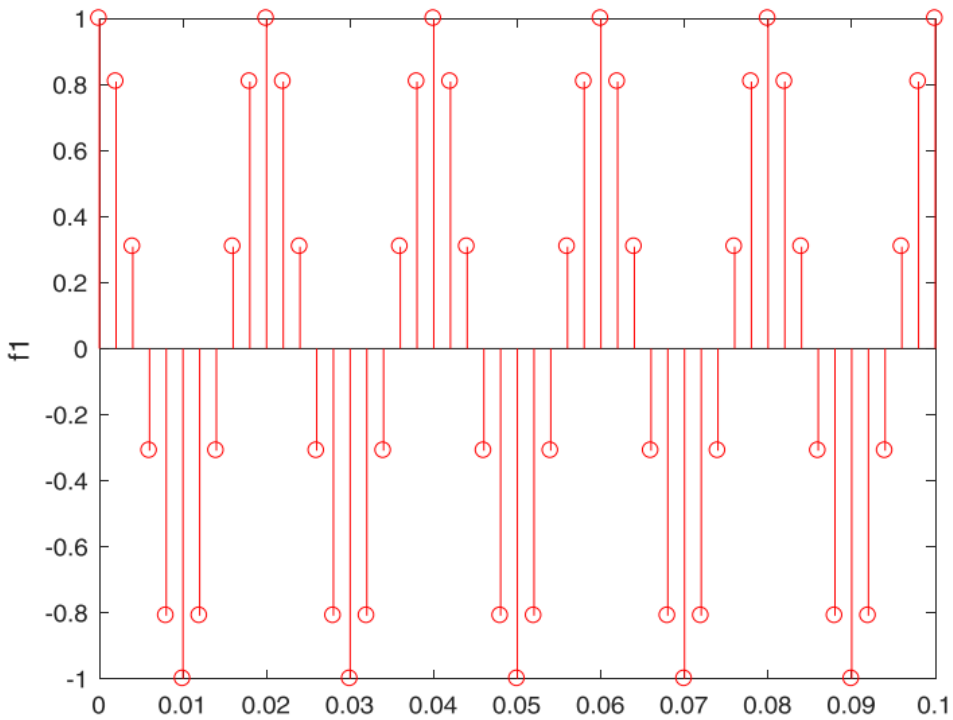
Suponga una señal senoidal de 50Hz muestreada a Fs=500Hz



Señal analógica original (50Hz)



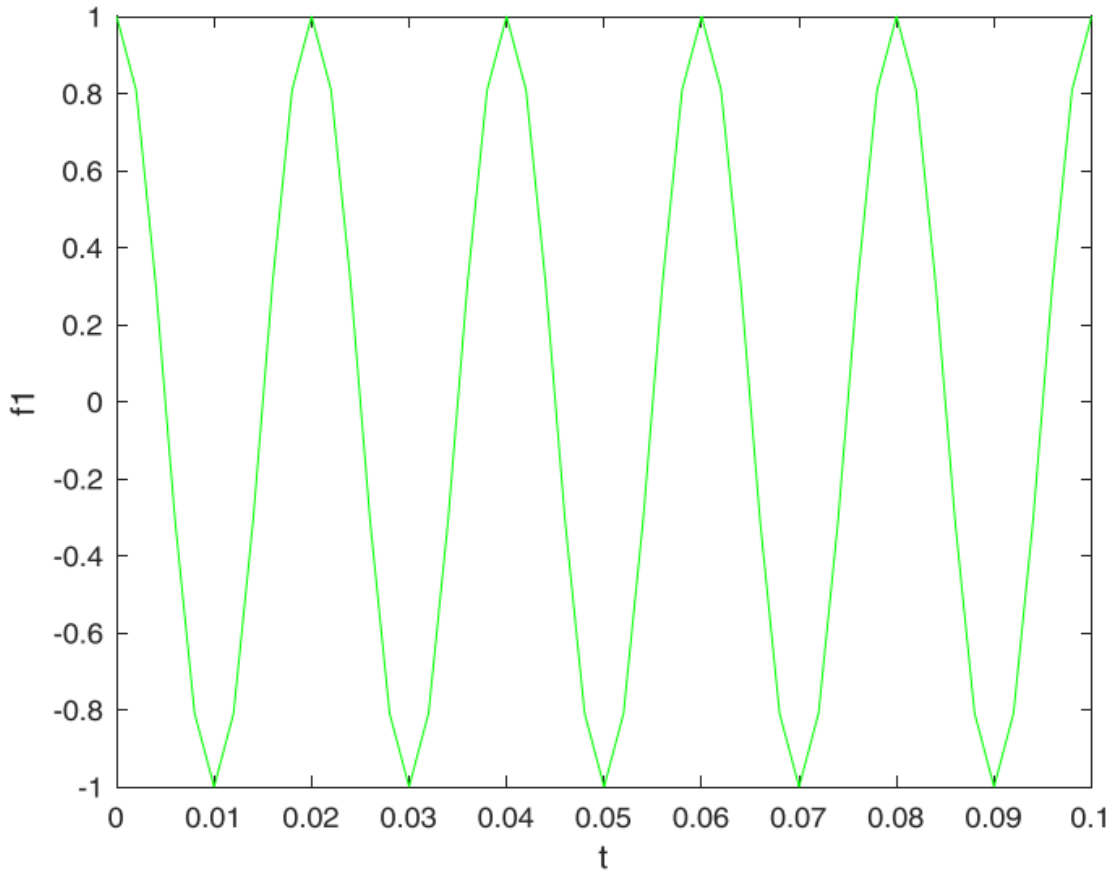
Señal muestreada a 500 muestras por seg.

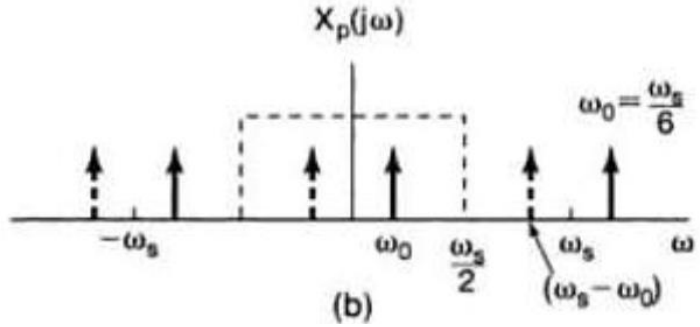




Ejemplo visual de Aliasing:

Si reconstruimos la señal (proceso conversión digital/analógico) tenemos:

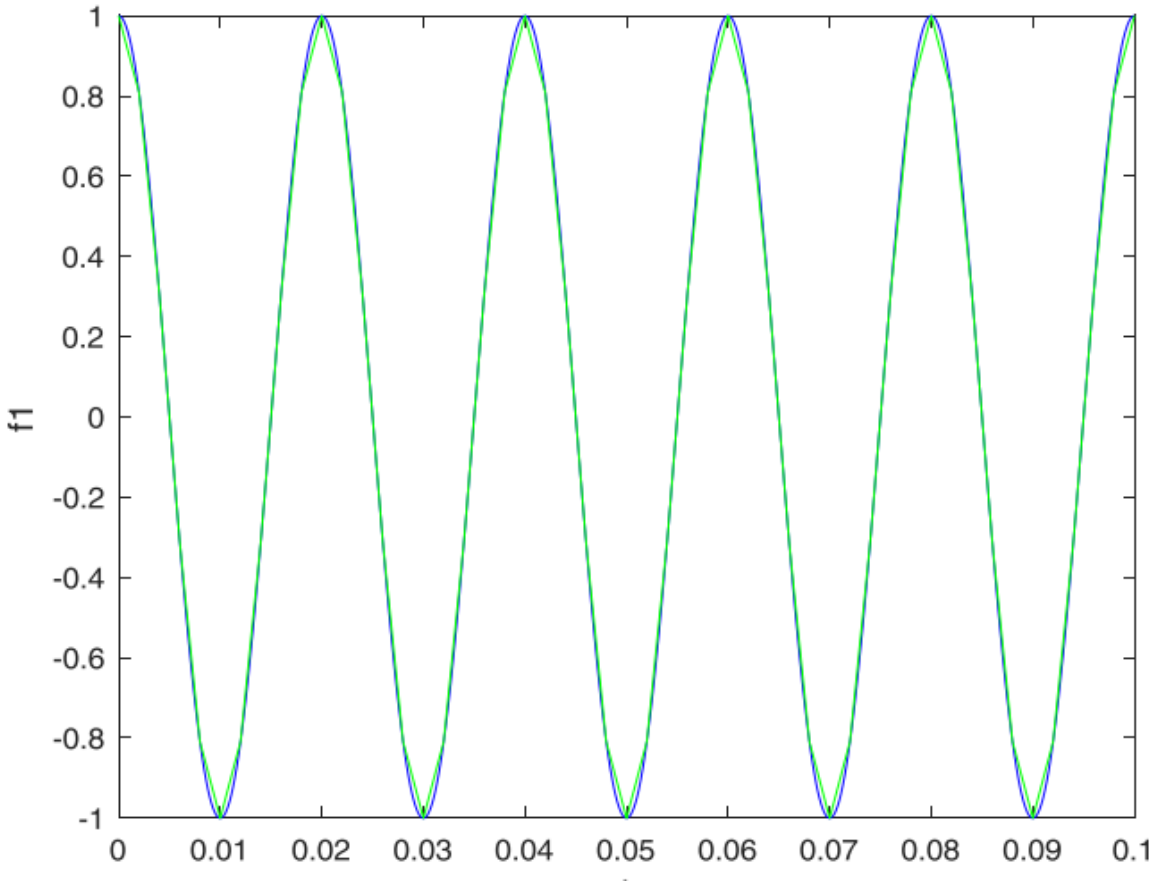


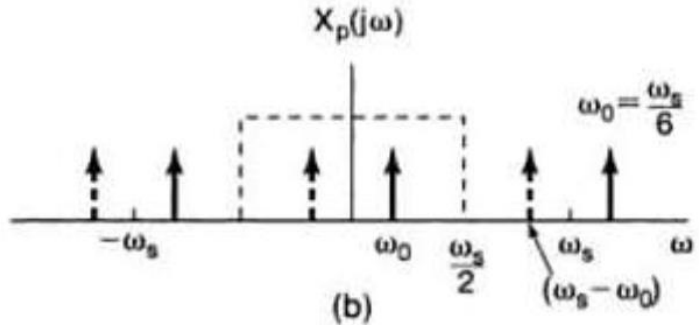




Ejemplo visual de Aliasing:

Superponiendo la señal original y la reconstruida:

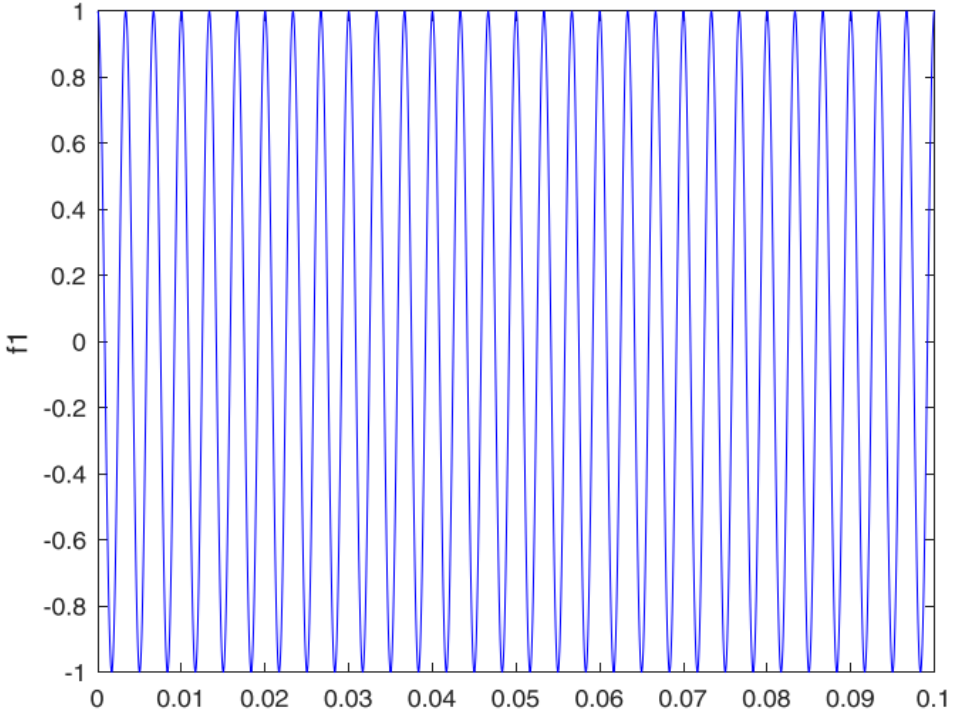


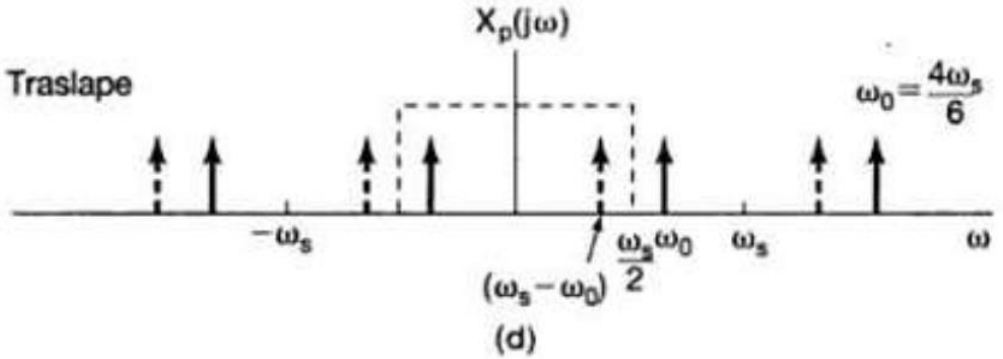




Ejemplo visual de Aliasing:

Supongamos ahora una señal de 300Hz muestreada a 500Hz.

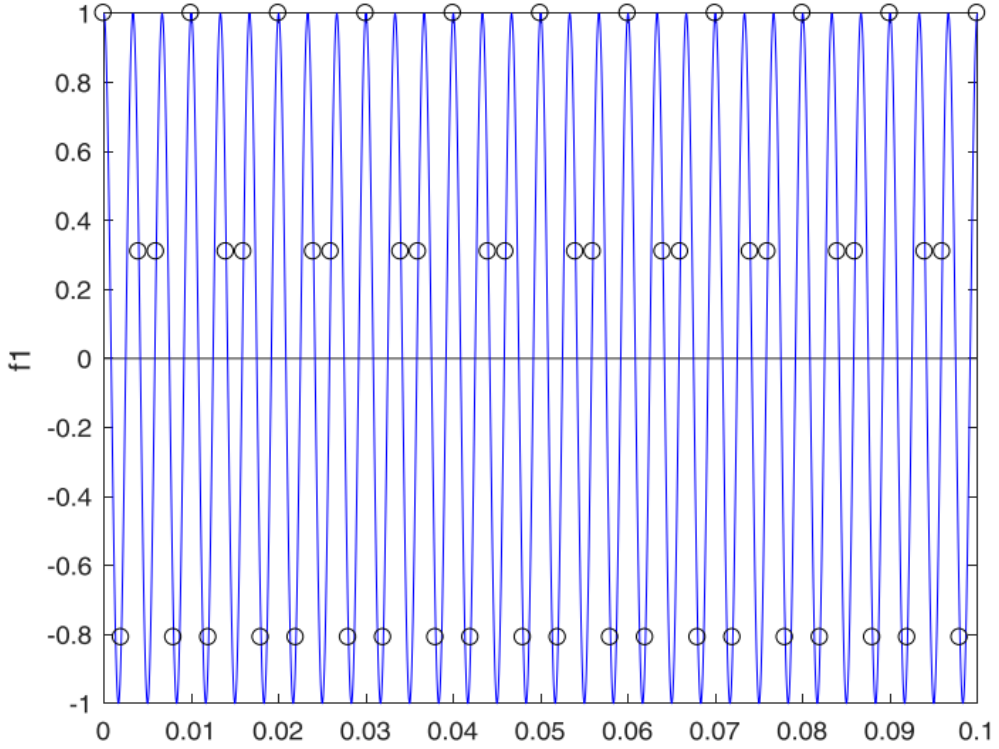


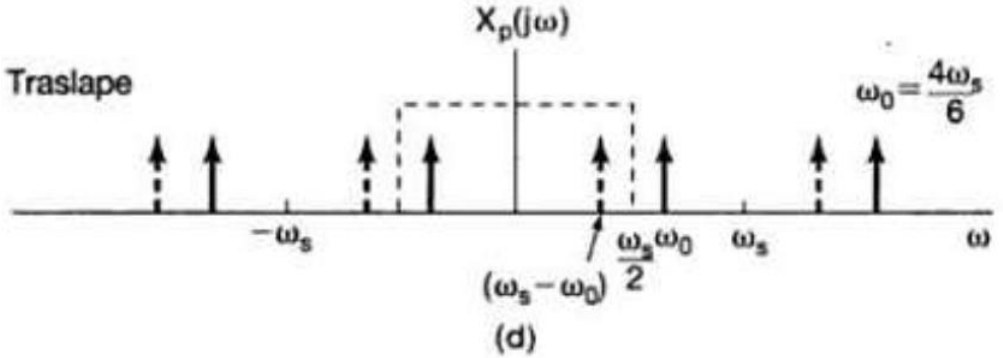




Ejemplo visual de Aliasing:

Señal muestreada:

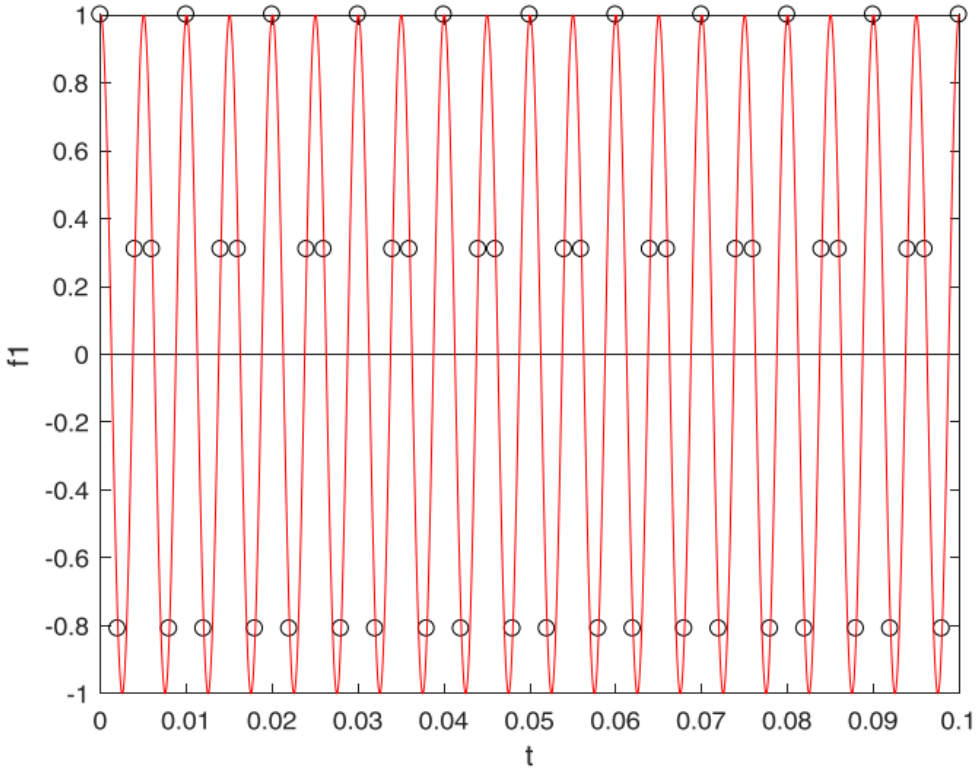


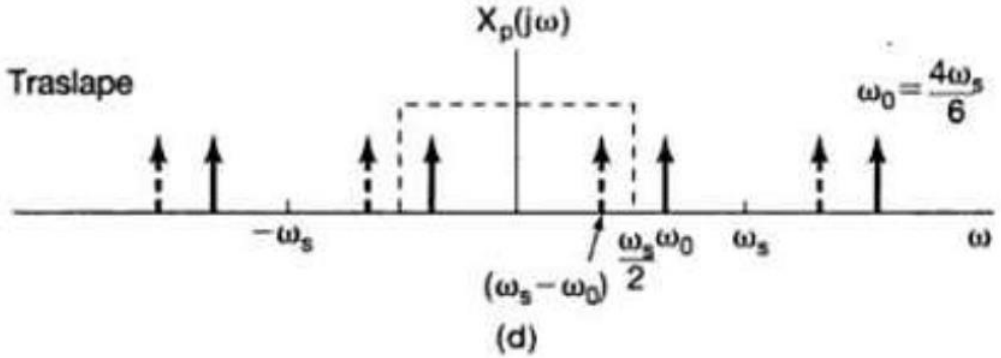




Ejemplo visual de Aliasing:

Señal reconstruida:

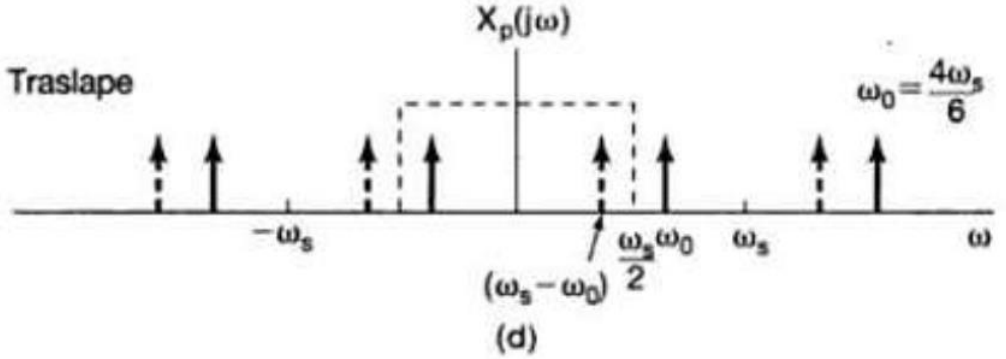


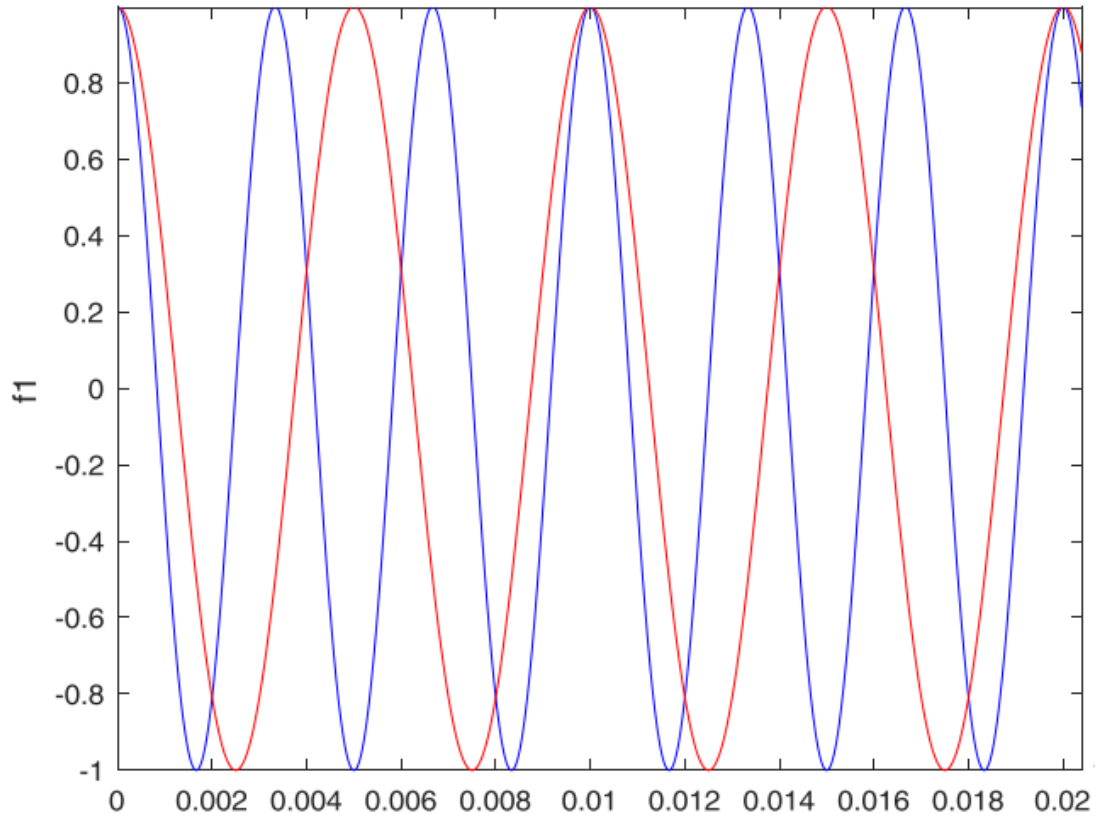




Ejemplo visual de Aliasing:

Comparando señal original con reconstruida:





¡La señal reconstruida es de 200 Hz!