Diseño de Filtros Digitales

FIR e IIR

Pasos de diseño

1) Convertir el procesamiento deseado en precisas especificaciones de diseño de
   1) La respuesta en frecuencia (magnitud y fase)
   2) Tipo de filtro (FIR o IIR)
   3) Orden del filtro
   4) Nivel de atenucación
   5) Etc…

Ejemplo:

Procesamiento deseado: Eliminar ruido inducido por la red eléctrica

Especificaciones de diseño: filtro notch IIR centrado en 50 Hz con atenuación de 30 dBs

Pasos de diseño

2) Encontrar el filtro FIR o IIR implementable que mejor se aproxime a las **especificaciones de diseño** según algún criterio matemático (cálculo de los parámetros del filtro)

3) Seleccionar la forma más adecuada de implementación (Ej, utilizando convolución por bloques) y la tecnología digital más apropiada (Ej. DSP de punto fijo) para la aplicación considerada

Especificaciones de diseño

En este punto es detallada la forma en que deben ser presentadas las especificaciones de un filtro digital (Paso 1 del diseño de un filtro)

Especificaciones de diseño: Respuesta en Frecuencia

- Se utiliza la respuesta en frecuencia de un filtro **ideal**
- La respuesta en frecuencia de un filtro digital es siempre periódica con período 2π,
- Además, para coeficientes reales, la respuesta en frecuencia es simétrica conjugada $(D^*(\omega) = D(-\omega))$

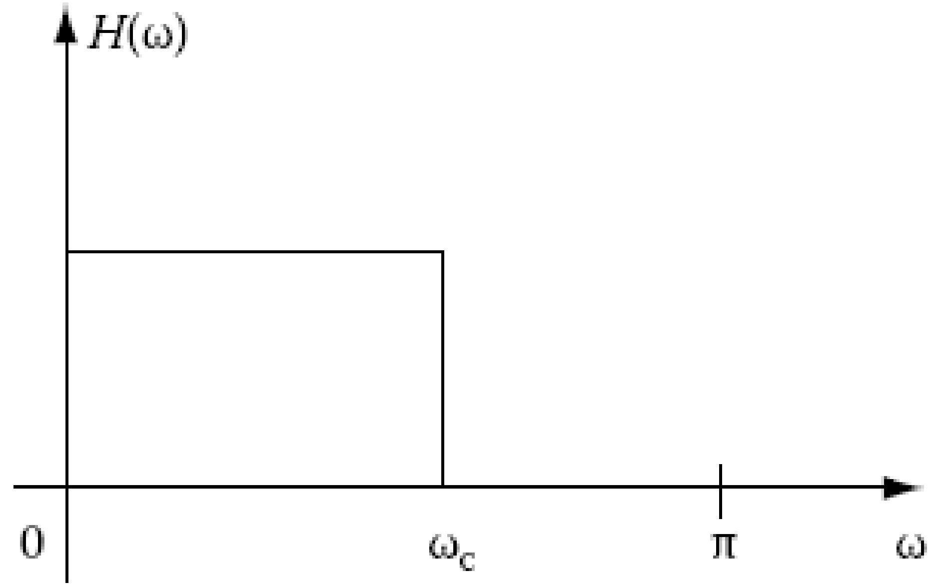
Es suficiente especificar la respuesta en frecuencia en el intervalo [0, π]

Especificaciones de diseño: Respuesta en Frecuencia

- El caso más simple es del filtro pasa-bajos con fase cero

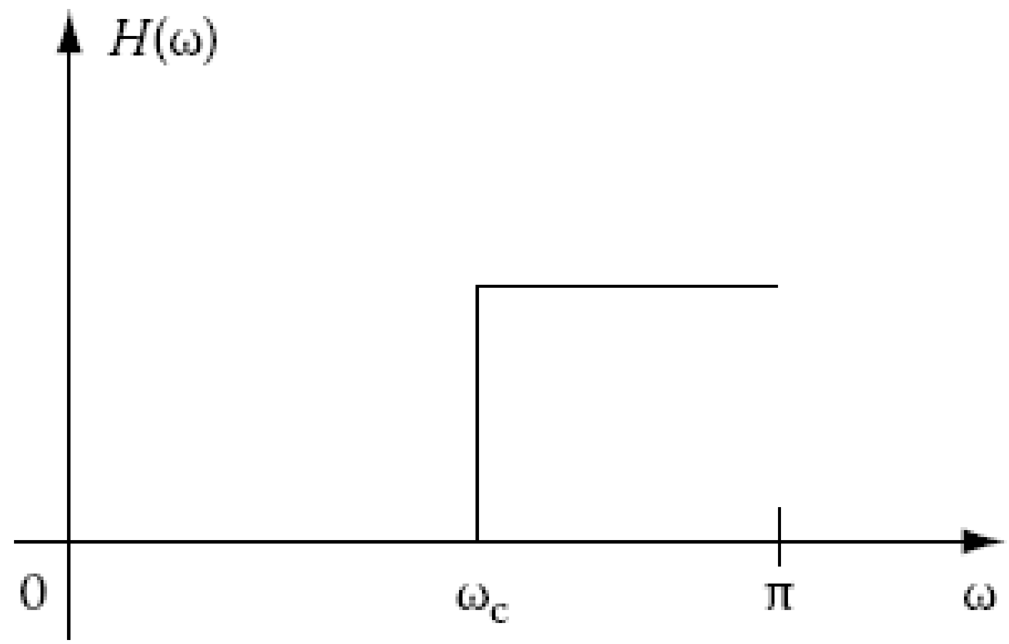
$$D(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

donde ω_c es la frecuencia de corte



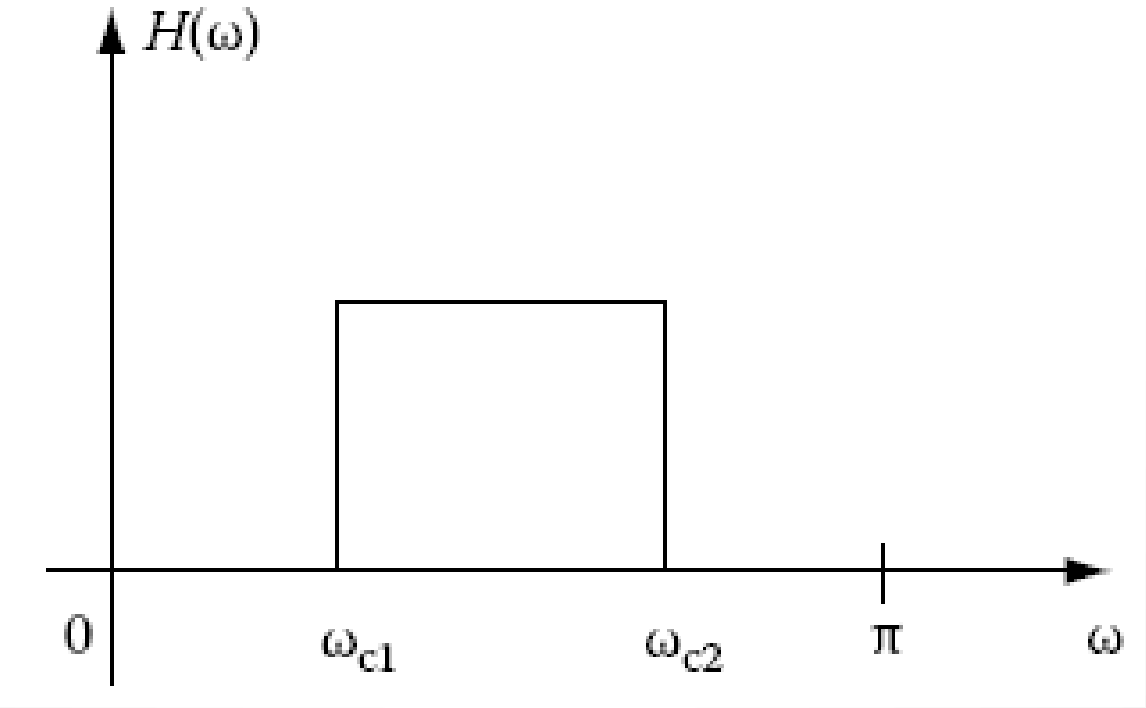
Especificaciones de diseño: Respuesta en Frecuencia

- Otros tipos de filtros ideales: pasa-altos



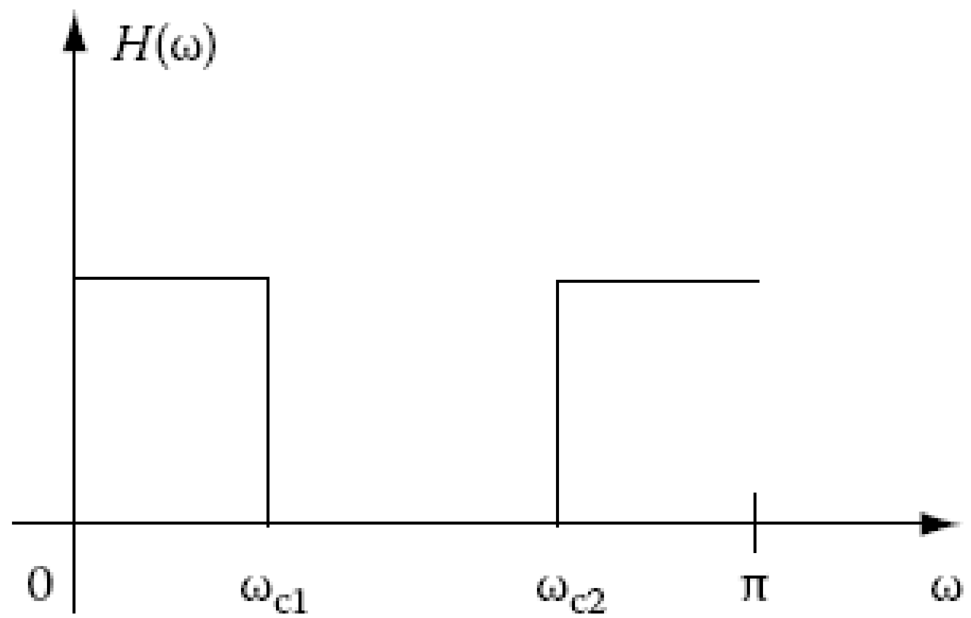
Especificaciones de diseño: Respuesta en Frecuencia

- Otros tipos de filtros ideales: pasa-banda



Especificaciones de diseño: Respuesta en Frecuencia

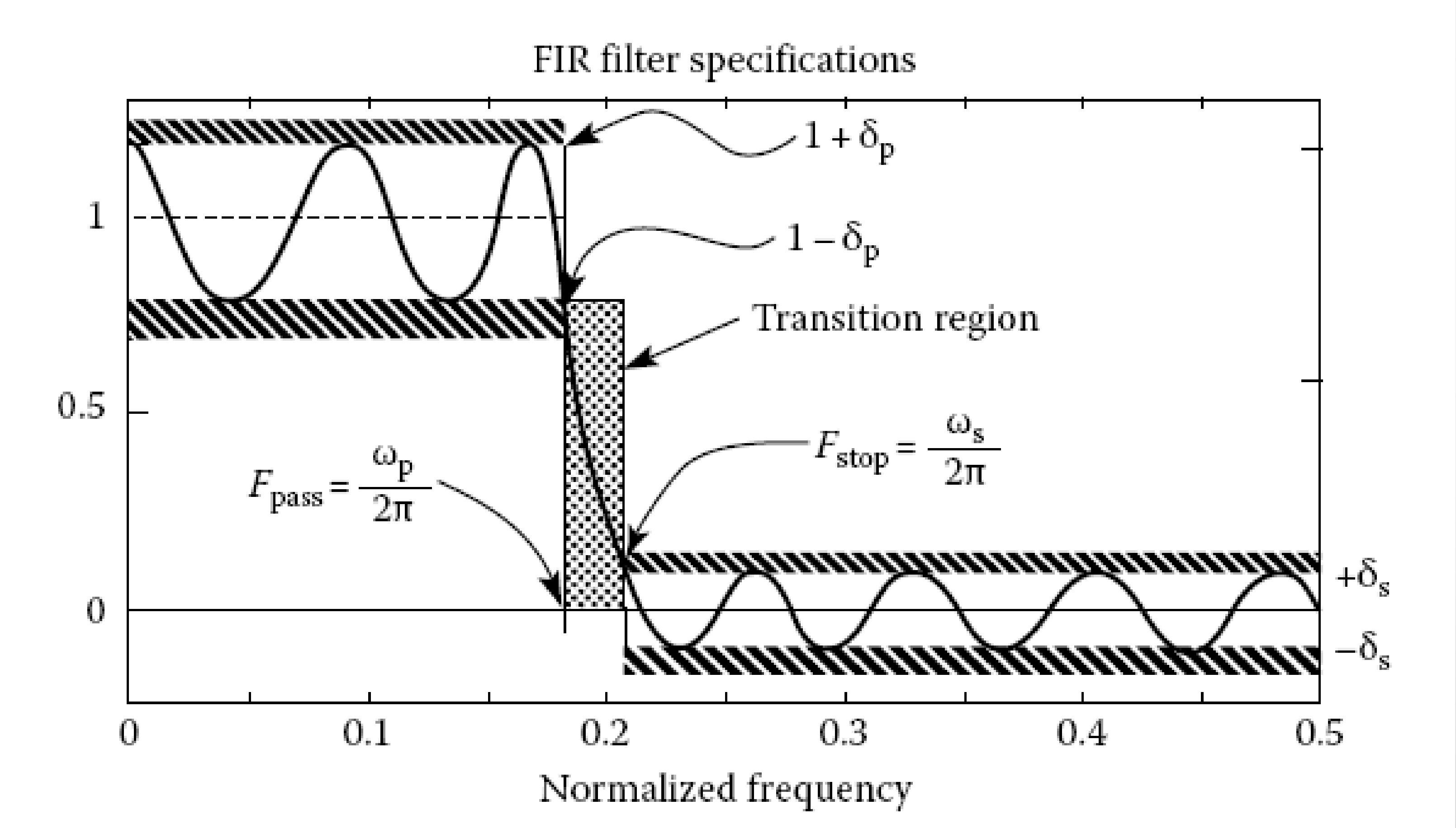
- Otros tipos de filtros ideales: elimina-banda



- Filtro notch: elimina una sola frecuencia (en realidad, un elimina-banda muy estrecho)

Especificaciones de diseño: Ajuste para filtros reales

- Una plantilla de diseño para un pasa-bajos es



-

Especificaciones de diseño: Ajuste para filtros reales

- ω_p frecuencia de corte de la banda de paso
- ω_s frecuencia de corte de la banda de atenuación
- $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$ ancho de la banda de transición
- δ_p riple de la banda de paso
- δ_s riple de la banda de atenucación

Especificaciones de diseño: Especificaciones de fase

- La respuesta de fase ideal es una recta (pendiente constante)

$$\measuredangle D(\omega) = -M\omega$$

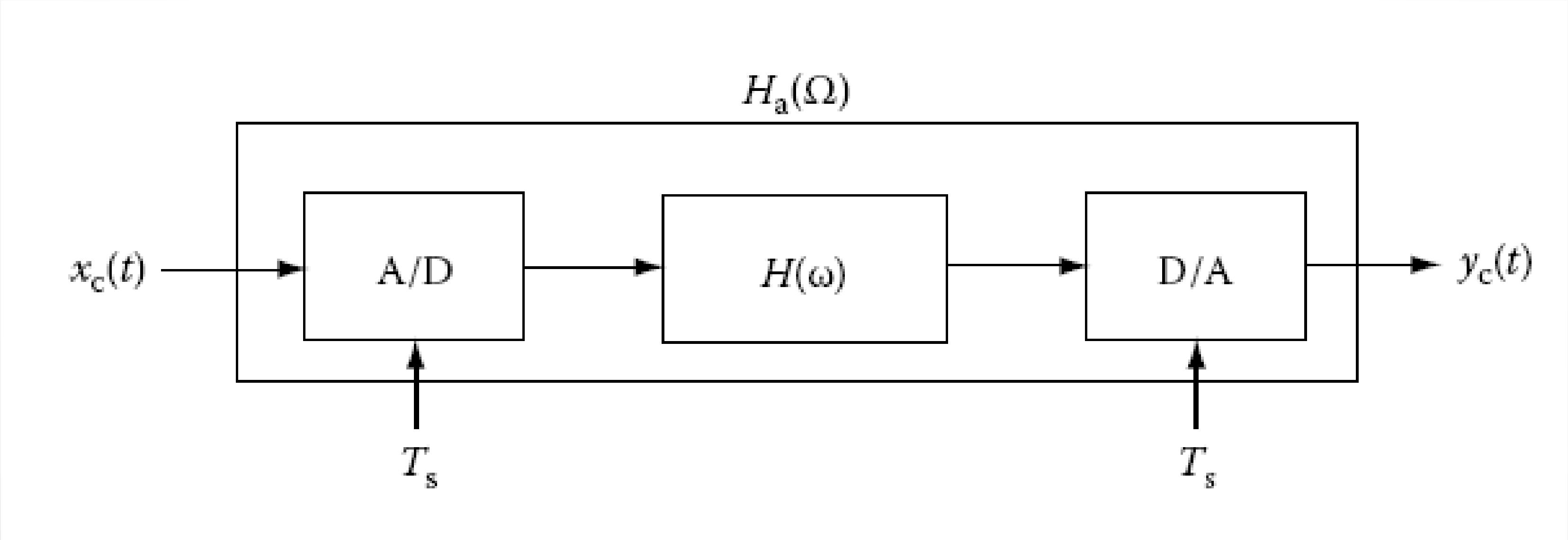
El parámetro M al atraso que provoca el filtro (en muestras). El error de fase es la tolerancia alrededor de la fase deseada:

$$|\measuredangle H(\omega) - \measuredangle D(\omega)| < \delta_\phi$$

Donde δ_ϕ es el máximo error tolerable

Especificaciones de diseño a partir del Filtrado Analógico

- Frecuentemente, las especificaciones de diseño no son dadas en el dominio digital



- $$\omega = \Omega T_s$$

Especificaciones de diseño: Definiendo una medida de error

- Una medida de error nos indica cuanto se desvia un filtro diseñado, $H(\omega)$, del filtro deseado, $D(\omega)$.
- El error punto a punto es

$$E(\omega) = [D(\omega) - H(\omega)]$$

- Debemos reducir $E(\omega)$ a una medida de error escalar (también llamada norma del error)
- Las siguientes son las normas de error más utilizadas…

Especificaciones de diseño: Definiendo una medida de error

- Error cuadrático medio (mean squared error - MSE) o norma L_2

$$E_2 = \left[\frac{1}{2\pi}\int_B |E(\omega)|^2 d\omega\right]^{1/2}$$

- Norma L_p

$$E_p = \left[\frac{1}{2\pi}\int_B |E(\omega)|^p d\omega\right]^{1/p}$$

- Chebyshev o norma L_∞

$$E_\infty = \max_{\omega \epsilon B} |E(\omega)|$$

Especificaciones de diseño: Definiendo una medida de error

- Una forma de tener más control del error en las diversas regiones del espectro es incluir una función de ponderación $W(\omega)$, como

$$E(\omega) = W(\omega)[D(\omega) - H(\omega)]$$

Seleccionando el tipo de filtro y orden

- Los filtros pueden ser clasificados en dos tipos:
  - Filtros de respuesta al impulso finita (Finite Impulse Response - FIR)
  - Filtros de respuesta al impulso infinita (Infinite Impulse Response - IIR)

- Decidir cual de los dos debe utiilizarse depende de muchos factores, entre ellos, el hardware a utilizar en la implementación, y las características de magnitud y fase deseadas
- Estos filtros son tan diferentes como los métodos utilizados para diseñarlos, por ello se debe decidir cuanto antes

Filtros FIR

- Su respuesta al impulso es finita. Es decir, para un filtro de longitud *N*,

$$h(n) \neq 0 \ \ para\, N_1 \leq n \leq N_2 = (N_1 + N - 1)$$

Si $N_1 \geq 0$, el filtro es causal.

- La respuesta en frecuencia es un polinomio de orden finito en $e^{j\omega}$, de la forma

$$H(\omega) = \sum_{n=N_1}^{N_2} h(n)(e^{j\omega})^{-n},$$

- Los *N* coeficientes de la respuesta al impulso son los parámetros a ser determinados

Filtros FIR

- Un filtro FIR es siempre estable. Se deduce de la función de transferencia:

$$H(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} h(n) z^{-n}$$

que tiene polos en cero u/o infinito

- Pueden ser diseñados filtros con fase lineal (simetría en la respuesta al impulso garantiza fase lineal)

(¿Cómo es la transformada de Fourier de una señal real y par?)

Efectos de la distorsión de fase

- Si en el diseño de filtros u otros sistemas de procesamiento de señales se desea pasar alguna banda de frecuencias inalteradas, se debe tener un a respuesta en frecuencia con:
  - Magnitud constante
  - Fase cero
- En sistemas causales, la fase cero no es posible, pero si fase lineal

Efectos de la distorsión de fase

- Para entender el efecto de la fase en un sistema lineal, primero consideramos un sistema con atraso ideal,

$$h_{id}[n] = \delta[n - n_d]$$

cuya respuesta en frecuencia es

$$H_{id}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}\text{, la cual}$$

$$|H_{id}(e^{j\omega})| = 1 \text{ y } \sphericalangle H_{id}(e^{j\omega}) = -\omega n_d$$

Una fase lineal equivale a un simple atraso, que generalmente no tiene consecuencias negativas o puede ser facilmente compensable introduciendo atrasos en otras partes del sistema.

Efectos de la distorsión de fase

- Una medida conveniente de la linealidad de la fase es el atraso de grupo que se define como la derivada de la fase con respecto a la frecuencia.

Filtros FIR

- Son realizables utilizando la operación convolución, o en terminos de la FFT en el dominio de la frecuencia.
- Si se implementan sin realimentación, son insensibles al ruido de redondeo. Pero ruido debido a la cuantización de coeficientes puede ser un problema en filtros largos (Solución: evitar la estructura forma directa, utilizar estructuras en cascada)
- Para alcanzar bandas de transición estrechas, muchos coeficientes son necesarios, requiriendo tiempo de computo elevado para el diseño y operación

Filtros FIR

- Se establecen compromisos entre los diferentes parámetros de diseño. Ejemplo:

$$(N-1)\Delta\omega \approx \frac{-20\log_{10}\sqrt{\delta_p\delta_s}-13}{2{,}324}$$

Filtros IIR

- $h(n) \neq 0$ para $N_0 \leq n \leq \infty$
- Para poder ser implementado, la respuesta en frecuencia debe ser una función racional, como

$$H(\omega) = \frac{B(\omega)}{A(\omega)} = e^{-j\omega N_0} \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}}$$

Los coeficientes son los parámetros a diseñar

- Pueden volverse inestables por ruidos en la cuantización de los coeficientes
- No es posible diseñar filtros IIR causales con fase lineal.

Filtros IIR

- La convolución no puede ser utilizada para implementar IIR
- Pueden alcanzar especificaciones de diseño con ordenes mucho menores a los de un filtro FIR
- Los métodos de diseño están basados en el diseño de filtros analógicos. Existen fórmulas exactas para determinar el orden