

Diseño de Filtros con Respuesta al Impulso Infinita (IIR)

Resumen de las Características Básicas de Filtros IIR

- Los filtros IIR realizables son caracterizados por la siguiente ecuación recursiva:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^N a_k x(n-k) - \sum_{k=1}^M b_k y(n-k)$$

- La función de transferencia está dada por:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}} = \frac{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M b_k z^{-k}}$$

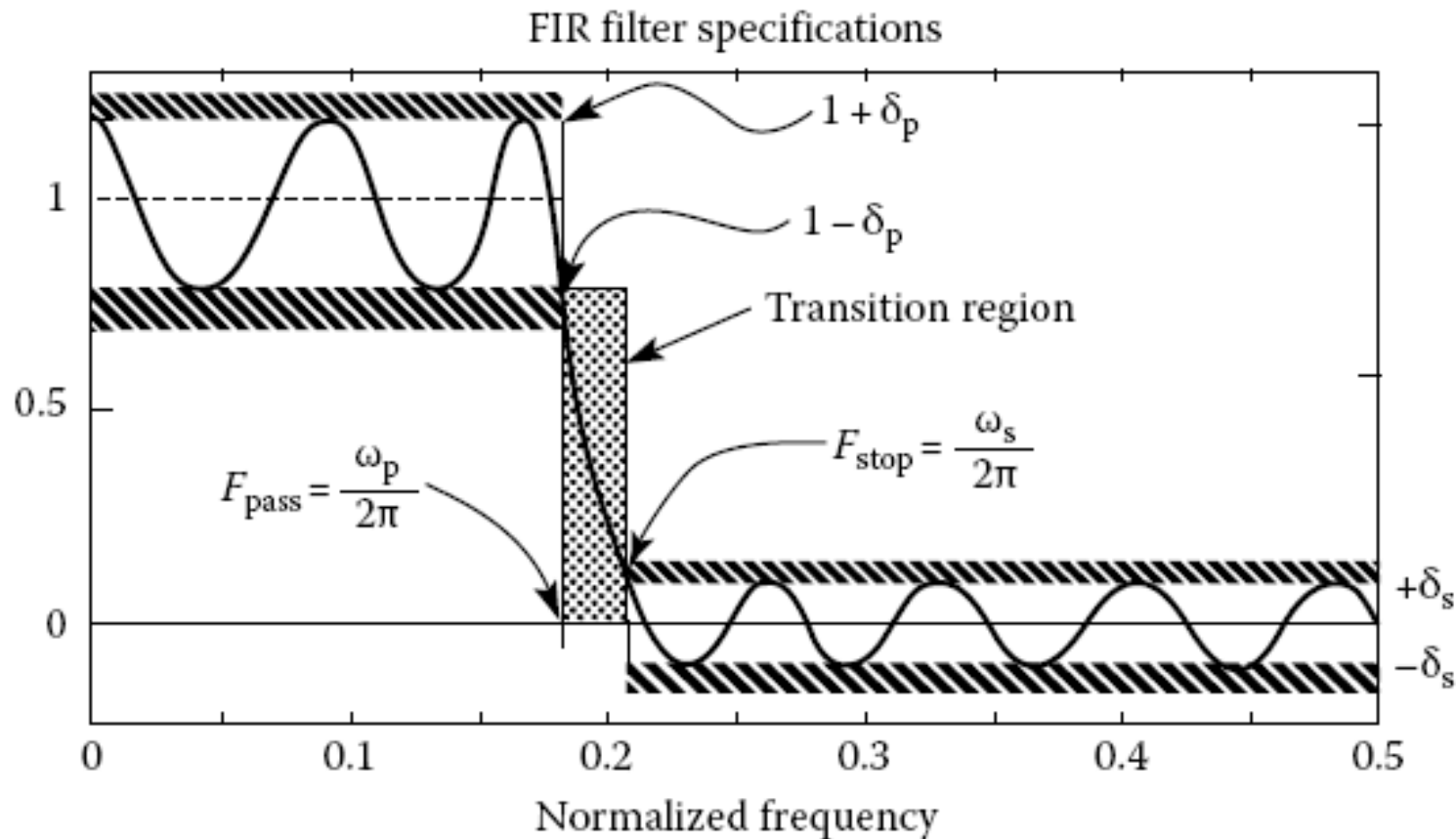
- Diseñar el filtro consiste en determinar los valores más apropiados para los coeficientes

Pasos de Diseño

- Especificaciones del filtro. Ejemplo: pasa-bajos, pasa-altos o pasa-banda, ripple y atenuación necesarios
- Cálculo de los coeficientes
- Realización: convertir la función de transferencia en una estructura de filtrado apropiada
- Análisis de errores: por el método de cálculo o efectos de longitud de palabra
- Implementación

Especificaciones de Diseño

- Una plantilla de diseño para un pasa-bajos es



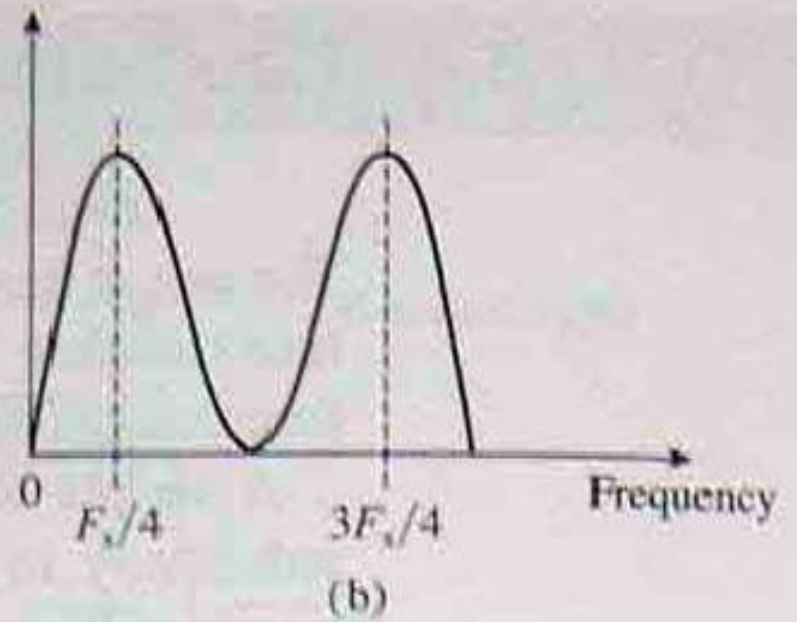
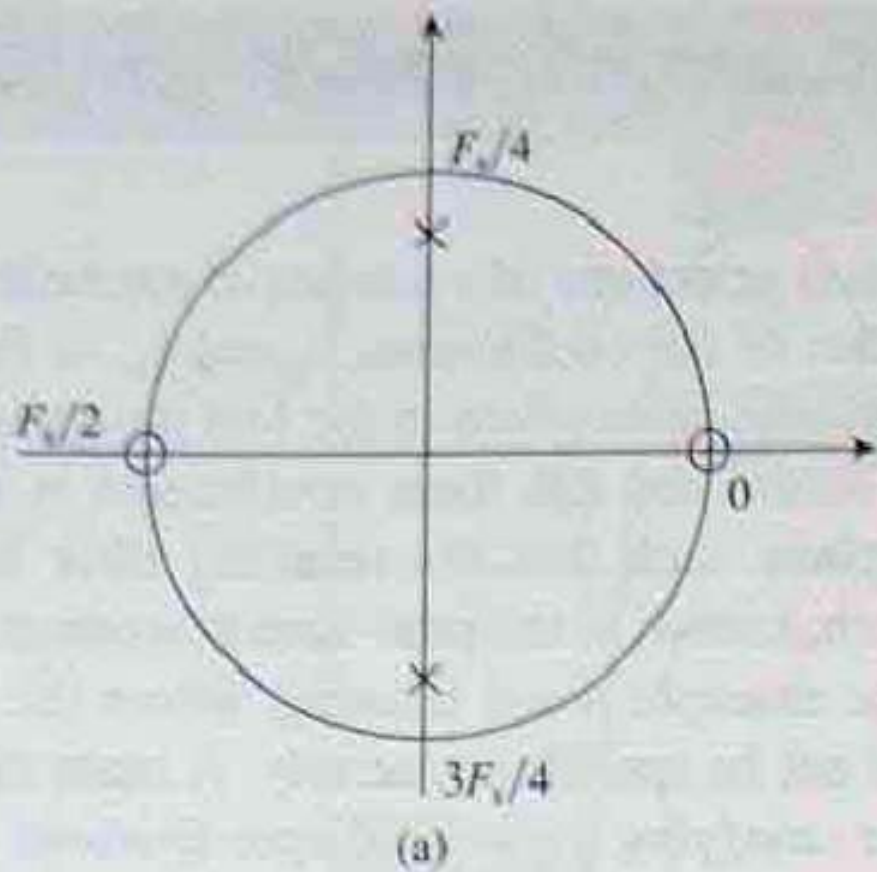
Métodos de Cálculo de los Coeficientes

- Método de ubicación de polos y ceros
- Conversión de filtros analógicos a su equivalente digital:
 - Invariancia al impulso
 - Transformada bilineal

Ubicación de polos y ceros

- Se colocan los polos y ceros en el plano Z de forma tal que el filtro resultante tenga la respuesta en frecuencia deseada
- Se basa en:
 - Un cero colocado en cierto punto del plano Z dará una respuesta en frecuencia con un valle en la frecuencia más cercana a dicho punto
 - Un polo produce un pico en ese punto
 - La magnitud de los picos y valles es controlada por la distancia de polos y ceros al círculo unitario

Ejemplo



Ejemplo

- Se requiere un filtro pasabanda que cumpla con las siguientes especificaciones:
 - Rechazo completo de la señal de cc y de 250Hz
 - Una banda de paso estrecha, de 10 Hz, centrada en 125 Hz

Se asume una frecuencia de muestreo de 500Hz

Solución

- Primero, se determina donde colocar los polos y los ceros:
 - Ceros: a 0 y 250Hz, o sea, a 0° y $360^\circ \times 250/500 = 180^\circ$, sobre el círculo unitario
 - Para tener la banda de paso centrada en 125Hz, necesitamos un polo a esa frecuencia:
 $\pm 360^\circ \times 125/500 = \pm 90^\circ$. Para asegurar que los coeficientes sean reales, necesitamos polos complejos conjugados

- El radio del polo es determinado por el ancho de banda deseado:

$$r = 1 - (bw / F_s) \pi, \text{ para } r > 0,9$$

Para nuestro ejemplo

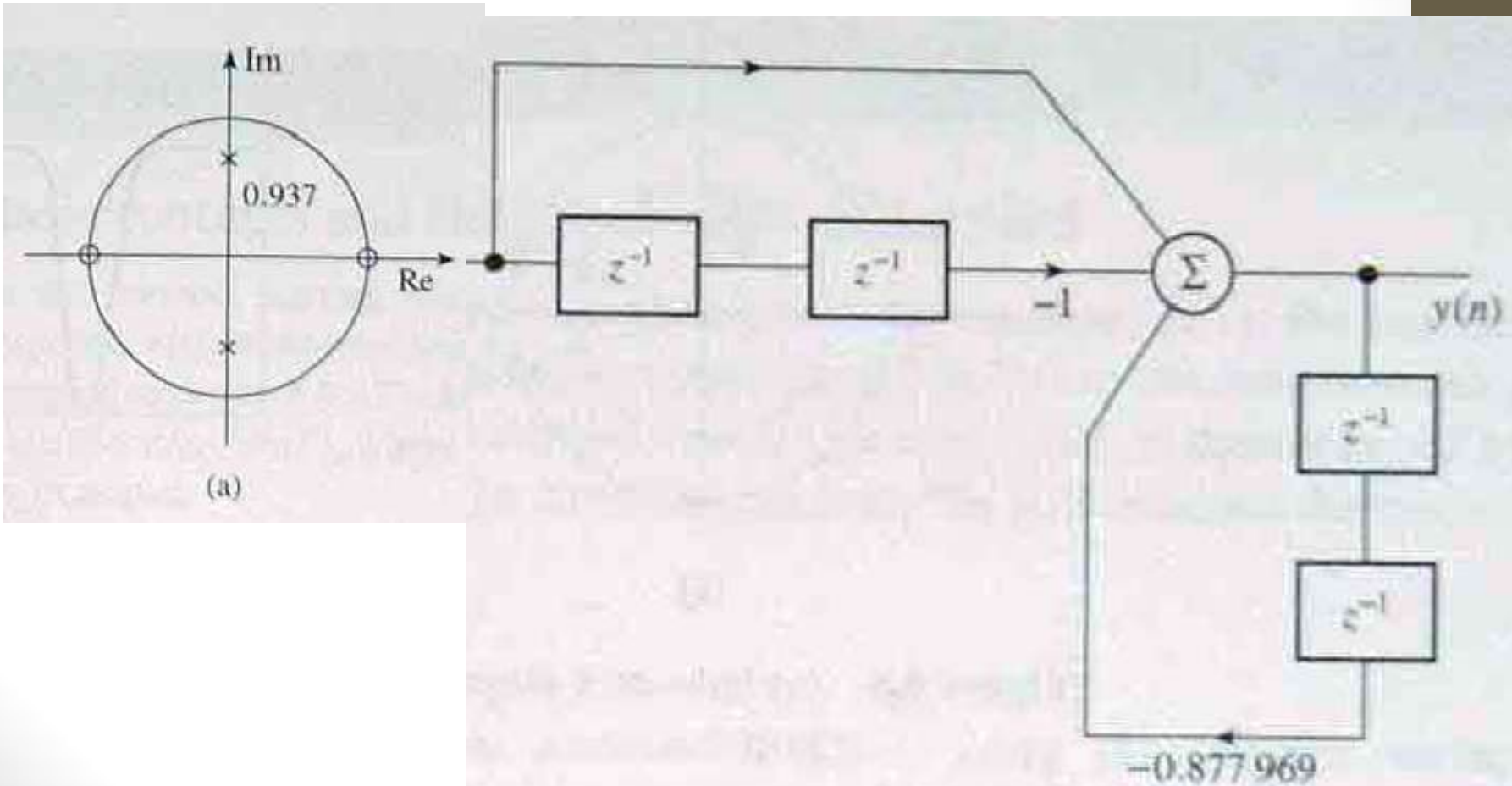
$$r = 1 - (10 / 500) \pi = 0,937$$

La función de transferencia resultantes es

$$H(z) = \frac{(z-1)(z+1)}{(z - re^{j\pi/2})(z - re^{-j\pi/2})} = \frac{1 - z^{-2}}{1 + 0,877969z^{-2}}$$

- La ecuación a diferencias resultante es:

$$y(n] = -0,877969 y[n-2] + x[n] - x[n-2]$$



Ejemplo2:

- Calcular un filtro eliminabanda con las siguientes características:

Frecuencia de rechazo	50 Hz
Ancho de banda de rechazo (3dB)	± 5 Hz
Frecuencia de muestreo	500 Hz

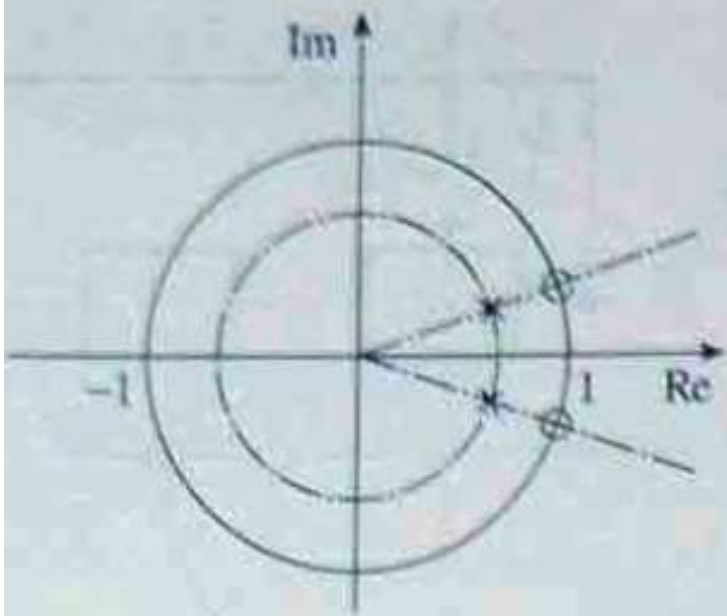
Solución

- Para rechazar la componente de 50 Hz, colocamos un par de ceros complejos conjugados en los ángulos

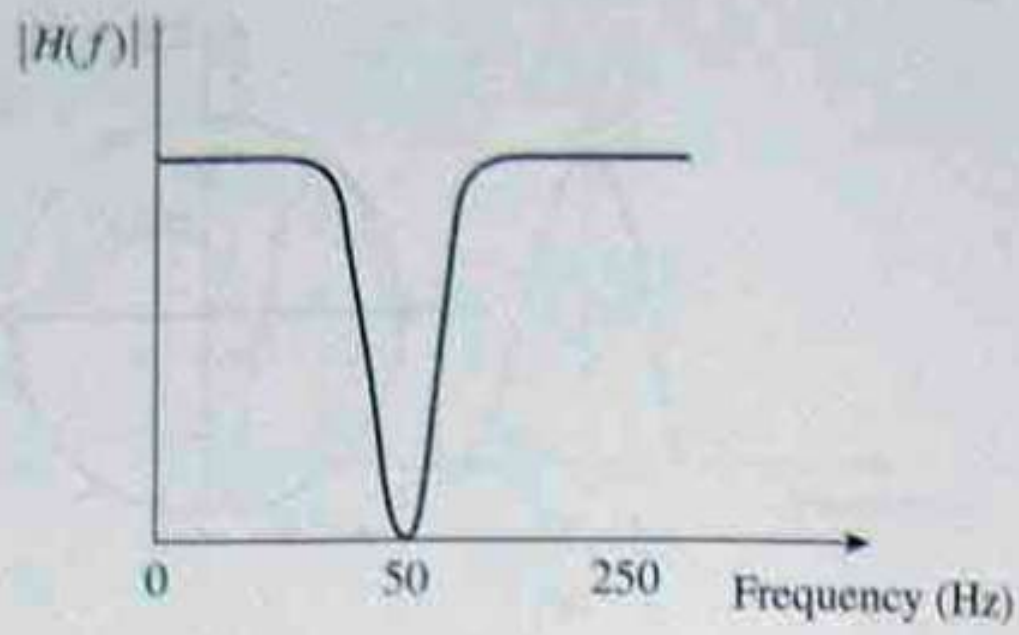
$$360^\circ \times 50/500 = \pm 36^\circ$$

Para lograr una banda de transición pequeña, se coloca un par de polos en el mismo ángulo que los ceros y con un radio determinado por la expresión anterior, resultando

$$H(z) = \frac{(z - e^{-j36^\circ})(z - e^{j36^\circ})}{(z - 0,937e^{-j36^\circ})(z - 0,937e^{j36^\circ})} = \frac{1 - 1,6180z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1,5161z^{-1} + 0,8780z^{-2}}$$



(a)



(b)

Conversión de filtros analógicos en su equivalente digital

- Es el procedimiento más exitoso
- Se basa en la existencia de una enorme cantidad de conocimiento sobre el diseño de filtros analógicos
- Los dos métodos analizados son:
 - Invariancia al impulso
 - Transformada bilineal

Invariancia al Impulso

- Respuesta al impulso del filtro digital = respuesta al impulso muestreada del filtro analógico:

- Dado

$$H_a(s) \rightarrow h_a(t)$$

- Con

$$h_a(t) \xrightarrow{\delta_{\Delta t}(t)} h_a(k\Delta t)$$

$$\delta_{\Delta t}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta t)$$

- Filtro digital:

- Siendo

$$H(z) = Z[h_a(k\Delta t)]$$

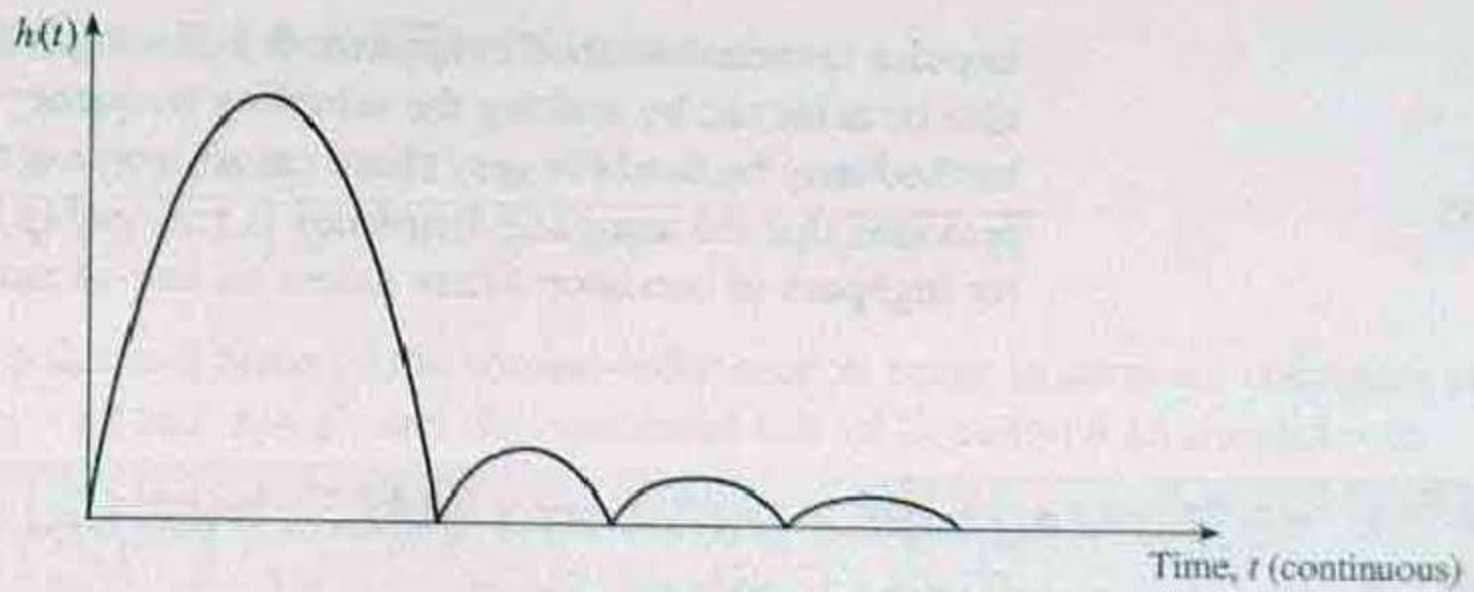
- Así,

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j2\pi f\Delta t}}$$

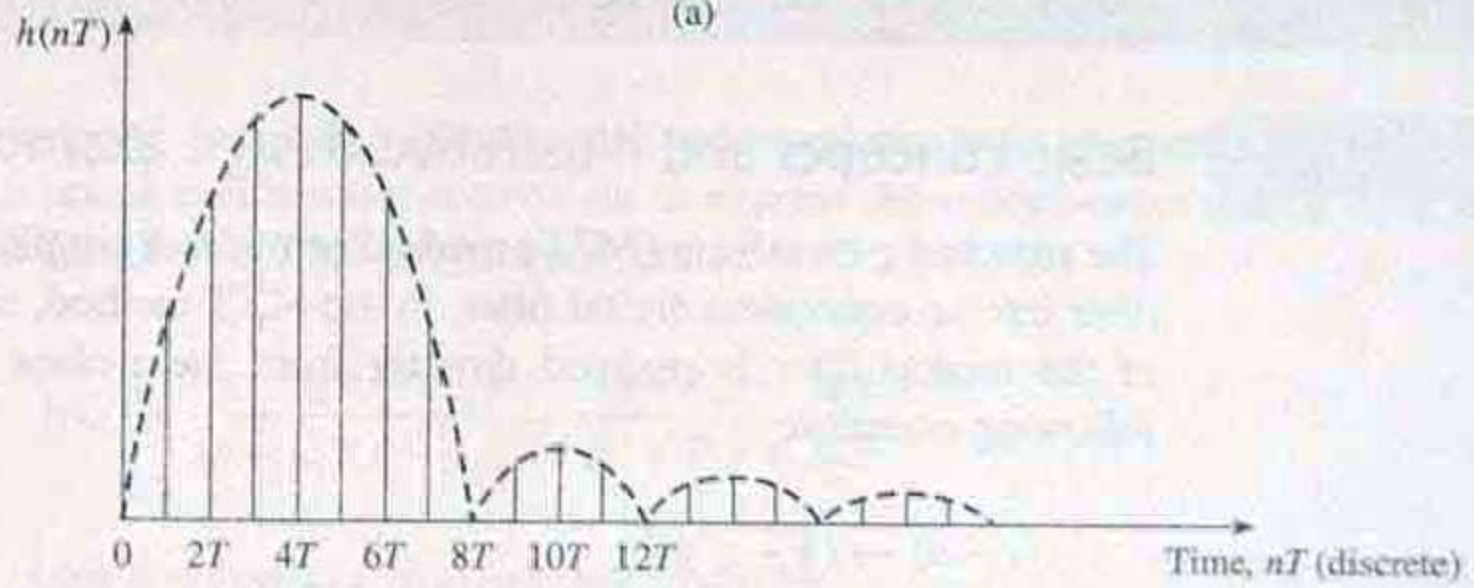
Valuado en la
circunferencia de radio 1

$$H(e^{j\omega}) = H_a(f) * \overbrace{\frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{\Delta t}\right)}^{\text{TF de } \delta_{\Delta t}(t)}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_a\left(f - \frac{n}{\Delta t}\right)$$



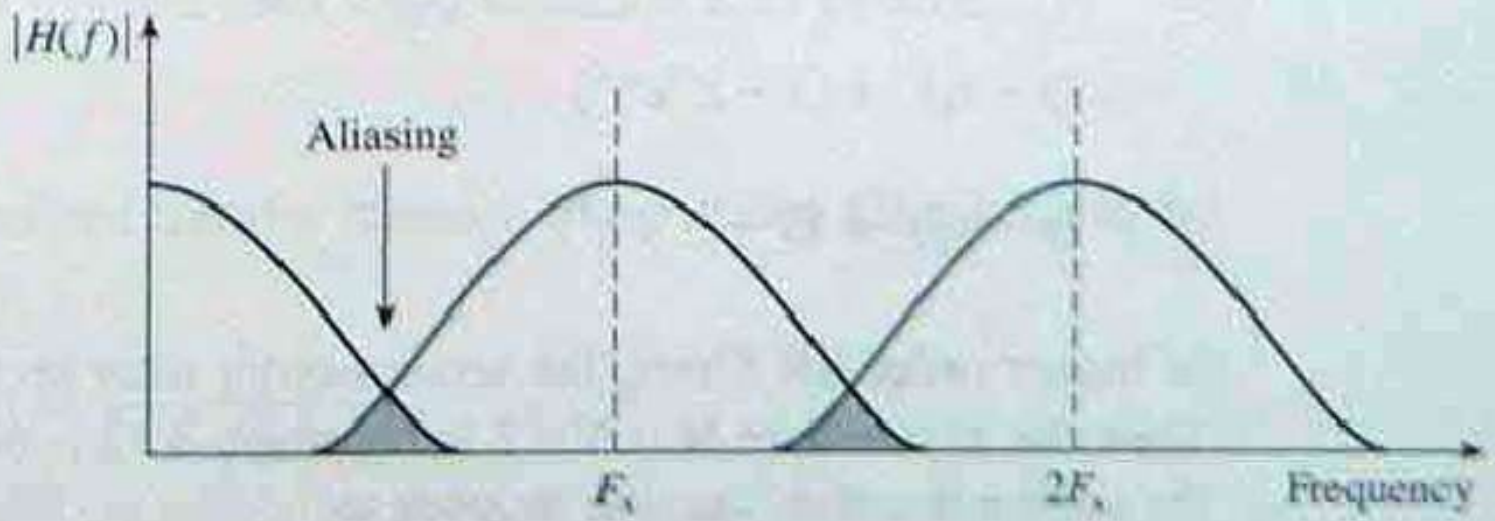
(a)



(b)



(a)



(b)

Características

- El principal problema es el fenómeno de solapamiento (aliasing)
- La estabilidad y el orden del filtro son mantenidas

Ejemplo

- Digitalizar, utilizando el método de invariancia al impulso, la siguiente FT

$$H(s) = \frac{C}{s - p}$$

- La respuesta al impulso es dada por

$$h(t) = L^{-1}[H(s)] = L^{-1}\left(\frac{C}{s - p}\right) = Ce^{pt}$$

- Muestreando la respuesta al impulso

$$h(nT) = h(t)|_{t=nT} = Ce^{pnT}$$

- Aplicando la transformada Z

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} Ce^{pnT} z^{-n} = \frac{C}{1 - e^{pT} z^{-1}}$$

- Concluimos

$$\frac{C}{s - p} \rightarrow \frac{C}{1 - e^{pT} z^{-1}}$$

- Para aplicar el método de invariancia al impulso de un filtro IIR de alto orden con polos simples, primero se expande en fracciones parciales

$$H(s) = \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \dots + \frac{C_M}{s - p_M} = \sum_{k=1}^M \frac{C_k}{s - p_k}$$

- Luego aplicar TZ

$$\sum_{k=1}^M \frac{C_k}{s - p_k} \rightarrow \sum_{k=1}^M \frac{C_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

- Filtros IIR son normalmente implementados como la cascada de varias secciones de 2do orden. Así, la siguiente relación resulta interesante:

$$\frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} \rightarrow \frac{C_1}{1 - e^{p_1 T} z^{-1}} + \frac{C_2}{1 - e^{p_2 T} z^{-1}} =$$

$$\frac{C_1 + C_2 - (C_1 e^{p_2 T} + C_2 e^{p_1 T}) z^{-1}}{1 - (e^{p_1 T} + e^{p_2 T}) z^{-1} + e^{(p_1 + p_2) T} z^{-2}}$$

- Si los polos son complejos conjugados

$$\frac{C_1}{1 - e^{p_1 T} z^{-1}} + \frac{C_1^*}{1 - e^{p_1^* T} z^{-1}} =$$

$$\frac{2C_r - [C_r \cos(p_i T) + C_i \text{sen}(p_i T)] 2e^{p_r T} z^{-1}}{1 - 2e^{p_r T} \cos(p_i T) z^{-1} + e^{p_r T} z^{-2}}$$

Ejemplo

- Se requiere un filtro digital que aproxime un filtro analógico con la siguiente función de transferencia

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$

- Utilice el método de invariancia al impulso con una frecuencia de corte (3dB) de 150Hz y una frecuencia de muestreo de 1,28 KHz

Solución

- Como la frecuencia de corte de esta FT es 1 rad/s, debemos desnormalizarla para tener la frecuencia de corte en $\alpha = 2\pi \times 150 = 942,48$ rad/s, substituyendo s por s/α

$$H'(s) = H(s)\Big|_{s=s/\alpha} = \frac{\alpha^2}{s^2 + \sqrt{2}\alpha s + \alpha^2} = \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2}$$

$$p_1 = \frac{-\sqrt{2}\alpha(1-j)}{2} = -666,4324(1-j), \quad p_2 = p_1^*$$

$$C_1 = -\frac{\alpha}{\sqrt{2}} j = -666,4324; \quad C_2 = C_1^*$$

- Substituyendo en la ecuación para polos complejos conjugados:

$$H(z) = \frac{393,926z^{-1}}{1 - 1,0308z^{-1} + 0,3530z^{-2}}$$

- Si se substituye $z = e^{j\omega T}$ y se evalúa en frecuencia 0

$$H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=0} = \frac{393,926}{1 - 1,0308 + 0,3530} = 1223$$

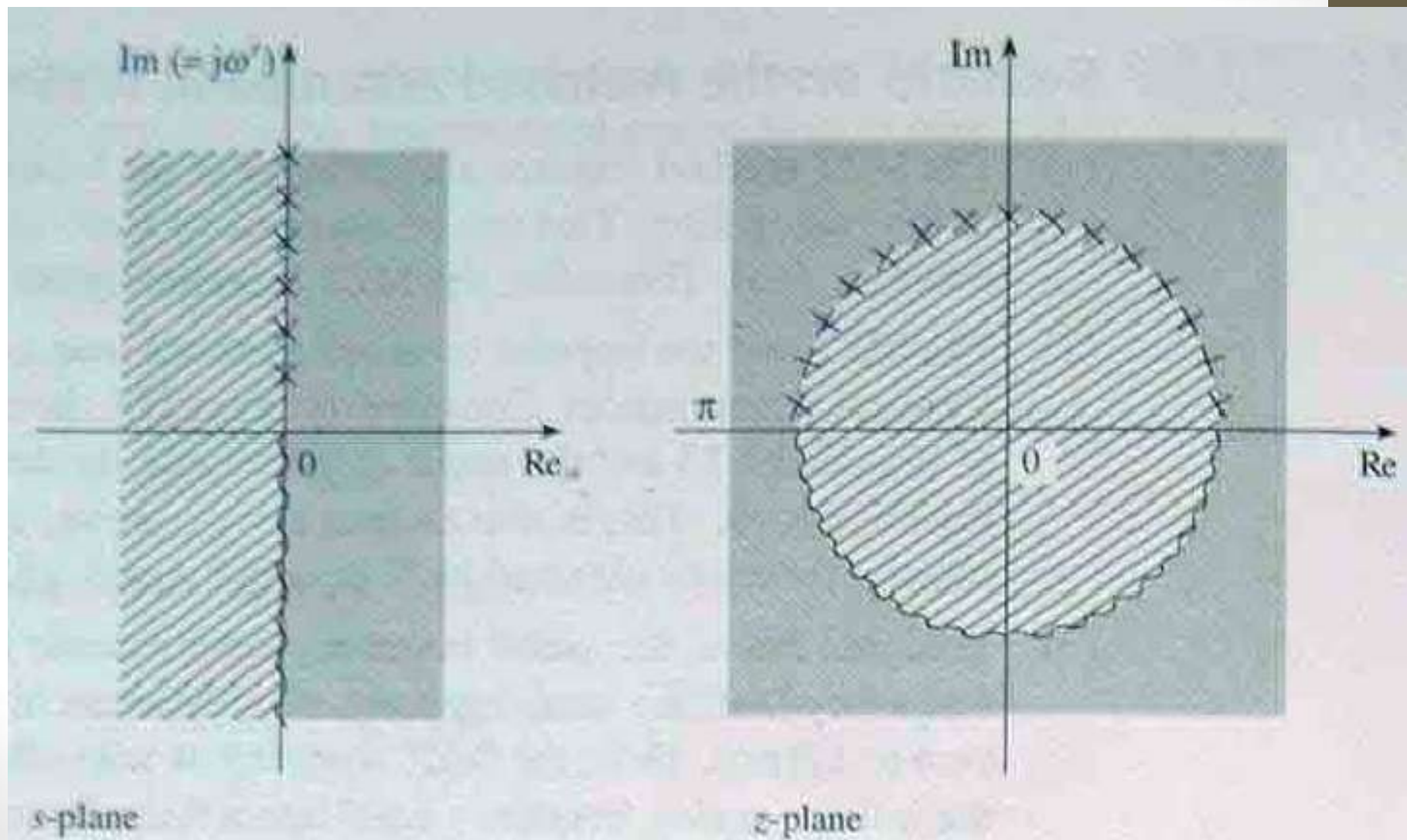
- Esta alta ganancia es una característica del método y puede llevar a saturaciones en la implementación. Como su valor es siempre muy próximo a la frecuencia, se divide por F_s (ver ecuación de convolución en la frecuencia)

Transformada bilineal

- Es el método más importante para obtener los coeficientes del filtro IIR
- Se basa en la substitución

$$s = k \frac{z-1}{z+1}, \text{ con } k = \frac{2}{T} \text{ o } 1$$

Mapeo S a Z



Características

- Ventajas:
 - No existe solapamiento de espectros
 - Un filtro analógico estable lleva a un filtro digital estable (por la región mapeada)
 - Buen aprovechamiento del plano z
- Desventajas:
 - Lleva a una relación no lineal entre las frecuencias (altera significativamente la fase)

Relación entre frecuencias

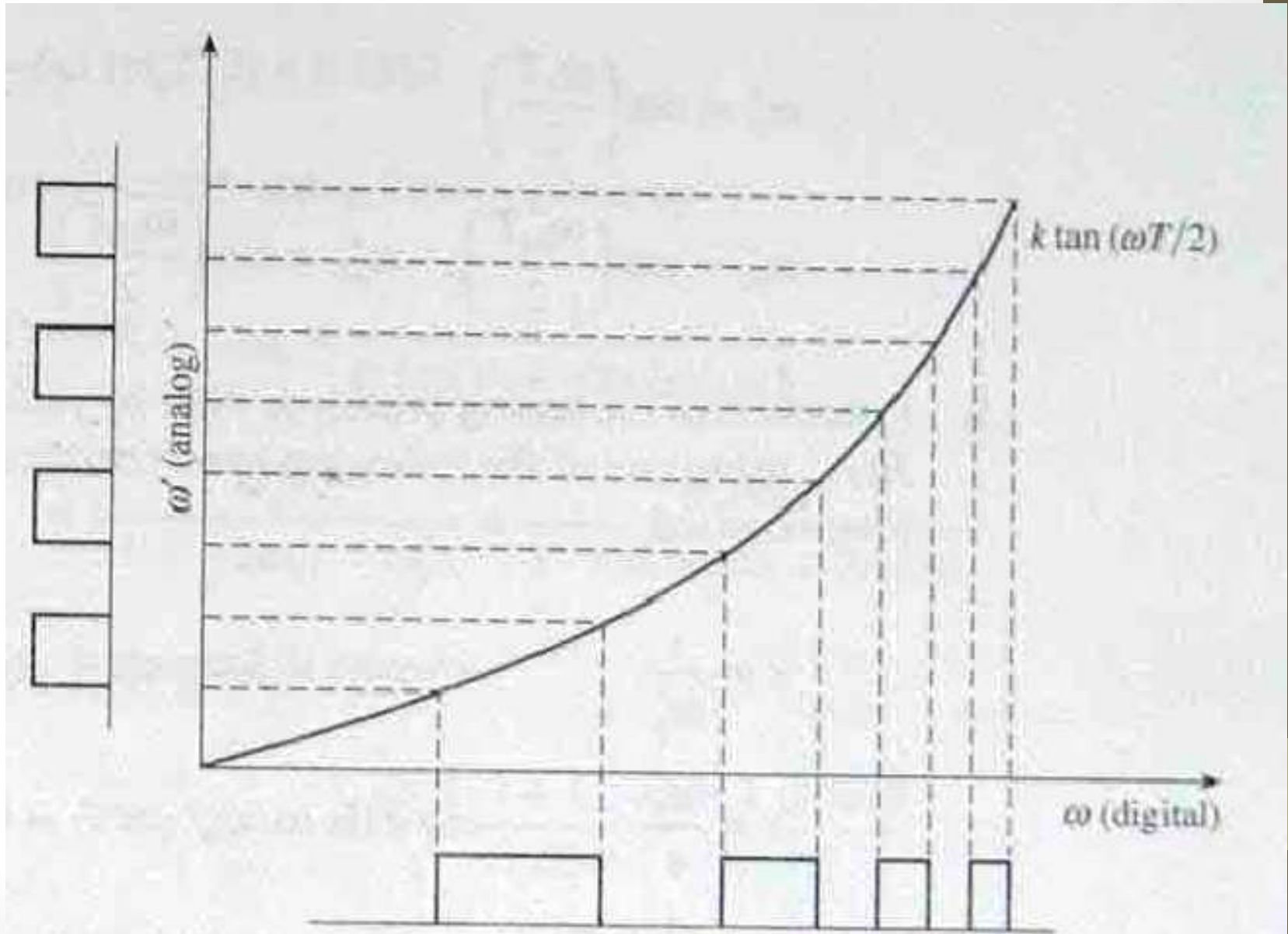
- Considerando que el eje imaginario del plano s se mapea en el círculo unitario del plano z , sustituimos $s = j\omega_a$ y $z = e^{j\omega_d}$

donde ω_a es la frecuencia angular del filtro analógico de partida y ω_d es la frecuencia angular digital del filtro resultante

$$s = k \frac{z-1}{z+1} \rightarrow j\omega_a = k \frac{e^{j\omega_d} - 1}{e^{j\omega_d} + 1} \rightarrow k \frac{e^{j\omega_d} - 1}{e^{j\omega_d} + 1} \cdot \frac{e^{-j\frac{\omega_d}{2}}}{e^{-j\frac{\omega_d}{2}}}$$

$\omega_a = k \tan\left(\frac{\omega_e T}{2}\right)$ siendo ω_e la frecuencia analógica equivalente del filtro digital resultante

Relación entre frecuencias



Procedimiento

- (1) Determinar un filtro analógico adecuado (normalizado)
- (2) Determinar la frecuencia de corte del filtro digital ω_{ec}
- (3) Obtener la frecuencia de corte del filtro analógico:

$$\omega_{ac} = k \tan\left(\frac{\omega_{ec}T}{2}\right)$$

- (4) Desnormalizar el filtro analógico escalando en frecuencia utilizando una de las siguientes transformaciones dependiendo del filtro requerido

$$s = \frac{s}{\omega'_p} \text{ pasabajos a pasabajos}$$

$$s = \frac{\omega'_p}{s} \text{ pasabajos a pasaaltos}$$

$$s = \frac{s^2 + \omega_o^2}{W_s} \text{ pasabajos a pasabanda}$$

$$s = \frac{W_s}{s^2 + \omega_o^2} \text{ pasabajos a eliminabanda}$$

$$\omega_o^2 = \omega'_{p1}\omega'_{p2} \quad W = \omega'_{p2} - \omega'_{p1}$$

(5) Aplicar transformación bilineal para obtener el filtro digital deseado

Ejemplo

- Obtener el equivalente digital de un filtro RC. Asumir frecuencia de muestreo de 150 Hz y 30 Hz de frecuencia de corte

Solución:

$$(1) \quad H(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$(2) \quad \omega_{ec} = 2\pi \times 30 \text{ rad}$$

$$(3) \quad \omega_{ac} = \tan(\omega_{ec}T / 2) = \tan\left[2\pi \times 30 \times \frac{1}{150 \times 2}\right] = 0,7265$$

$$(4) \quad H'(s) = H(s) \Big|_{s \rightarrow s/0,7265} = \frac{1}{s / 0,7265 + 1} = \frac{0,7265}{s + 0,7265}$$

$$(5) \quad H(z) = H'(s) \Big|_{s=(z-1)/(z+1)} = \frac{0,7265(1+z)}{(1+0,7265)z + 0,7265 - 1}$$

$$H(z) = \frac{0,4208(1+z^{-1})}{1-0,1584z^{-1}}$$

La ecuación a diferencias es

$$y(n) = 0,1584y(n-1) + 0,4208[x(n) + x(n-1)]$$

Filtros analógicos clásicos

- Filtro Butterworth
 - Se caracteriza por la siguiente respuesta en frecuencia al cuadrado:

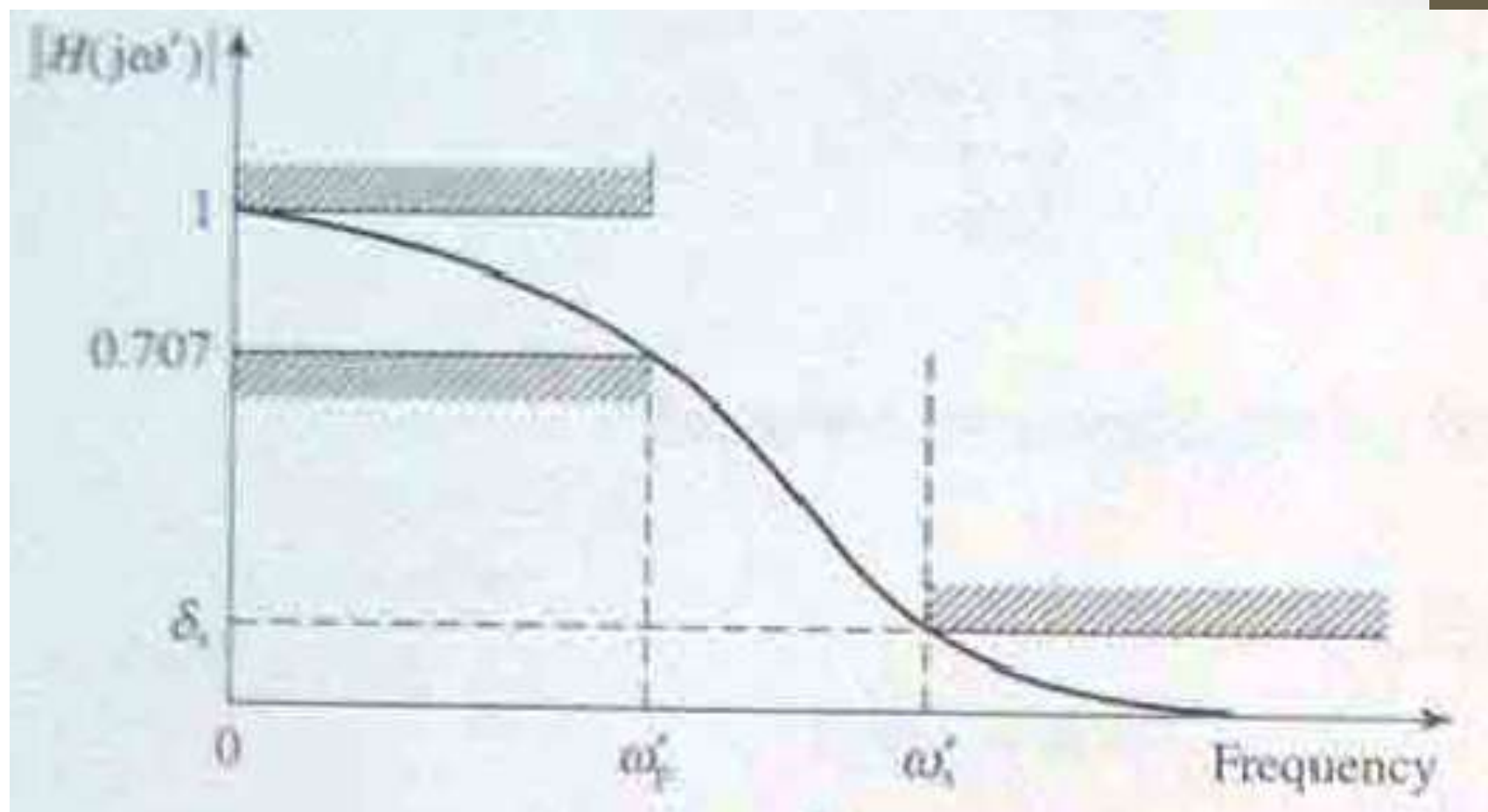
$$|H(\omega')|^2 = \frac{1}{1 + (\omega' / \omega'_p)^{2N}}$$

- El orden es dado por

$$N \geq \frac{\log_{10}[(1 / \delta_s) - 1]}{2 \log_{10}(\omega'_s / \omega'_p)}$$

- La función de transferencia de un filtro de Butterworth contiene ceros en el infinito y polos uniformemente espaciados en un círculo del plano s de radio ω'_p

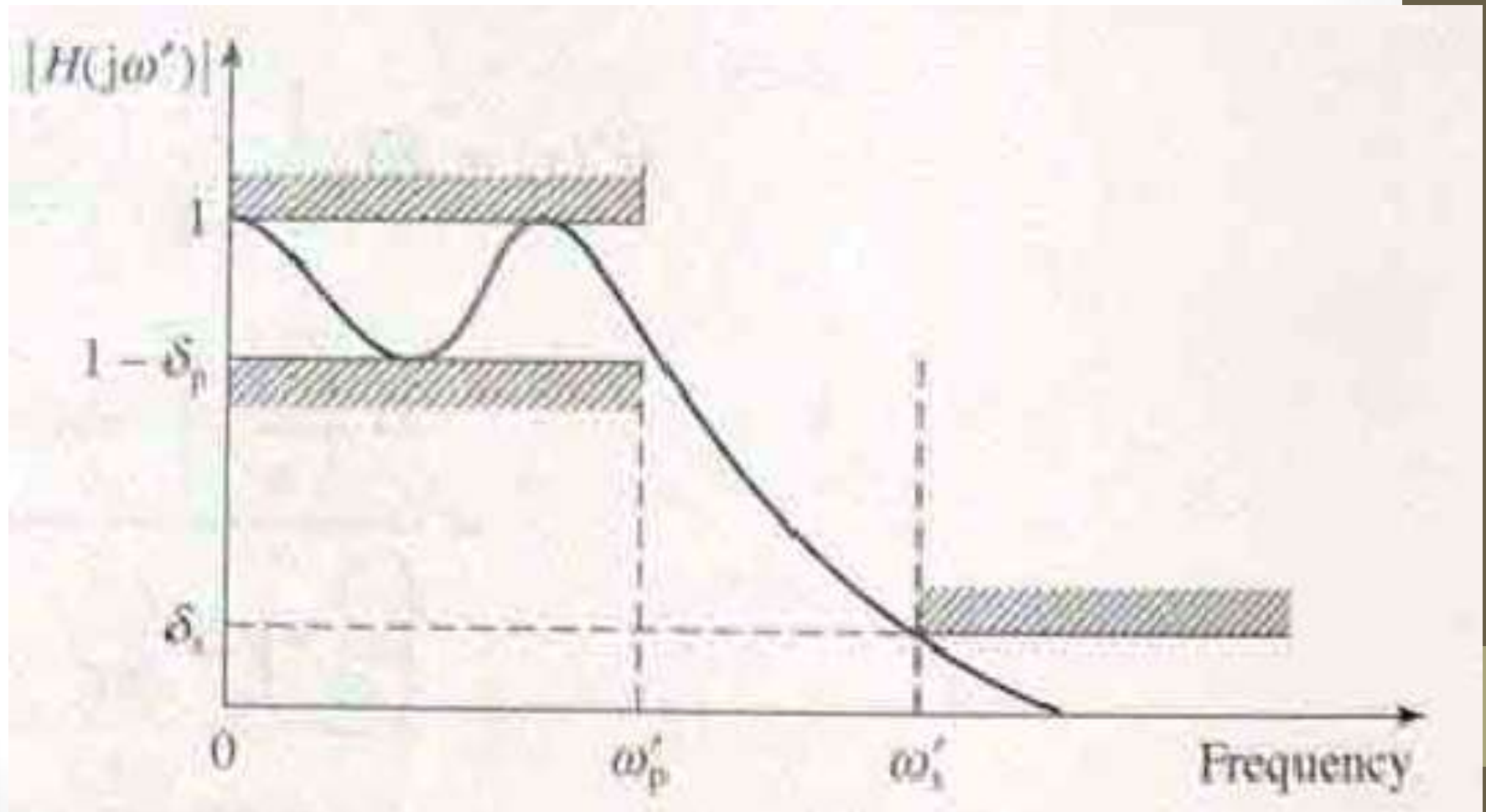
$$s_k = \omega'_p e^{j\pi(2k+N-1)/2N}$$



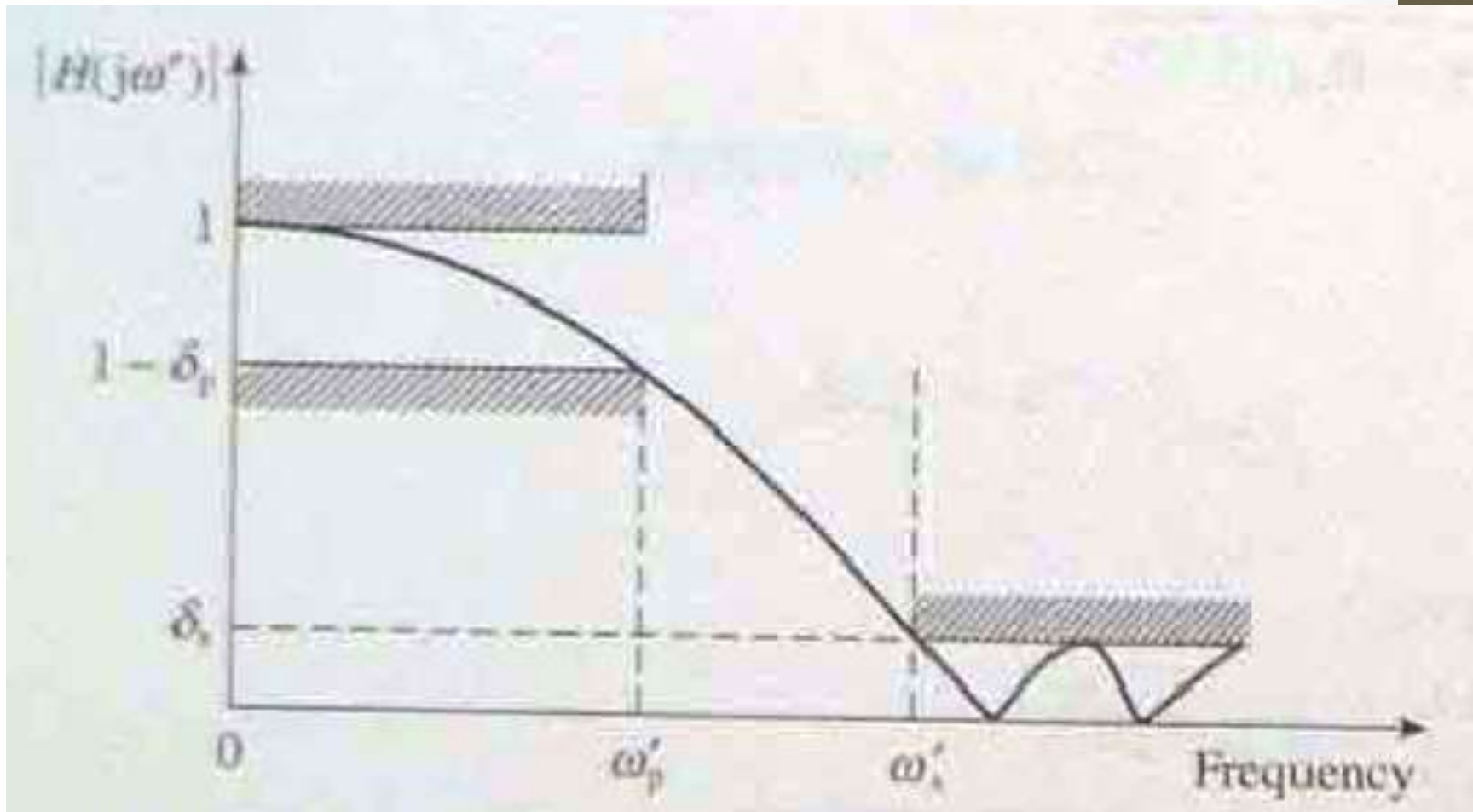
Filtro Chebyshev

- Tipo 1: equirriple en la banda de paso y monotónico en la banda de atenuación
- Tipo 2: equirriple en la banda de atenuación y monotónico en la banda de paso

Filtro Chebyshev tipo 1



Filtro Chebyshev tipo 2



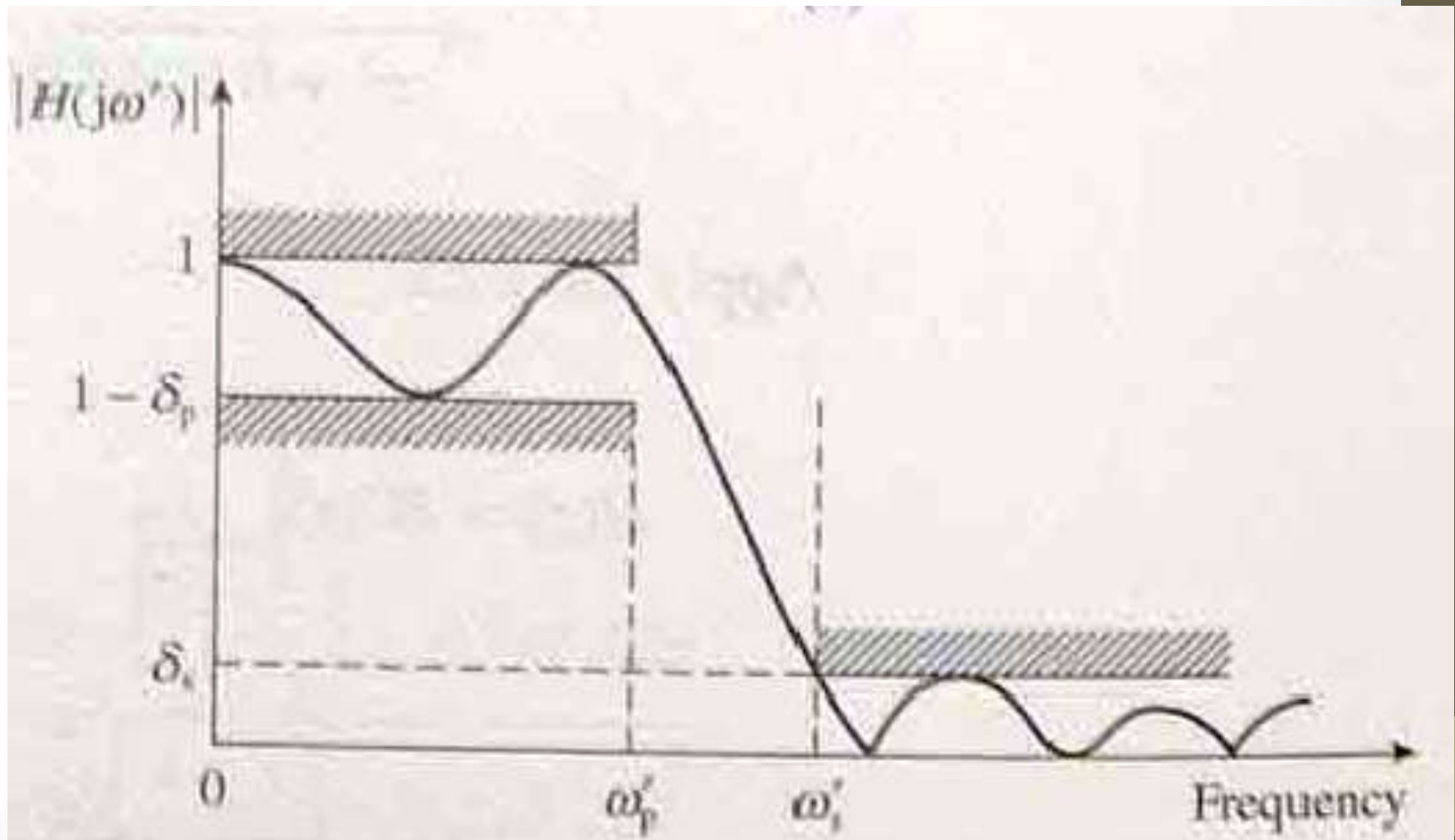
Filtro elíptico

- Exhibe equiripple en ambas bandas. Es caracterizada por la siguiente función:

$$|H(\omega')|^2 = \frac{K}{1 + \varepsilon^2 G_N^2(\omega')}$$

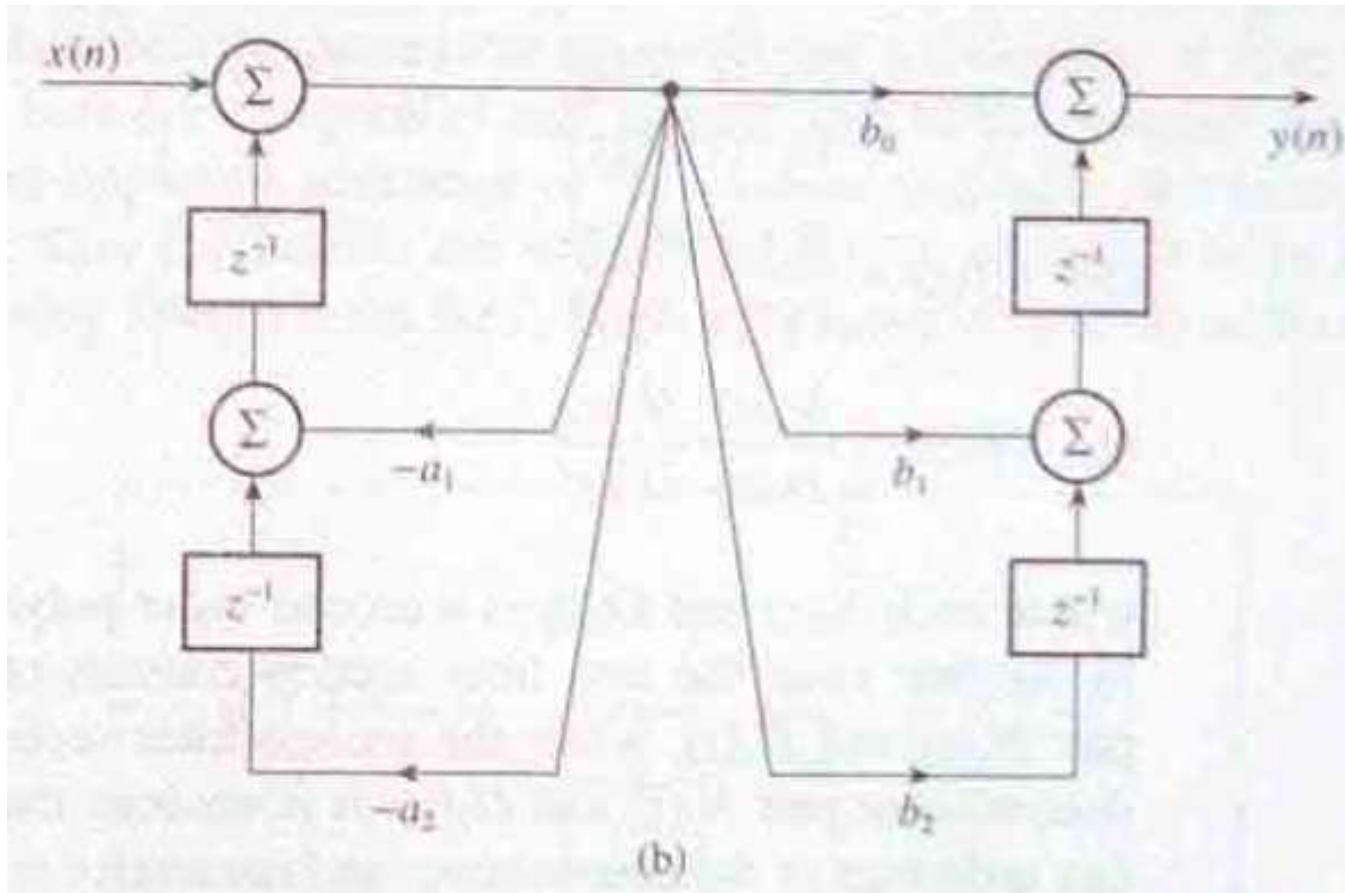
- Es la primera opción en el diseño de filtros, salvo que se necesiten requerimientos especiales de fase

Filtro Elíptico



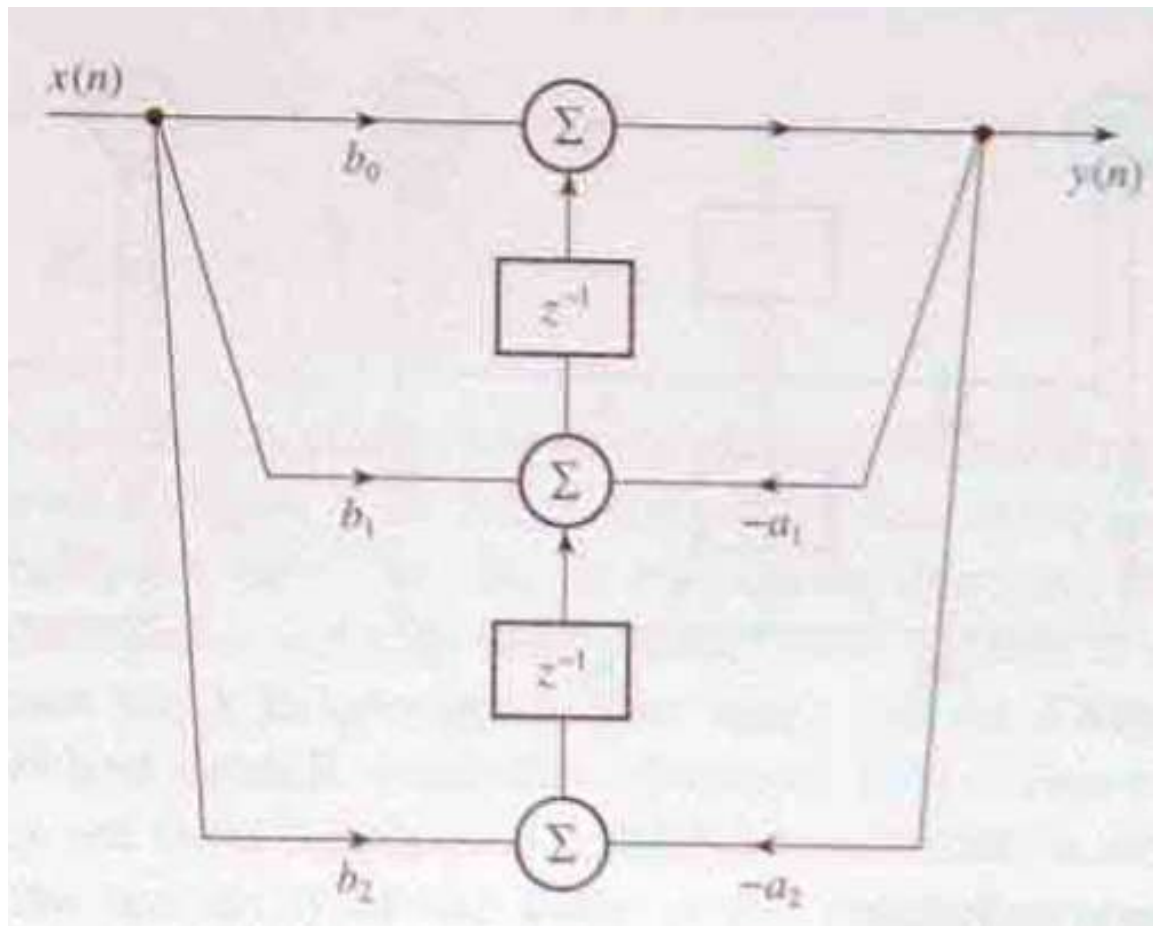
Estructuras de Implementación

- Forma directa:



Estructuras de Implementación

- Forma canónica:



Estructuras de Implementación

- La forma canónica es la más popular por:
 - Requerir menor número de elementos de almacenamiento
 - Bajo ruido por redondeo
 - Es necesario escalar la entrada para evitar sobre flujos

Si el orden del filtro es mayor que tres, se debe optar por implementaciones en cascada o paralelas para evitar efectos de longitud finita de palabra

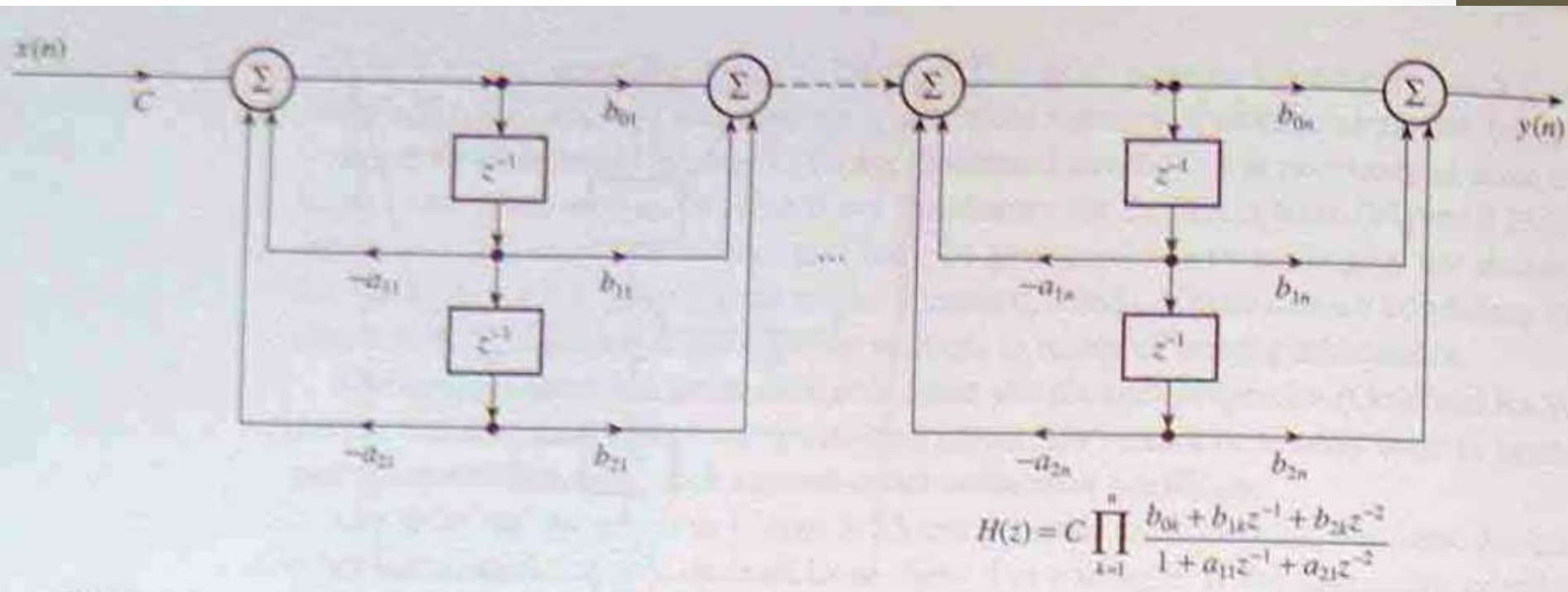
Estructura en Cascada

- Se factoriza la función de transferencia de forma tal a obtener

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N/2} \frac{N_k(z)}{D_k(z)} = \prod_{k=1}^{N/2} \left[\frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}} \right]$$

- Los polos y ceros se agrupan considerando los más próximos entre si
- Se colocan los más proximos al origen primero

Estructura en Cascada



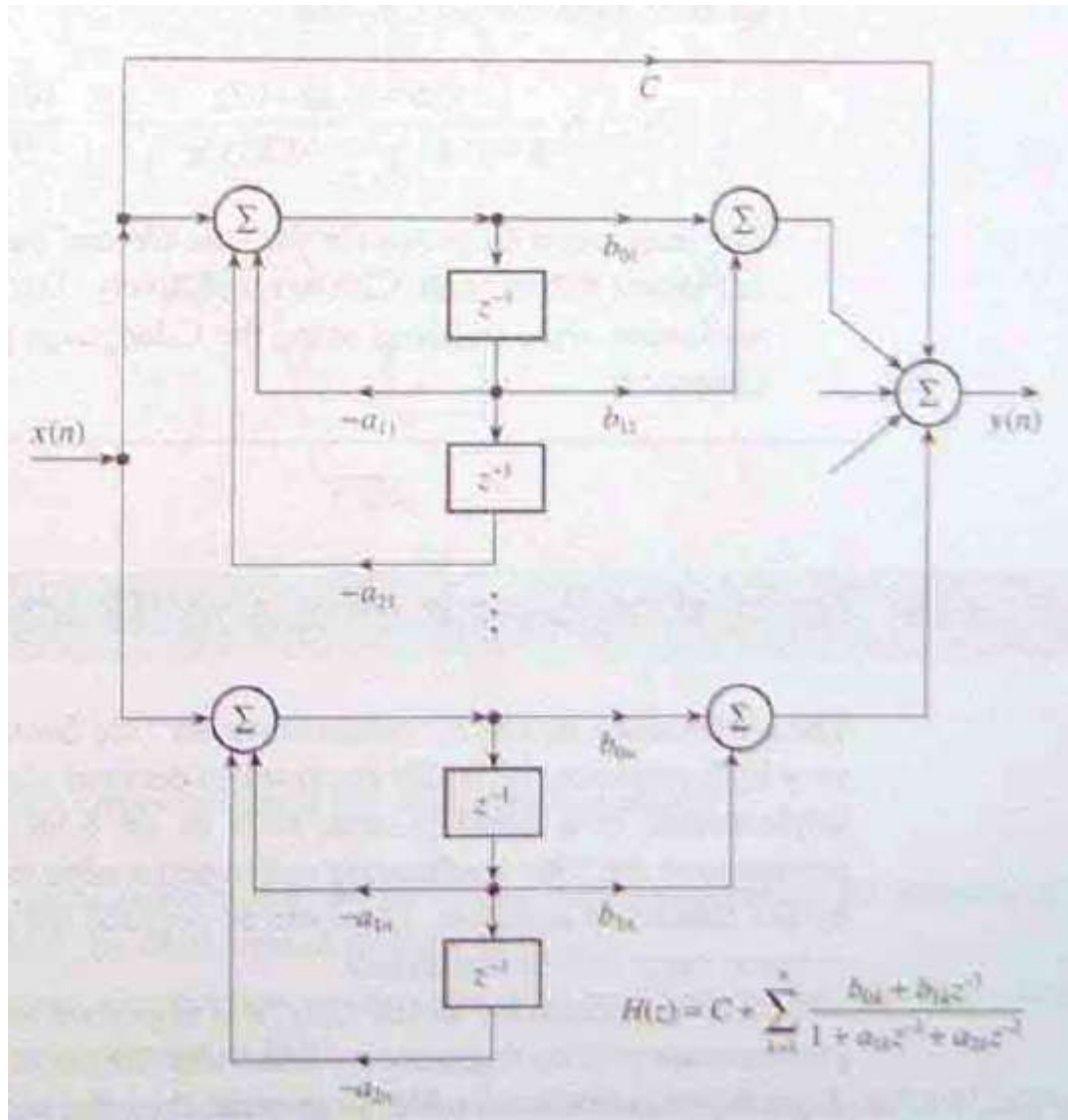
Estructura en paralelo

- Caracterizada por la suma de secciones de segundo orden
- Se utiliza la descomposición en fracciones parciales

$$H(z) = C + \sum_{k=1}^{N/2} H_k(z),$$

$$C = \frac{b_N}{a_N}, \quad H_k(z) = \frac{b_{0k} + b_{1k}z^{-1}}{1 + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}}$$

Estructura en Paralelo



Estructura en paralelo

- Los ceros de esta estructura son más susceptibles a errores de cuantización
- Por otro lado, la estructura en paralelo tiene entre 25% y 50% de coeficientes enteros ($0, \pm 1, \pm 2$), por lo tanto atractivo para sistemas con aritmética primitiva, donde el número de multiplicaciones debe ser mantenido bajo

Estructuras de implementación

- Ejemplo:

$$H(z) = \frac{0,1432(1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3})}{1 - 0,1801z^{-1} + 0,3419z^{-2} - 0,0165z^{-3}}$$