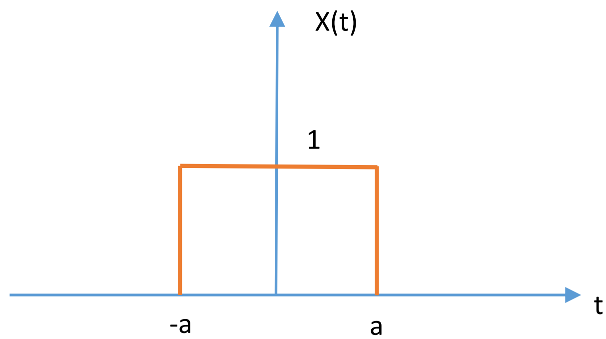
Dualidad en la Transformada de Fourier de Tiempo Continuo

Analizar la propiedad de dualidad de la TFTC mediante un ejemplo práctico basado en un pulso en el dominio del tiempo.



La propiedad de dualidad está presente en varias de las herramientas matemáticas que se tratan en la materia de Señales y Sistemas, como por ejemplo Laplace y Fourier. Esta propiedad es muy importante pues representa la forma en que podemos vincular la señal en el dominio temporal con su espectro y viceversa. Matemáticamente para el caso de la TFTC quiere decir:

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

Donde $X(t)$ es simplemente el reemplazo $\omega \to t$ en $X(\omega) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ y $x(-\omega)$ es el remplazo de $t \to \omega$ en x(t). Es decir, la propiedad de dualidad nos permite obtener el par transformada y antitransformada de Fourier solamente a partir de $X(\omega)$ y remplazando $\omega \to t$.

Para el pulso de duración “2a” mostrado en la figura, la TFTC es:

$$X(\omega) = \int_{-a}^{a} 1e^{-j\omega t}dt$$

$$X(\omega) = \frac{-1}{j\omega}\left(e^{-j\omega a} - e^{+j\omega a}\right)$$

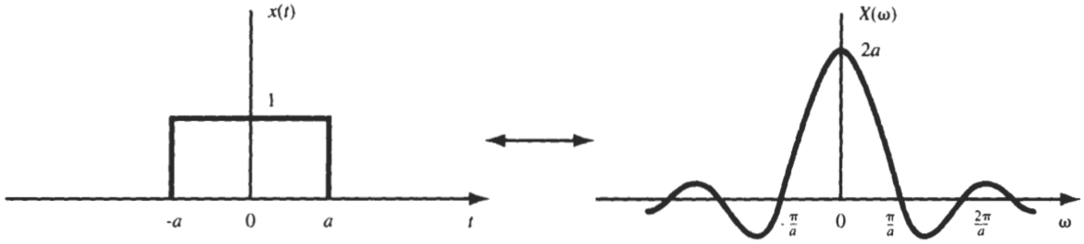
$$X(\omega) = \frac{2}{\omega}\left(\frac{e^{j\omega a} - e^{-j\omega a}}{2j}\right)$$

$$X(\omega) = \frac{2}{\omega}sen(\omega a) = 2a\ sinc(\omega a)$$

En donde se definió la función “sinc” como: $sinc(\omega a) = \frac{1}{\omega a}sen(\omega a)$. Esta función o señal es de gran importancia y utilidad en el procesamiento de señales y será utilizada permanentemente.

Pregunta: ¿Cuánto vale la función sinc en $\omega = 0$? ¿Hay una indeterminación?

Graficando $X(\omega)$, es decir, el espectro de x(t) tenemos:



Obtenido del libro: Signal and Systems - Hwei P. Tsu

Preguntas:

a) ¿En qué sectores de frecuencia se encuentra concentrada la mayor parte de la energía de x(t)?

b) ¿Qué representan físicamente los cruces por cero del espectro de x(t)?

c) Analizando el espectro $X(\omega)$, ¿Hasta qué frecuencias tiene energía x(t)?

Una vez que tenemos calculado $X(\omega)$, podemos aplicar la propiedad de dualidad para obtener la TFTC de una función temporal del tipo "sinc", es decir, obtener la TFTC de $x(t) = \frac{a}{\pi} sinc(at)$. Como ya conocemos que la TFTC de un pulso es una "sinc", la propiedad de dualidad nos dice que la TFTC de una "sinc" en el dominio del tiempo será un pulso en el dominio de la frecuencia.

Esto se puede verificar resolviendo $X(\omega) = F\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$ o bien, utilizando el $X(\omega)$ que se calculó recién y aplicando $X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$.

Haciendo el reemplazo $\omega \rightarrow t$ en $X(\omega)$, que ya conocemos que es $X(\omega) = \frac{2}{\omega} sen(\omega a)$ tenemos:

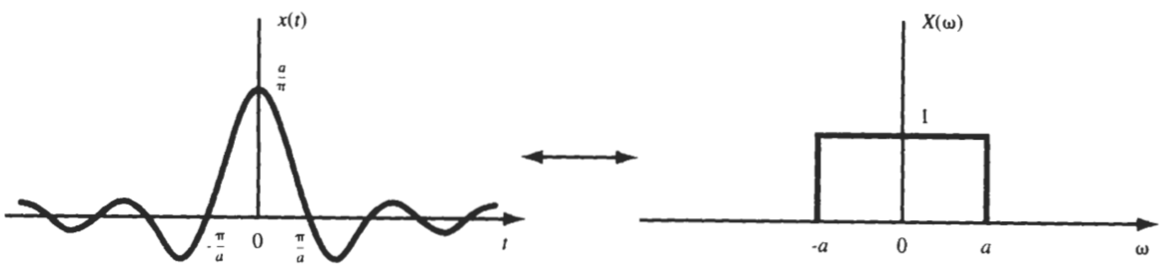
$$X(t) = \frac{2}{t} sen(at) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

$$\frac{1}{\pi t} sen(at) \leftrightarrow x(-\omega)$$

Ya que la señal $x(-\omega)$ es un pulso cuadrado y simétrico, ocurre que: $x(-\omega) = x(\omega)$ y por lo tanto:

$$\frac{1}{\pi t} sen(at) \leftrightarrow x(\omega)$$

$$\frac{a}{\pi} sinc(at) \leftrightarrow x(\omega)$$



Obtenido del libro: Signal and Systems - Hwei P. Tsu