Procesamiento de Señales

Unidad 3: Filtros digitales, Fase de la respuesta en frecuencia

Fase de la Respuesta en Frecuencia

- En general, un filtro FIR con coeficientes simétricos tiene una respuesta en fase lineal, dada por:

$$\angle H(e^{j\Omega}) = -M\Omega + \text{posiblemente } 180°$$

- Para demostrarlo, partimos de la definición de la transformada de Fourier de tiempo discreto

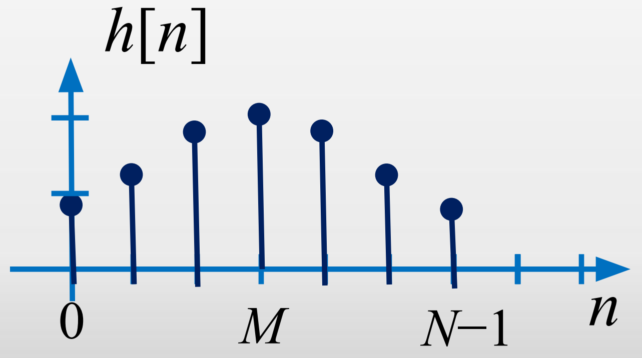
$$H(e^{j\Omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-jn\Omega}$$

Fase Lineal y Simetría

- Consideramos la simetría de los coeficientes con respecto al origen y desplegando la sumatoria:

$$H(e^{j\Omega}) = h[0](1+e^{-j(N-1)\Omega}) + h[1](e^{-j\Omega} + e^{-j(N-2)\Omega}) + \ldots$$
$$+h[n](e^{-nj\Omega} + e^{-j(N-1-n)\Omega}) + \ldots + h[M-1](e^{-j(M-1)\Omega} + e^{-j(N-1-M+1)\Omega}) + h[M]e^{-jM\Omega}$$

- *M* es el centro de simetría igual a $M = \lfloor N/2 \rfloor$ (el entero inferior), considerando *N* impar, o $N = 2M+1$



Fase Lineal y Simetría

- Sacando como factor común $e^{-jM\Omega}$ resulta:

$$H(e^{j\Omega}) = \Big\{ h[0](e^{jM\Omega} + e^{-jM\Omega}) + h[1](e^{j(M-1)\Omega} + e^{-j(M-1)\Omega}) + \ldots$$

$$+ h[n](e^{-(n-M)j\Omega} + e^{j(n-M)\Omega}) + \ldots + h[M-1](e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}) + h[M] \Big\} e^{-jM\Omega}$$

- Considerando la fórmula de Euler

$$H(e^{j\Omega}) = \left\{ h[M] + \sum_{n=0}^{M-1} 2h[n]\cos[(M-n)\Omega] \right\} e^{-jM\Omega}$$

- Donde se verifica $\angle H(e^{j\Omega}) = -M\Omega + \text{posiblemente } 180°$

Fase Lineal

- Para propiciar un mejor entendimiento de la propiedad de fase lineal, consideremos una senoide como señal de entrada:

$$x[n] = Asen(n\Omega)$$

- La salida está dada por

$$y[n] = A\left|H(e^{j\Omega})\right| sen[n\Omega + \angle H(e^{j\Omega})]$$

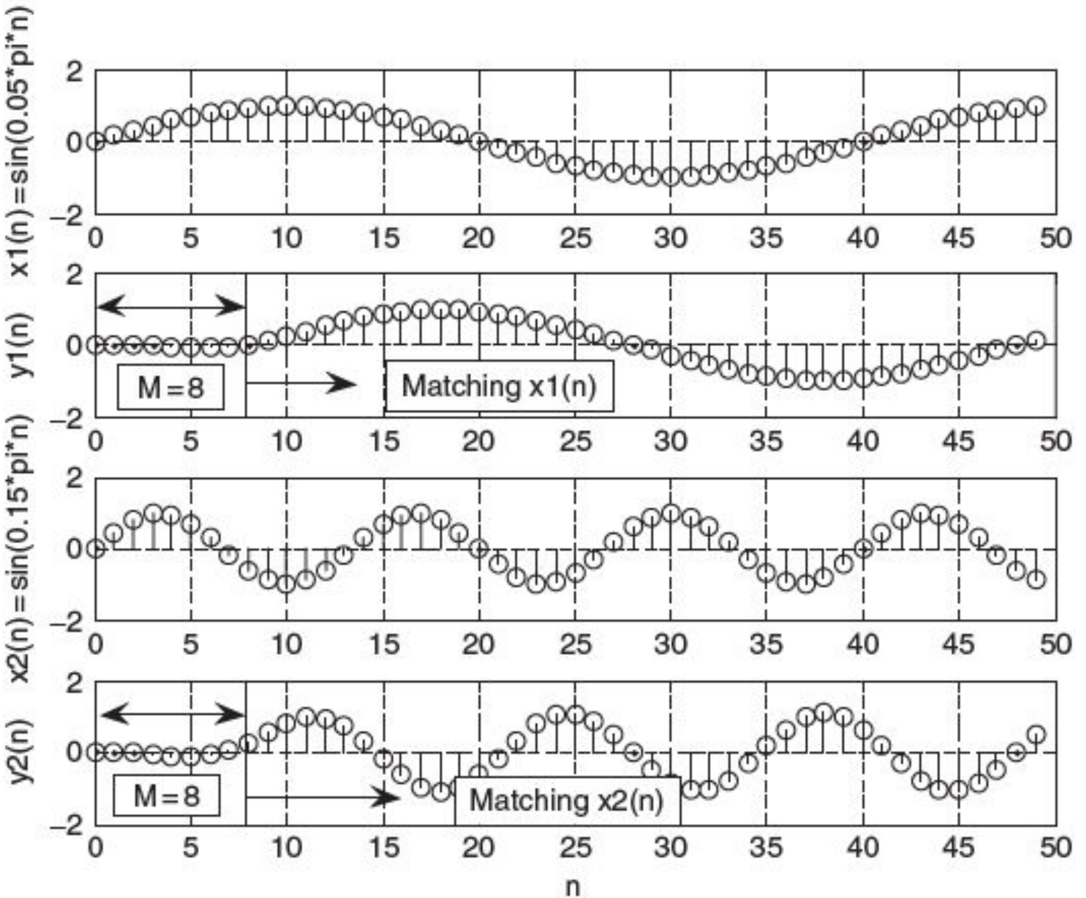
- Si la fase es lineal, $\angle H(e^{j\Omega}) = -M\Omega$, resulta:

$$y[n] = A\left|H(e^{j\Omega})\right| sen[\Omega(n - M)]$$

Lo que indica que todas las componentes de frecuencia atraviesan el filtro con el mismo atraso de *M* muestras

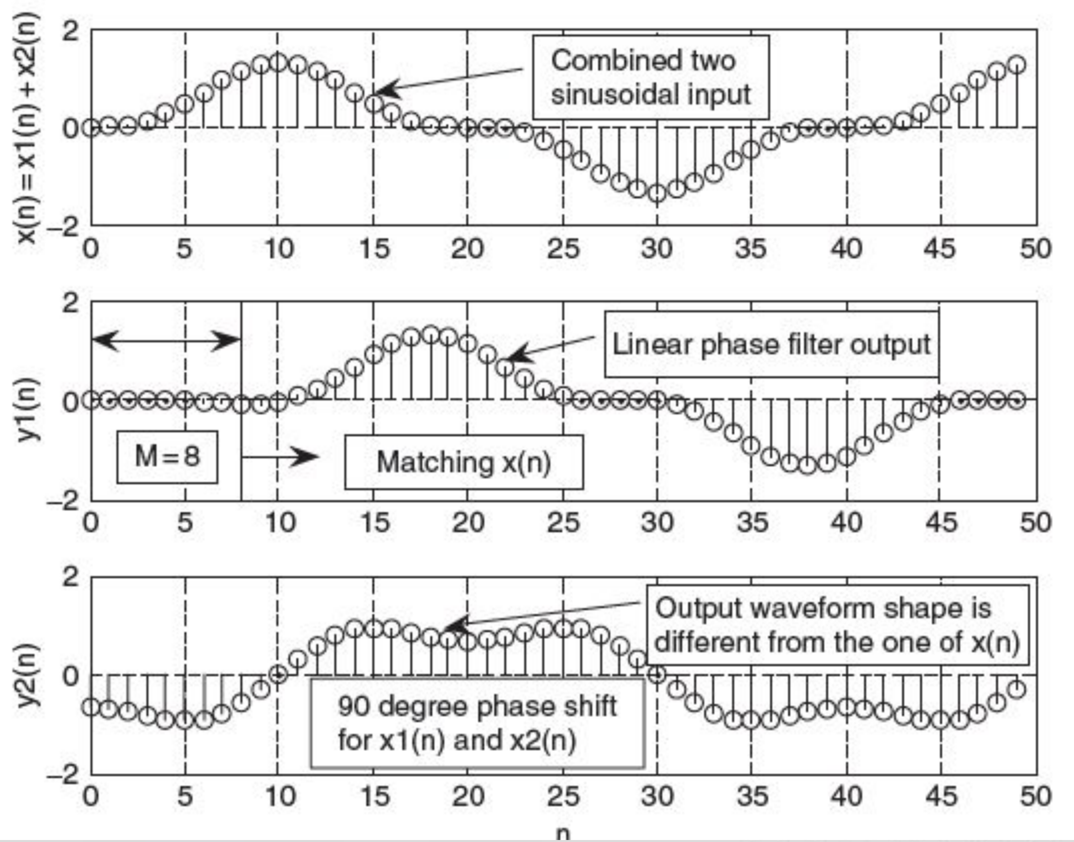
Ejemplo de Fase Lineal

- Ejemplo del efecto de la fase lineal de un filtro FIR de 17 coeficientes



Distorsión de Fase

Comparación entre respuestas en fase lineal y no lineal:
Para el caso no lineal, x1(n) se desplaza en 10 muestras, mientras que x2(n), en 10/3 muestras. Es evidente la distorsión en la forma de onda, también puede ser audible



Cuantificando la distorsión de fase

Una medida conveniente del efecto de fase es el **retraso de grupo** que se define como la derivada de la fase con respecto a la frecuencia.

Se puede interpretar como el retraso de la amplitud de las envolventes de varias componentes senoidales y es función de la frecuencia de cada componente

$$T_g = \frac{d[\angle H(e^{j\omega})]}{d\omega}$$

Cuantificando la distorsión de fase

El retraso de fase, es la magnitud temporal que el filtro incorpora como retarso a cada componente. Matemáticamente, se define como el cociente cambiado de signo de la fase con respecto a la frecuencia

$$T_f = \frac{\angle H(e^{j\omega})}{\omega}$$

Phase unwrapping

- Al trabajar con retraso de fase, es necesario “desenredar” la respuesta en fase. Esto consiste en incorporar adecuadamente múltiplos de 2π de forma tal que se vea continua. Matlab usa el comando unwrap()

Phase unwrapping