IC323 COMUNICACIÓN DE DATOS

Ingeniería en Computación

Unidad N°4: Señales y Sistemas en Comunicaciones
Teorema de Parseval y sus Implicaciones

Teorema de Parseval

- Permite realizar un análisis de potencia/energético de la señal, a partir de su transformada de Fourier
- Establece la relación

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 \, d\omega$$

Energía de la señal

Energía por unidad de frecuencia

Densidad Espectral de Energía

- La densidad espectral de energía $\left|F(j\omega)\right|^2$:
  - Describe la cantidad relativa de energía en función de la frecuencia
  - Su área total es igual a la energía de la señal

Sistemas lineales y densidad de energía

- El concepto densidad de energía permite explicar atenuaciones relativas de energía a través de sistemas lineales
- Para:

$$f(t) \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow g(t)$$

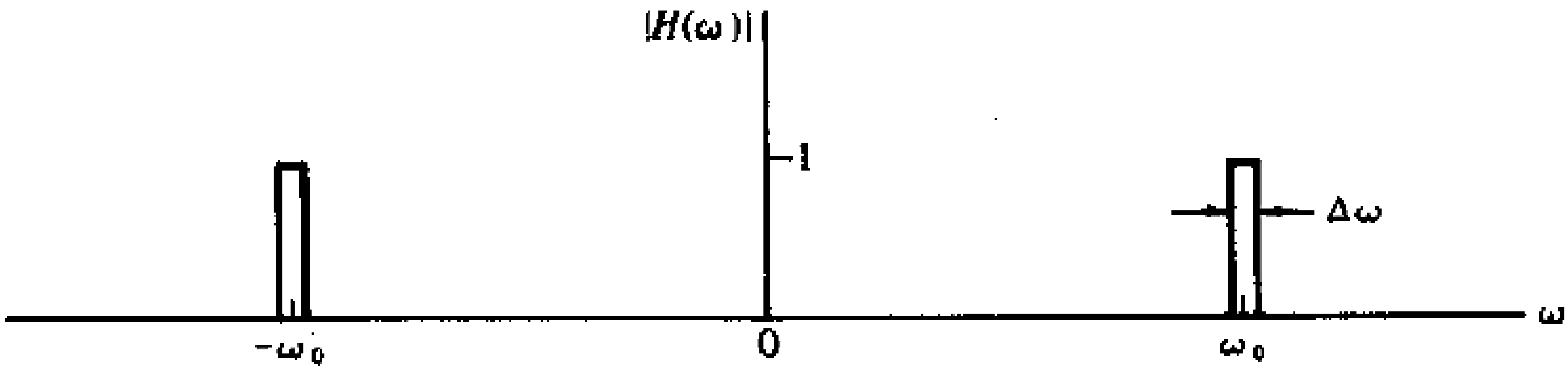
- resulta

$$|G(\omega)|^2 = |F(\omega)|^2 \, |H(\omega)|^2$$

(solo es necesaria la información de magnitud de la TF)

Densidad espectral de energía

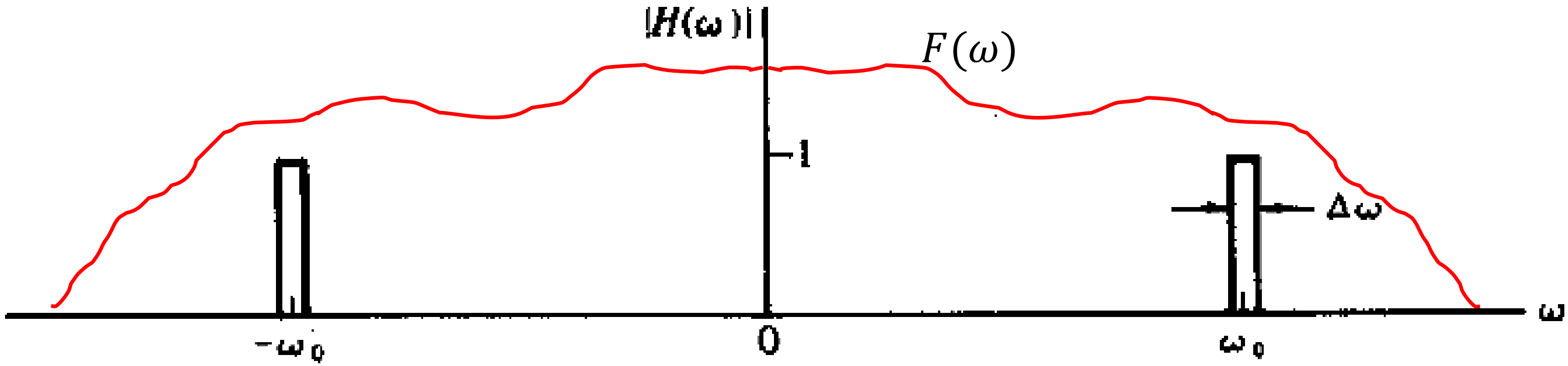
- Ejemplo, dado



Filtro pasabanda estrecho ideal.

determinar la energía de la señal de salida

Densidad espectral de energía

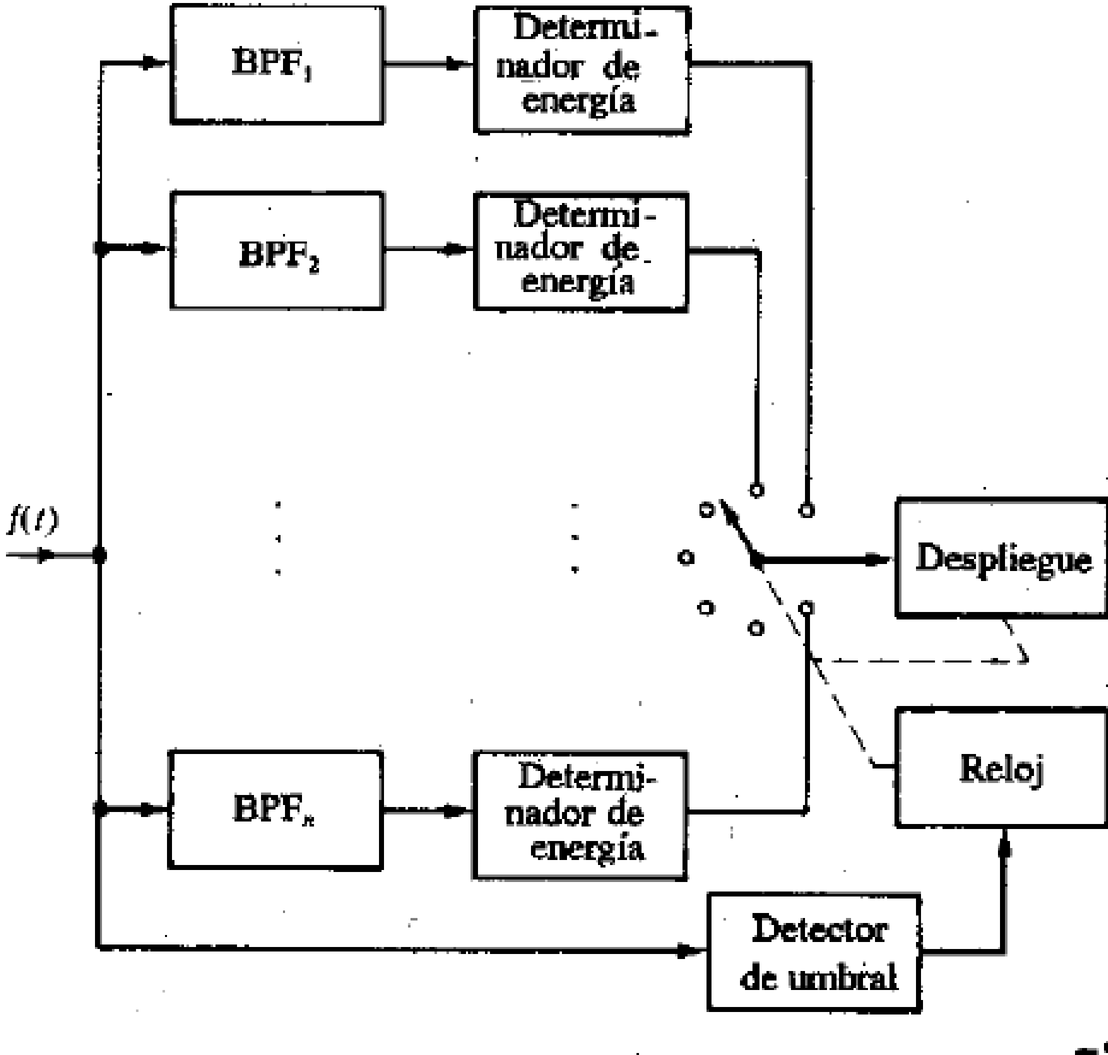


Filtro pasabanda estrecho ideal.

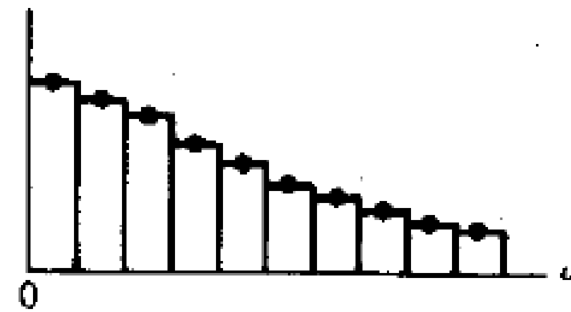
$$E_g \cong \frac{1}{\pi}|F(\omega_0)|^2\Delta\omega$$

(mitad de la energía es aportada por las frecuencias negativas y mitad por las positivas)

Analizador de espectro

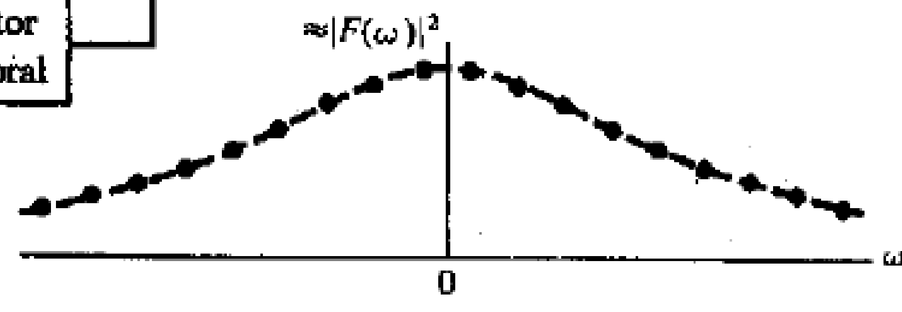


(a)



(b)

(es importante dividir por 2)



(c)

Ejercicio

- Determinar la relación entre las constantes *a* y *b* para que el 50% de la energía de la señal de entrada se transfiera a la salida siendo

$$f(t) = e^{-at}u(t)$$

$$|H(\omega)| = \frac{b}{\sqrt{\omega^2 + b^2}}$$

La energía en la señal de entrada $f(t)$ es (a través de un ohm)

$$E_f = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \int_0^{\infty} e^{-2at} \, dt = \frac{1}{2a}.$$

La energía en la señal de salida $g(t)$ es (a través de un ohm)

$$E_g = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(\omega)|^2 \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 |H(\omega)|^2 \, d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b^2}{(\omega^2 + a^2)(\omega^2 + b^2)} \, d\omega$$

$$= \frac{b^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(\omega^2 + a^2)(\omega^2 + b^2)}.$$

De una tabla de integrales (p. ej., véase Ap. A),

$$E_g = \frac{b^2}{\pi} \frac{\pi}{2ab(a + b)} = \frac{b}{2a(a + b)},$$ $\longrightarrow$ ***a = b***

En resumen…

- La densidad espectral de energía de una señal representa su energía por unidad de frecuencia y muestra las contribuciones relativas de energía de las distintas componentes en frecuencia
- El area bajo la densidad espectral de energía proporciona la energía dentro de una banda de frecuencias dada

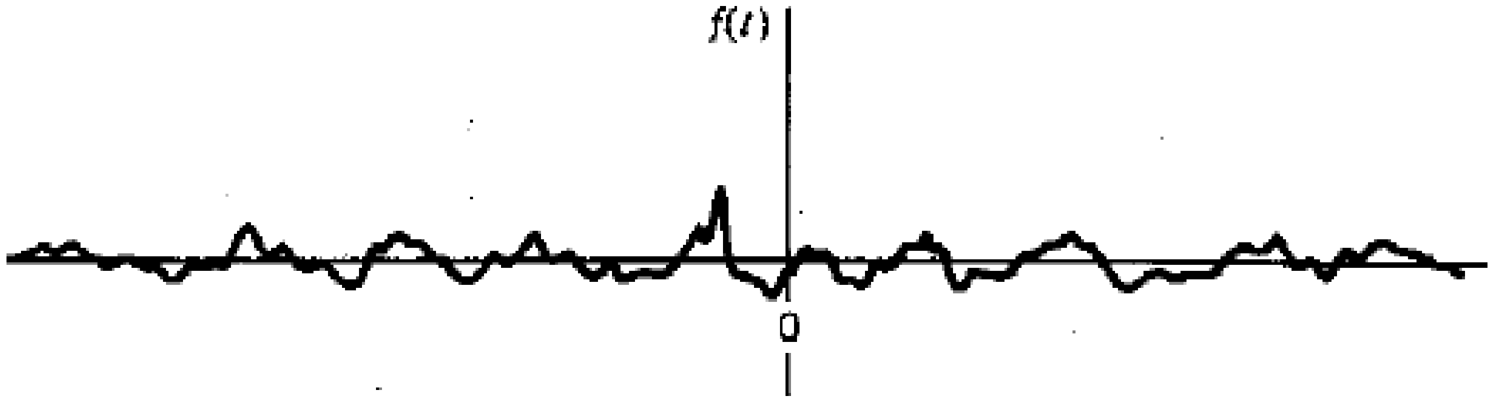
Densidad Espectral de Potencia

Para el caso de señales de energía infinita, se define

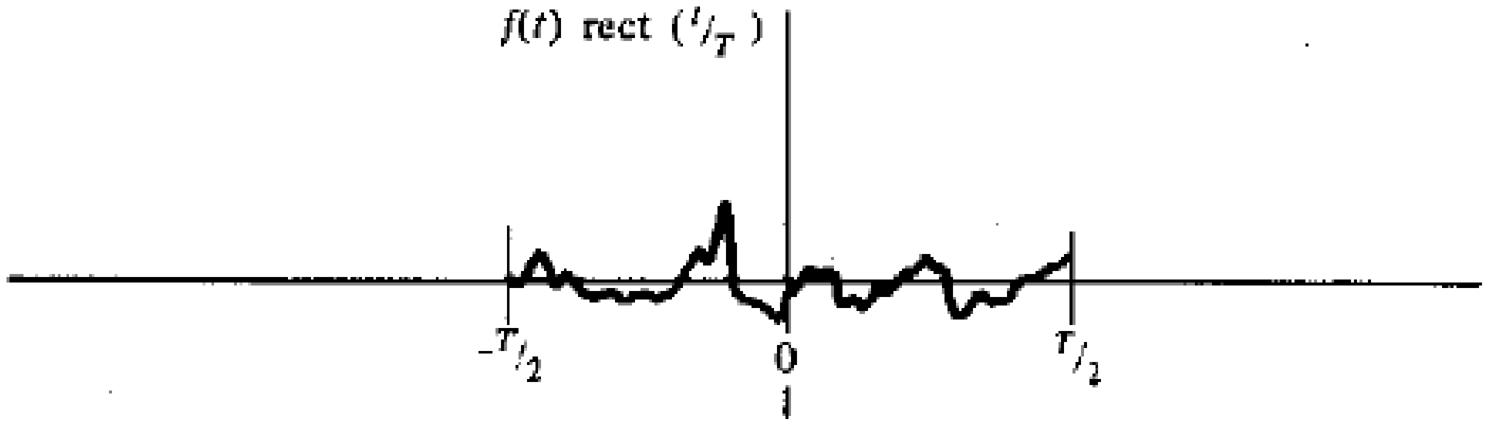
$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) d\omega$$

$S_f(\omega)$, es la densidad espectral de potencia y describe la distribución de la potencia en función de la frecuencia

Relación con la TF



(a)



(b)

Relación con Transforma de Fourier

- Por Parseval

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_T(j\omega)|^2 \, d\omega$$

Si $T \to \infty$

$$S_f(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$$

Determinación Práctica de la Densidad Espectral de Potencia

- Se realiza un registro por un tiempo *T*
- Se realiza la Transformada de Fourier
- Se obtiene la relación $\frac{|F_T(\omega)|^2}{T}$

Si se tiene la certeza de que la densidad espectral de potencia no varia con el tiempo, se pueden tomar varias muestras y promediar los resultados

Señal periódica

- Para el caso de una señal periódica, se cumple

$$S_f(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \delta(\omega - n\omega_0)$$

Ejemplo

- Determinar la expresión de la densidad espectral de potencia de

$$f(t) = Ae^{j\omega_0 t} rect(t/T)$$

Para T finito y $T \rightarrow \infty$

Ejemplo

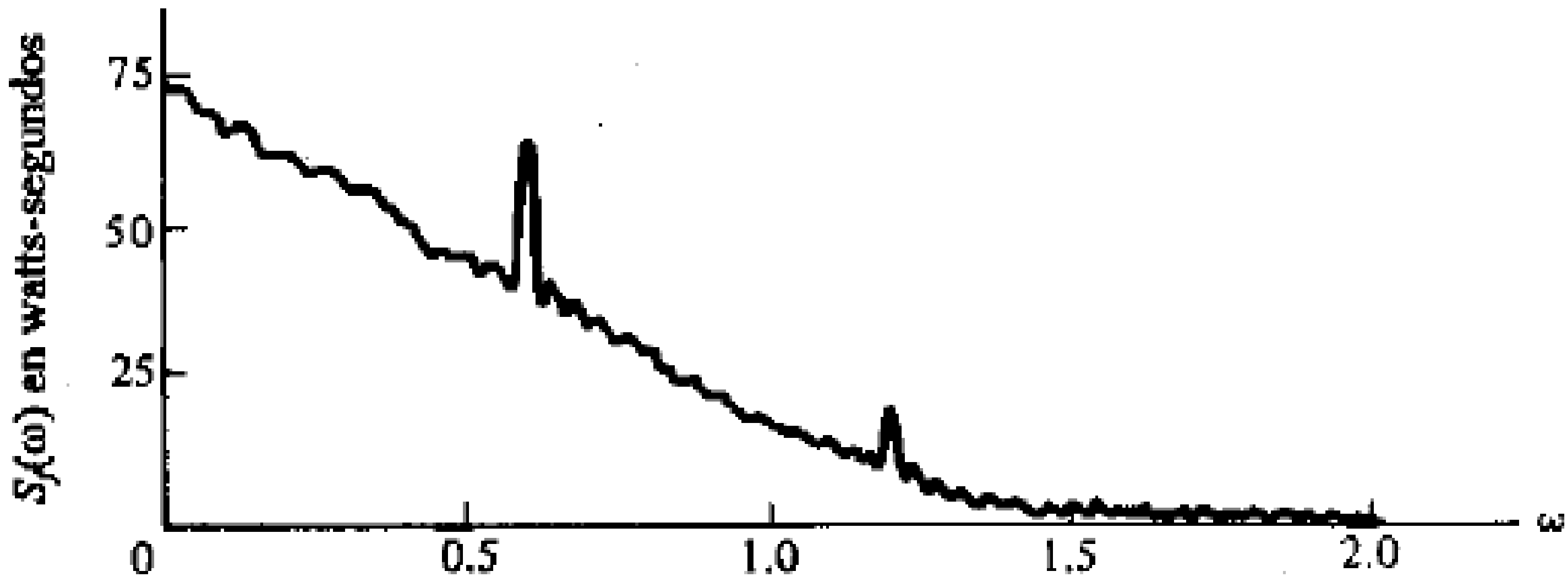
- Solución

$$S_f(\omega) \approx \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} = |A|^2 T \ \mathrm{Sa}^2 \left[(\omega - \omega_0)T/2\right]$$

$$\begin{aligned}
\lim_{T \to \infty} \frac{|F_T(\omega)|^2}{T} &= |A|^2 \lim_{T \to \infty} \{T \ \mathrm{Sa}^2 \left[(\omega - \omega_0)T/2\right]\} \\
&= 2\pi |A|^2 \lim_{T \to \infty} \left\{\frac{T}{2\pi} \mathrm{Sa}^2 \left[(\omega - \omega_0)T/2\right]\right\} \\
&= 2\pi |A|^2 \delta(\omega - \omega_0) \,.
\end{aligned}$$

Ejercicio

- La densidad espectral de potencia de una señal se halla utilizando el método propuesto. La gráfica resultante es



Determinar cuales componentes periódicas estan contenidas en la señal y la longitud del registro

Solución:

- Para un tiempo de observación infinito, la señal periódica tendría por espectro un impulso.
- Para un tiempo de observación finito, el espectro aparece en la forma:

$$T|F_n|^2 \, \mathrm{Sa}^2 \left[(\omega - n\omega_0)T/2\right]$$

- Por lo tanto, aparecen componentes periódicas en:

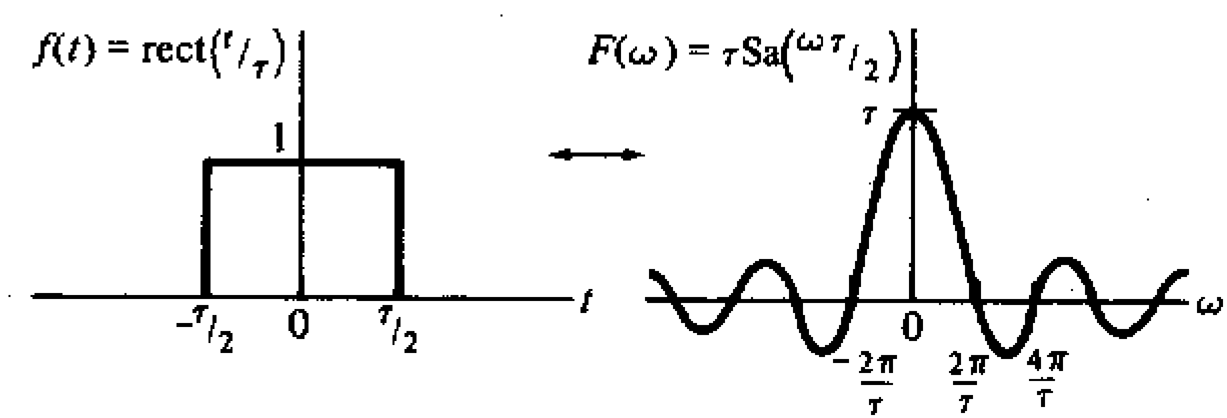
$$\omega_1 = 0.6 \quad \mathrm{rad/s} \quad (f_1 = 0.0955 \ \mathrm{Hz}),$$

$$\omega_2 = 1.2 \quad \mathrm{rad/s} \quad (f_2 = 0.191 \ \mathrm{Hz}).$$

Solución:

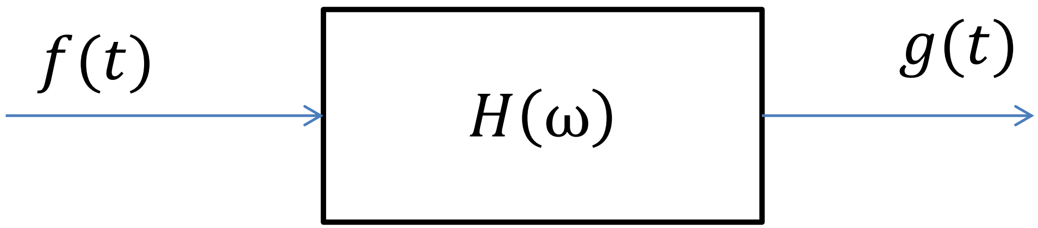
- Puede haber otras componentes periódicas pequeñas, pero están encubiertas en las fluctuaciones o ruido de la medición.
- Los ancho de Sinc son de alrededor de 0,05 rad/s, por tanto:

$$T = \frac{4\pi}{0.05} \cong 250 \text{ s.}$$



Densidad espectral de potencia y sistemas lineales

- Puede demostrarse que para



se cumple la relación

$$S_g(\omega) = S_f(\omega)|H(\omega)|^2$$

Densidad espectral de potencia y sistemas lineales

- Asi, la potencia promedio de la señal de salida está dada por

$$P_g = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega)|H(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega$$

Esto da una cierta visión de por que la función de transferencia se usa para evaluar los amplificadores de potencia, generalmente representada por curvas

Sistemas y Ruido

- Una métrica importante a la hora de evaluar los sistemas de comunicación es la relación señal ruido, definida como:

$$S/N = \overline{s^2(t)}/\overline{n^2(t)}$$

(valor cuadrático medio de las señales)

O, expresada en decibeles:

$$[S/N]_{dB} = 10 \log_{10}[\overline{s^2(t)}/\overline{n^2(t)}]$$

Funciones de correlación

- Existe una función equivalente en el dominio del tiempo a la densidad espectral de potencia en el dominio de la frecuencia, esta función es la función de autocorrelación, definida como

$$R_f(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^*(t) f(t+\tau) dt$$

Función de autocorrelación

- Tenemos otro método para determinar la densidad espectral de potencia:
  - Se determina la función de autocorrelación
  - Se halla la transformada de Fourier

$$S_f(\omega) = \mathcal{F}\{R_f(\tau)\}$$

Este método se puede aplicar a señales determinísticas y a **aleatorias**

Estacionalidad

- En todo este desarrollo se ha supuesto que la potencia y la densidad espectral de potencia no varian con el tiempo
- Si esta suposición no es correcta, aun puede hallarse la función de autocorrelación, pero dependerá de *t* (además de τ)

Función de autocorrelación

- Ejemplo: Determine y trace la función de autocorrelación de una señal periódica cuadrada con amplitud de pico a pico *A*, periodo *T* y valor medio *A*/2

Para $-T/2 < \tau < 0$:

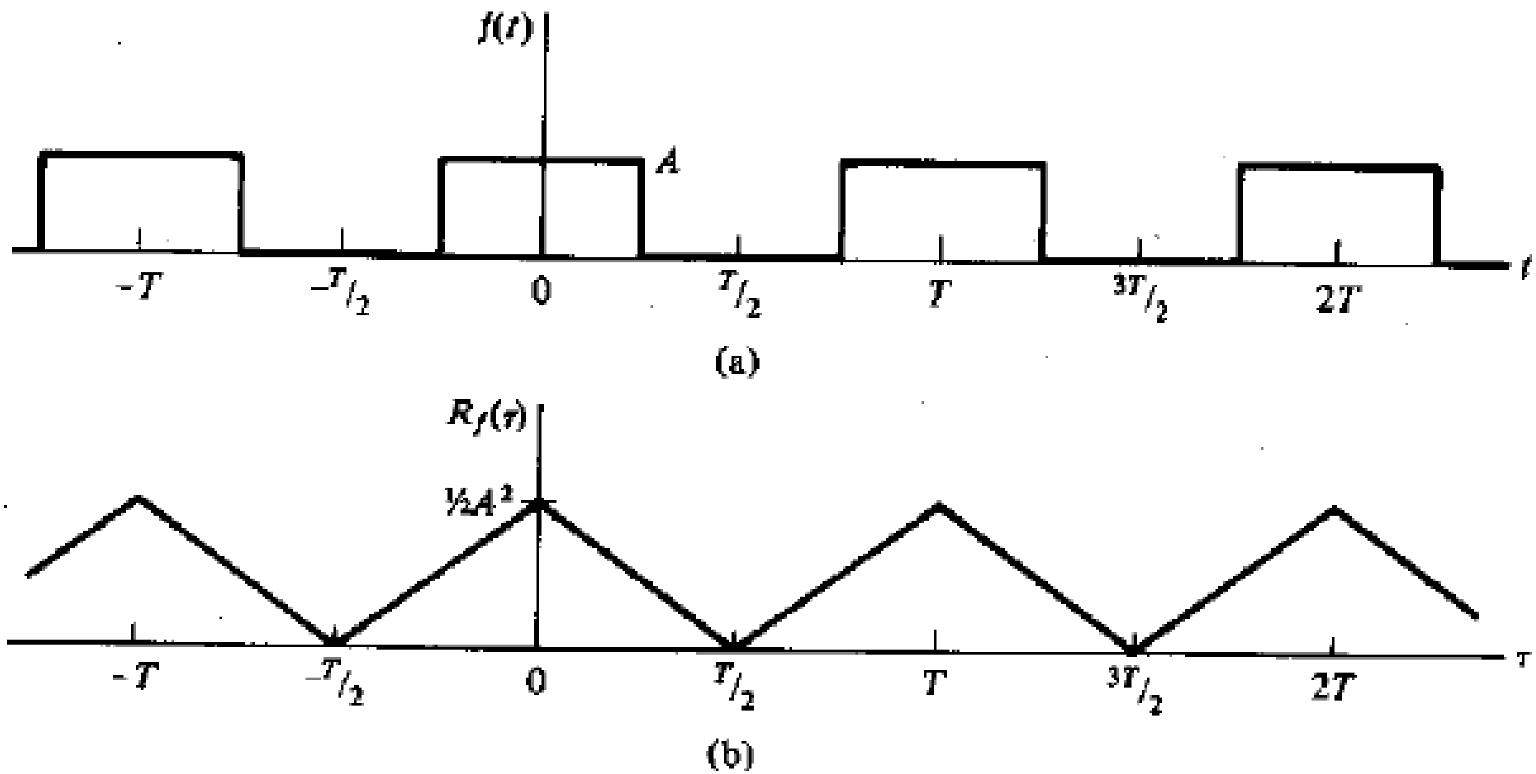
$$R_f(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-T/4}^{(T/4)+\tau} A^2\,dt = A^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{T}\right),$$

(Como la función es periódica, no es necesario hacer tender *T* a infinito para obtener el valor medio)

Función de autocorrelación

Para $0 < \tau < T/2$:

$$R_f(\tau) = \frac{1}{T}\int_{\tau - T/4}^{T/4} A^2\,dt = A^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{T}\right).$$

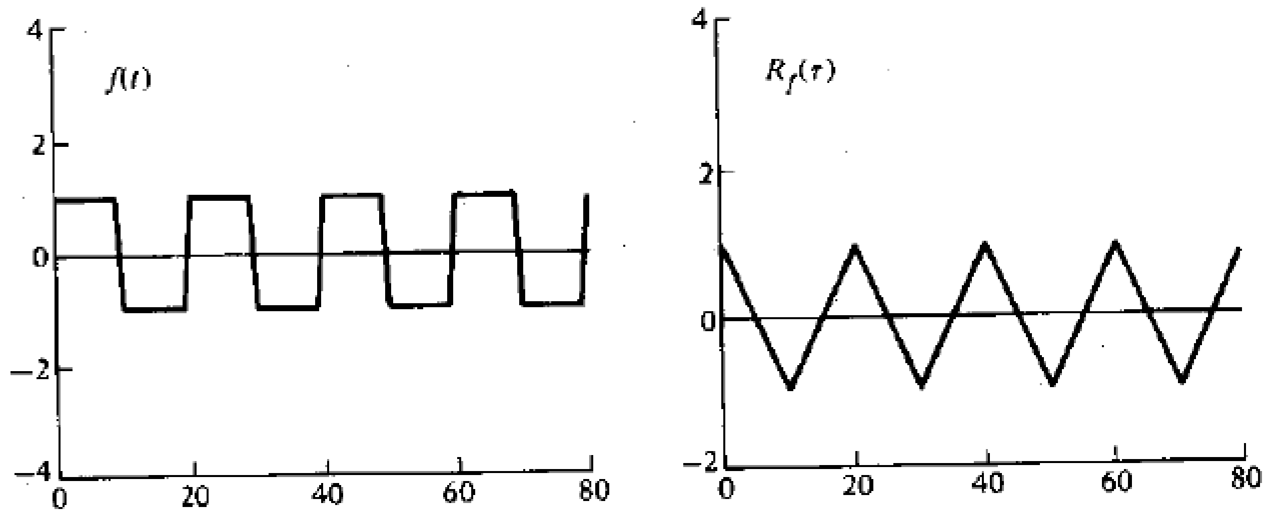


Función de autocorrelación: Propiedades

- La función de autocorrelación de una señal periódica es periódica
- La función de autocorrelación de una señal aperiódica es aperiódica
- Simetría: $R_f(-\tau) = R_f^*(\tau)$
- Valor cuadrático medio: $R_f(0) = \overline{f^2(t)}$
- Valor máximo: $|R_f(\tau)| \leq R_f(0)$
- Aditividad: $R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau)$

Aplicación: Detección de señales

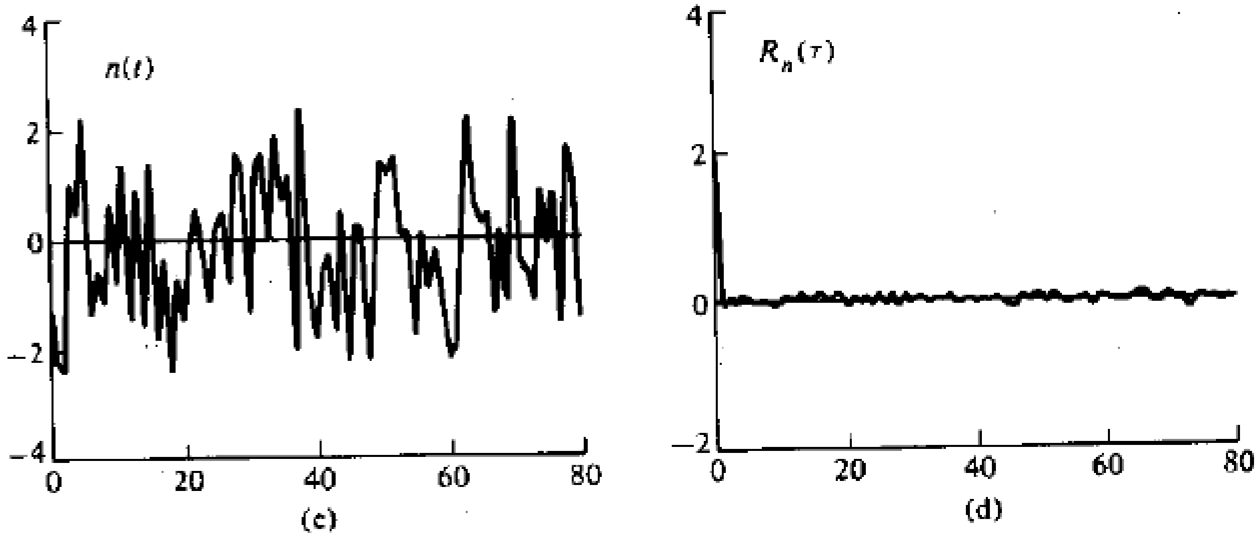
- La función de autocorrelación resulta útil en la detección o el reconocimiento de señales enmascaradas por ruido agregado
- Ejemplo: Señal:



(a) (b)

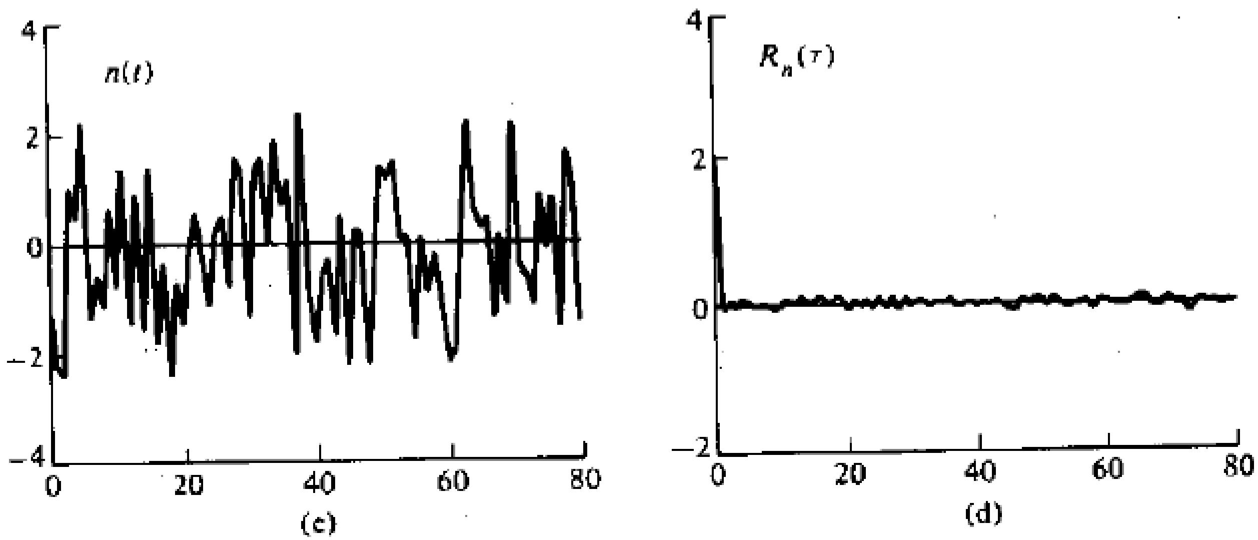
Detección de señales

- Ruido (blanco)



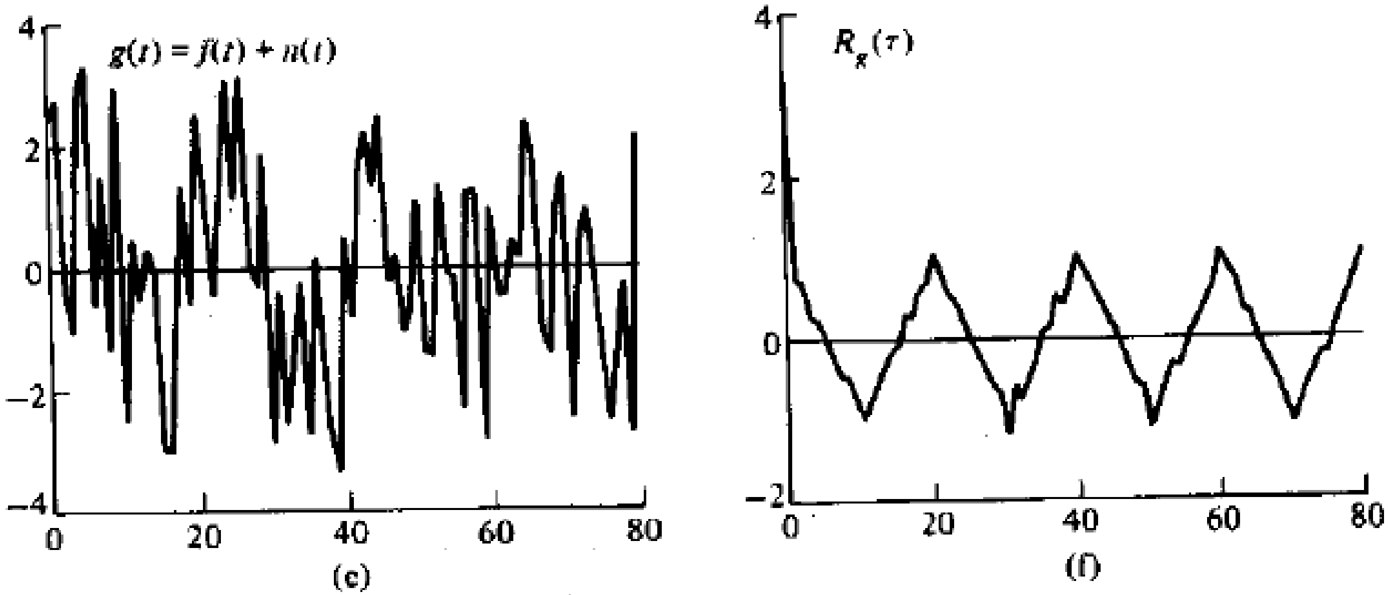
Detección de señales

- Señal + Ruido (en el tiempo)



Detección de señales

- Autocorrelación de la Señal+Ruido



- Se reconoce facilmente la función de autocorrelación de la señal cuadrada

Detección de señales por autocorrelación

- Inconvenientes:
  - La autocorrelación del ruido aparece junto con la de la señal (es otra forma de observar las señales, pero ambas están incluidas)
  - Esto dificulta la detección de señales aperiódicas
  - Se pierde el desplazamiento relativo en el tiempo (fase) de las señales

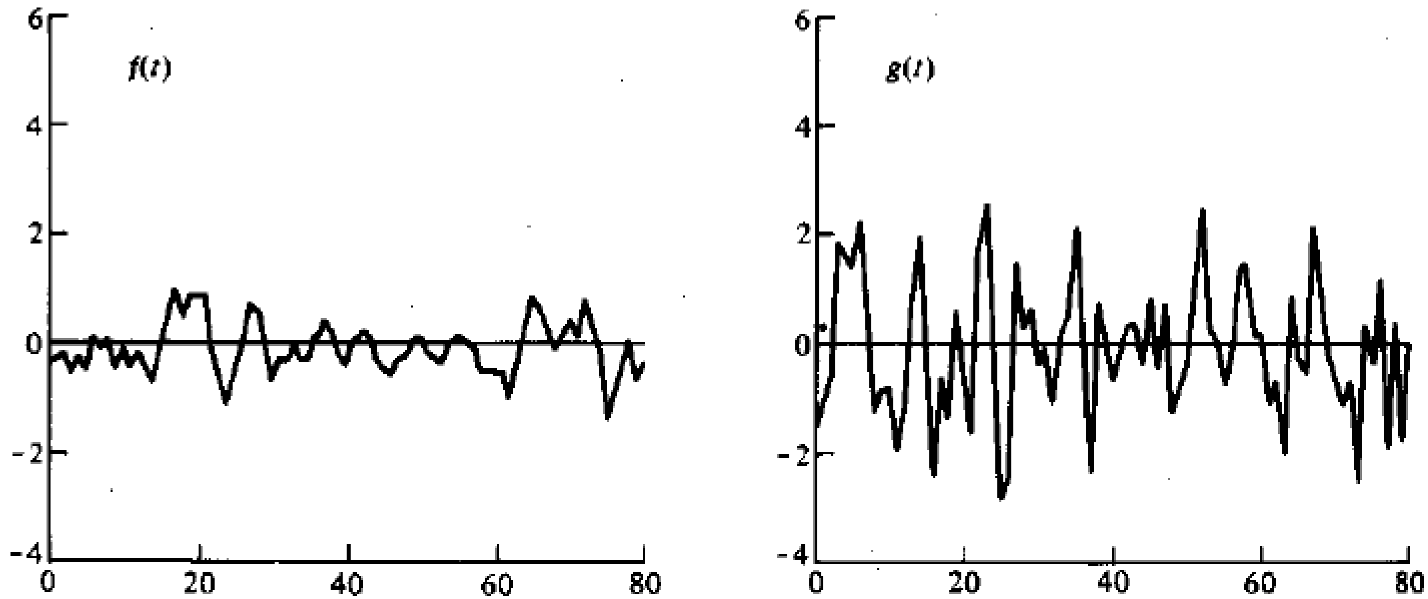
Correlación cruzada

- Determina similitudes entre dos señales.
- Permite conocer la fase
- Se define como

$$R_{fg}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^*(t) g(t + \tau)\, dt$$

Correlación cruzada

- Ejemplo

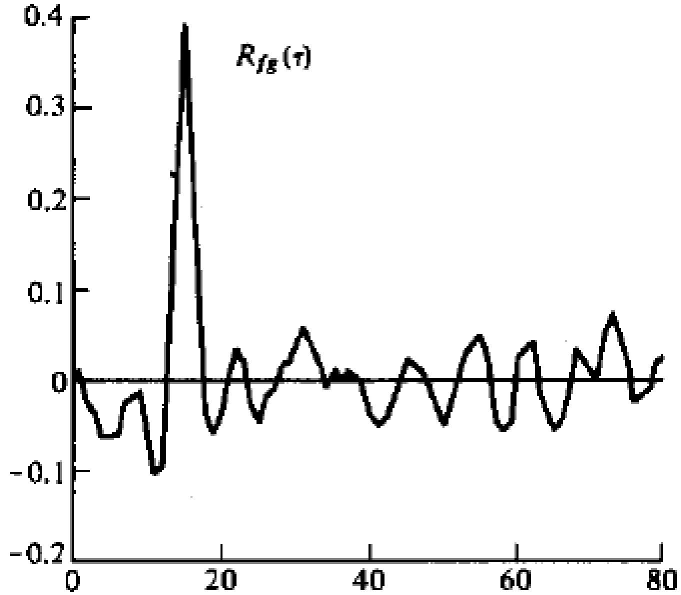


(a) Señal aleatoria

(b) Señal aleatoria + ruido

- $g(t) = f(t - t_0) + \eta(n)$

Correlación cruzada



(c) Correlación cruzada

Funciones de correlación para señales de energía finita

- El concepto de funciones de correlación se puede extender a señales de energía finita como

$$r_f(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)f(t+\tau)\,dt$$

$$r_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)g(t+\tau)\,dt$$

- No es necesario el cálculo de promedios

Funciones de correlación para señales de energía finita

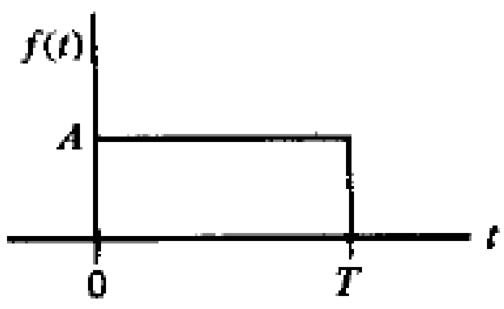
- Calculando la transformada de Fourier se verifica

$$\mathscr{F}\{r_f(\tau)\} = |F(\omega)|^2$$

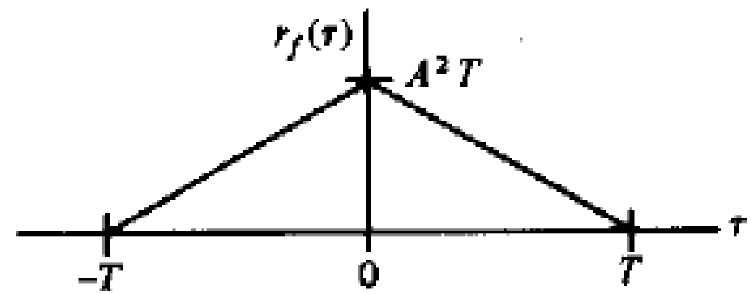
- La **densidad espectral de energía** es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación para señales de energía finita

Funciones de correlación para señales de energía finita

- Ejemplo



(a)



(b)

Ruido Blanco de banda limitada

- El ruido blanco posee una densidad espectral de potencia constante para todas las frecuencias
- Ejemplo: se determina la densidad espectral de potencia de una señal según el método propuesto, y se obtiene:
  - Un valor constante de η watts por Hz (medida sobre frecuencias positivas)
  - Valor medio cero

$$S_n(\omega) = \eta/2 \quad \text{para toda } \omega$$

Ruido Blanco de banda limitada

- En realidad, esta expresión no describe ningún fenómeno físico porque implica en una potencia infinita

$$\overline{n^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (\eta/2)\, d\omega \rightarrow \infty$$

- Resulta un buen modelo cuando el ancho de banda del dispositivo de medición es menor que las limitaciones de ancho de banda del proceso observado

Ruido Blanco de banda limitada

- Lo que en realidad interesa es el ruido blanco de banda limitada
- La potencia es independiente de la frecuencia de operación. Por ejemplo: suponiento ruido blanco con valor medio cero, cuya densidad espectral de potencia es $\eta/2$ watts por Hz. Sobre un ancho de banda B, la potencia del ruido es

$$P_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi B}^{2\pi B} (\eta/2)\, d\omega = \eta B \qquad \mathrm{W}$$

Ruido blanco y sistemas lineales

- La transmisión de ruido blanco a través de sistemas LTI ocurre de la manera descrita para la densidad espectral de potencia

$$S_{n_o}(\omega) = S_{n_i}(\omega)\,|H(\omega)|^2,$$

$$\overline{n_o^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{n_o}(\omega)\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{n_i}(\omega)\,|H(\omega)|^2\,d\omega\,.$$

Ruido blanco y sistemas lineales

- Si la densidad espectral de potencia del ruido , es blanca, tenemos

$$\overline{n_0^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta}{2}\left|H(\omega)\right|^2 d\omega$$

$$= \frac{\eta}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \left|H(\omega)\right|^2 d\omega \, .$$

Ruido Térmico

- Se produce por el movimiento caótico de los electrones libres en un medio conductor, exitados de manera térmica
- Partiendo de consideraciones termodinámicas y de la mecánica cuántica, se tiene

$$S_n(\omega) = \frac{h|\omega|}{\pi[\exp(h|\omega|/2\pi kT) - 1]},$$

(ruido blanco para la mayoría de los casos)

Ruido Térmico

$$S_n(\omega) = \frac{h|\omega|}{\pi[\exp(h|\omega|/2\pi kT) - 1]},$$

$$S_n(\omega) \cong 2kT \text{ watts por Hz} \quad \text{para} \quad |\omega| \ll 2\pi kT/h\,,$$

$kT/h = 6000$ GHz para $T = 290$ K)

T = temperatura del medio conductor en Kelvin (K),
k = constante de Boltzmann = 1.38×10^{-23} joule/K,
h = constante de Planck = 6.625×10^{-34} joule-s.

Transmisión de Ruido a través de sistemas LTI

La transmisión de ruido blanco a través de sistemas LTI ocurre de la manera descripta para la densidad espectral de potencia.

$$S_{n_o}(\omega) = S_{n_i}(\omega)\left|H(\omega)\right|^2$$

Ejemplo: Tensión cuadrática media de salida

$$\overline{n_o^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{n_o}(\omega)\,d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_{n_i}(\omega)\left|H(\omega)\right|^2 d\omega\,.$$

Ruido Térmico

- Ejemplo: Calcule la tensión rms de ruido proveniente de efectos térmicos en dos resistores de 100 Ω y 150 Ω a 300°K, en un ancho de banda de 1 MHz si
  - a) Los resistores se conectan en serie
  - b) Los resistores se conectan en paralelo

  Considere que la potencia desarrollada en una resistencia está dada por:

$$P = \frac{v^2(t)}{R} = i^2(t)R$$

Ruido Térmico

a)

$$\overline{v^2(t)} = 4kTB(R_1 + R_2)$$
$$= 4(1.38 \times 10^{-23})(300)(10^6)(250)$$
$$= 4.14 \times 10^{-12}\ \mathrm{V}^2,$$
$$\sqrt{\overline{v^2(t)}} = 2.03\ \mu\mathrm{V}.$$

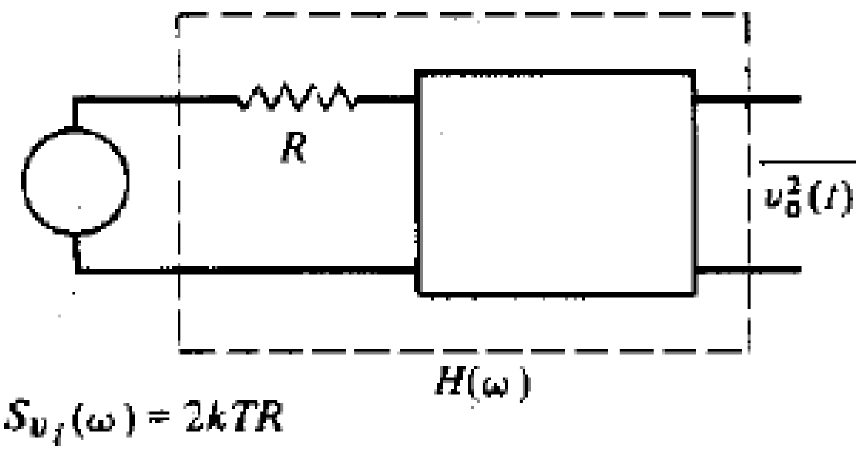
b) ??

Transmisión de Ruido Térmico a través de sistemas lineales

- Supongase que se conecta un resistor a las terminales de entrada de un sistema lineal que contiene componentes sin ruido

Ruido y sistemas lineales

- La resistencia se reemplaza por una fuente de ruido y un resistor sin ruido



- Resultando

$$S_{v_o}(\omega) = S_{v_i}(\omega)\,|H(\omega)|^2$$

Ruido y sistemas lineales

- Si el propio sistema contiene fuentes de ruido (resistencias), se determina la resistencia equivalentes, referida a la entrada

$$R_{eq}(\omega) = \mathscr{Re}\{Z(\omega)\}$$

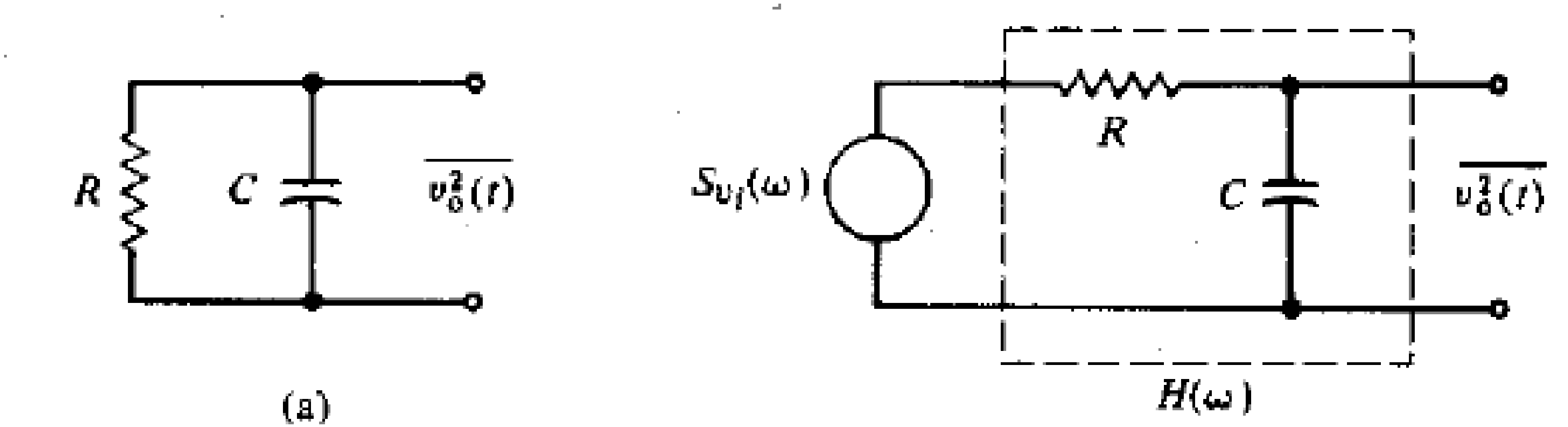
(por lo general depende de la frecuencia)

- Resulta

$$S_v(\omega) = 2kTR_{eq}(\omega)$$

Ruido y sistemas lineales

- Ejemplo: calcule la tensión rms de ruido a través de un capacitor C si se conecta en paralelo con un resistor ruidoso
  - Circuito equivalente



Ruido y sistemas lineales

- Densidad espectral del ruido

$$S_{v_i}(\omega) = 2kTR \qquad V^2/\mathrm{Hz}.$$

- Función de transferencia

$$H(\omega) = \frac{1/RC}{j\omega + 1/RC}$$

- Potencia del ruido de salida

$$\overline{v_o^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2kTR \frac{(1/RC)^2}{\omega^2 + (1/RC)^2} d\omega \longrightarrow \sqrt{\overline{v_o^2(t)}} = \sqrt{\frac{kT}{C}}$$

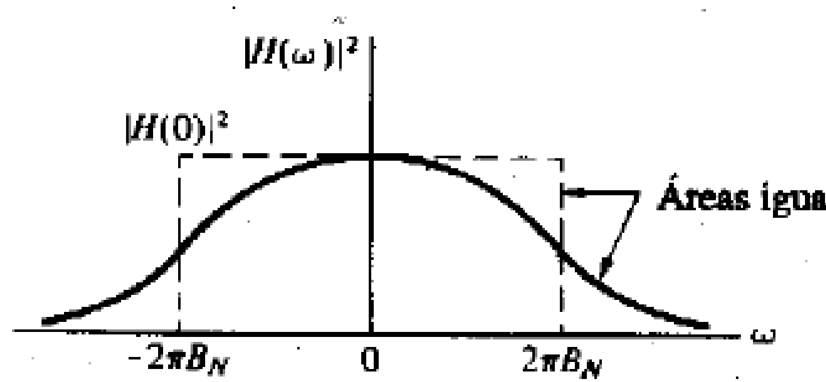
Ancho de banda equivalente de ruido

- El ancho de banda equivalente permite analizar sistemas lineales prácticos por medio de sus equivalentes idealizados

$$\overline{v_o^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi B_N}^{2\pi B_N} (\eta/2)\,|H(\omega_0)|^2\,d\omega\,,$$

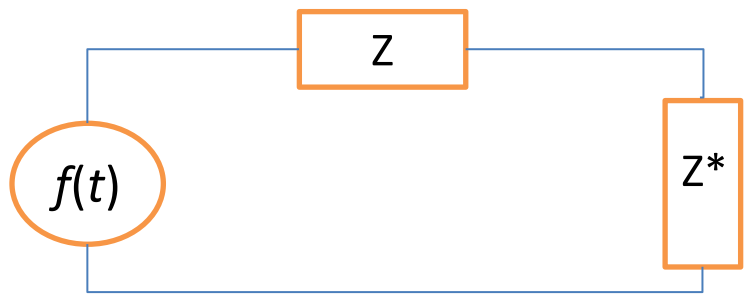
$$\overline{v_o^2(t)} = \eta|H(\omega_0)|^2 B_N\,.$$

$$B_N = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\int_0^{\infty}|H(\omega)|^2\,d\omega}{|H(\omega_0)|^2}$$



Densidad de potencia máxima

- Considerando una fuente de tensión $f(t)$ con densidad de potencia $S_f(\omega)$, es conocido que para entregar la máxima potencia a una carga, la impedancia de esta debe ser complejo conjugado de la impedancia de la fuente (carga acoplada)



- La densidad de potencia real entregada a la carga es

$$S_o(\omega) = \frac{S_f(\omega)}{4R}$$

Densidad de potencia máxima de un circuito pasivo

- Se considera solo la potencia de ruido térmico generada en el resistor equivalente:

$$P_n = 4kTB$$

- Pero, la máxima potencia disponible es un cuarto (considerando una resistencia acoplada sin ruido y el teorema de máxima transferencia de potencia)

$$P_a = kTB \quad \text{o} \; S_o(\omega) = \frac{kT}{2}$$

- Para un sistema dado, la temperatura está en relación directa con la potencia disponible

Temperatura de ruido equivalente

- El resultado anterior no se cumple en circuitos con fuentes de ruido no térmico (Ej. ruido de disparo) o no pasivos.
- Se puede extender este resultado definiendo la temperatura efectiva de ruido (similar al ancho de banda equivalente)

$$T_e = \frac{2S_{max}(\omega)}{k}$$

Asi, la potencia de ruido máxima de cualquier ciruito de dos terminales en un ancho de banda B, es kT_eB

Factor de ruido

- Es una forma concisa de establecer la temperatura de ruido equivlaente de un amplificador
- Se define como $F = \dfrac{(S/N)_{\mathrm{i}}}{(S/N)_{\mathrm{o}}}$

Factor de ruido: Ejemplo

- Determinar el FR si se aplica una señal $s_i(t)$ y un ruido térmico $n_i(t)$ a una temperatura T_o en la entrada de un amplificador con ganancia de potencia G_p y ancho de banda B
  - Potencia de ruido disponible en la entrada $N_i = kT_oB$
  - La potencia a la salida es $S_o = S_iG_p$
  - La potencia de ruido a la salida es

$$N_o = kT_oBG_P + kT_eBG_P$$

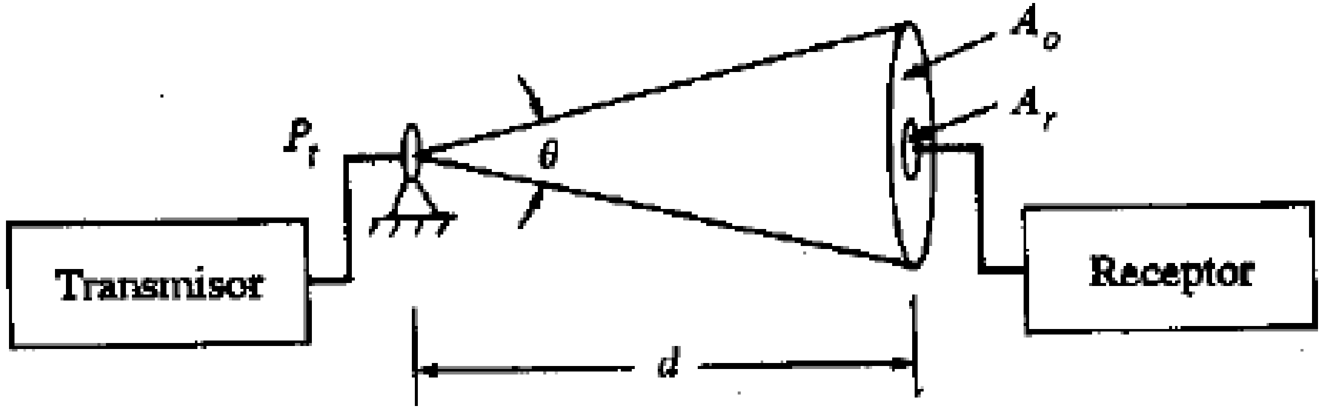
Resultando: $F = 1 + \frac{T_e}{T_o}$

Antenas y enlaces de comunicación

- El ruido térmico es una limitación fundamental en los sistemas de comunicación y por ello se debe manejar la propagación de potencia del transmisor al receptor en términos de cálculos de señal a ruido
- Como ejemplo se considera un sistema de comunicación para la transmisión de potencia a través del vacio (sistema de comunicación por satélite)

Antenas y enlaces de comunicación

- Modelo del enlace de comunicación:



- Se considera una antena directiva que radia potencia en un cono de ancho θ